Bew.: „$\Rightarrow$": z.z.: ε-ROBUST-3-SAT $\in PCP(\log n, 1)$.

Sei $F = \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{3} L_{i,j}$ eine Formel in 3-KNF.

Als Zertifikat y wähle eine Belegung von F.

Nun wählt V eine zufällige Klausel $\bigvee_{j=1}^{3} L_{i,j}$, wobei $O(\log m)$ zufällige Bits benötigt werden. Dann fragt V das Zertifikat y nach den ≤ 3-Bits, die die Belegung der ≤ 3 in $\bigvee_{j=1}^{3} L_{i,j}$ vorkommenden Variablen enthält.

Falls diese Belegung die Klausel erfüllt, dann akzeptiert V. Ansonsten verwirft V.

Falls F erfüllbar ist, ist die W.keit, dass V akzeptiert gleich 1.

Falls F nicht erfüllbar ist, dann ist die W.keit, dass V eine erfüllte Klausel wählt $\leq 1-\varepsilon$. k-fachen Wiederholen des Tests, mit $k = \lceil \log_{1-\varepsilon} \frac{1}{2} \rceil$ mal, drückt die Fehlerwahrscheinlichkeit von V auf $\leq \frac{1}{2}$.

„$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Eine Abb. ϕ, die 3-KNF-Formeln auf 3-KNF-Formeln abbildet, heißt ε-robust, falls für jede Formel F in 3-KNF gilt:

F erfüllbar $\Rightarrow$ $\phi(F)$ erfüllbar

F nicht erfüllbar $\Rightarrow$ mind. ε-Anteil der Klauseln von $\phi(F)$ ist nicht erfüllbar.

z.z.: es gibt eine ε-robuste Abb., die in polynomieller Zeit berechenbar ist. ($3\text{-SAT} \leq_p \varepsilon\text{-ROBUST-3-SAT}$).

Dazu: $3\text{-SAT} \in PCP(\log n, 1)$

Betrachte ein Zertifikat

$y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$

Für zufällige Bits $r \in \{0,1\}^{O(\log n)}$ erfragt V $q = O(1)$ Bits von y. Diese seien $y_{r_1}, \dots, y_{r_q}$.

Für r definiere eine Formel F_r in 3-KNF, dabei besitzt F_r die Variablen $y_{r_1}, \dots, y_{r_q}$ und $y_{r_1}, \dots, y_{r_q}$ ist erfüllende Bel. von F_r gdw. $V(F, y; r) = 1$. Zur Def. von F_r genügen $k = O(1)$ Klauseln, da die Anzahl der Variablen konstant ist.

Wenn F erfüllbar ist, dann sind alle Formeln F_r, mit $r \in \{0,1\}^{O(\log n)}$ erfüllt. Wenn F nicht erfüllbar ist, dann sind höchstens die Hälfte der Formeln F_r erfüllbar.

Betrachte

$$\phi(F) = \bigwedge_r F_r.$$

Falls F nicht erfüllbar, dann sind mind. $\varepsilon = \frac{1}{2k}$ der Klauseln von $\phi(F)$ nicht erfüllbar. ϕ ist eine ε-robuste Abb., die in polynomieller Zeit berechenbar ist. $\boxtimes$

<u>Bem.</u>: Der einzig bekannte Beweis für ε-ROBUST-3-SAT $\in$ NPC basiert auf dem PCP-Theorem.

<u>Korollar</u> Falls $P \neq NP$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es keinen Polynomialzeitalgorithmus gibt, der das MAX-3-SAT-Problem mit Approximationsfaktor $\geq 1-\varepsilon$ löst. [Dabei ist MAX-3-SAT das folgende Optimierungsproblem: gegeben sei eine Formel F in 3-KNF. Was ist die größte Anzahl erfüllbarer Klauseln von F?].

Bem.:

(i) Falls in F jede Klausel genau 3 Literale enthält, dann gibt es einen effizienten Algo. zur Approx. von MAX-3-SAT mit Approximationsfaktor $\frac{7}{8}$. ($\rightarrow$ Aufgabe 2.3)

(ii) Mit Hilfe von semidefiniter Programmierung kann man MAX-3-SAT mit Approximationsfaktor $\frac{7}{8} - \varepsilon$ lösen, für jedes $\varepsilon > 0$. (Karloff, Zwick, 1997)

(iii) Falls $P \neq NP$ gilt, gibt es keinen effizienten Algo., der MAX-3-SAT mit Approximationsfaktor $\geq \frac{7}{8} + \varepsilon$ löst, für jedes $\varepsilon > 0$. (Håstad, 2001)