Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

Diplomarbeit

Einige Anwendungen des Satzes von Halpern und Läuchli

Frederik von Heymann

14. August 2007

Betreut von PD Dr.habil. Stefan Geschke

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Der Satz von Ramsey sagt aus, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: wenn wir die n-elementigen Teilmengen der natürlichen Zahlen mit m Farben färben, so finden wir eine unendliche Menge, deren n-elementige Teilmengen alle die gleiche Farbe haben [8].

Wir wissen, dass dieser Satz nicht für beliebige Obermengen von $\mathbb{N}$ gültig ist. Insbesondere gilt ein entsprechender Satz nach Sierpiński nicht für überabzählbare Teilmengen der reellen Zahlen [9]. Wir können jedoch durch Bedingungen an die Färbung und die Teilmenge zu positiven Ergebnissen kommen. Ein solches Ergebnis ist der Satz von Blass [2]:

Sei $P \subseteq [0,1]$ perfekt (also ohne isolierte Punkte) und c eine stetige Färbung der n-elementigen Teilmengen von P mit endlich vielen Farben. Dann gibt es ein perfektes $P' \subseteq P$, so dass die n-elementigen Teilmengen von P' unter c mit höchstens $(n-1)!$ verschiedenen Farben gefärbt werden.

Der hier verwendete Beweis zu diesem Satz (aus [2] und [10]) wird über die Baum-Repräsentation von perfekten Mengen geführt. Dazu wird die Binärdarstellung der reellen Zahlen genutzt und endliche Folgen über $\{0,1\}$ mit den entsprechenden Knoten im (unendlichen) binären Baum identifiziert. Eine perfekte Menge entspricht somit einem Baum ohne Blätter, in dem jeder Knoten zwei Nachfolger auf verschiedenen Ästen hat (der Baum verzweigt also oberhalb jedes Knotens immer wieder). Ein solcher Baum heißt perfekt.

Im Beweis wird außerdem ein wichtiger Satz der unendlichen Kombinatorik, den Satz von Halpern und Läuchli [4] verwendet.

Dieser sagt in einer seiner verschiedenen Versionen das Folgende aus [6]: Sei $(T_1, \ldots, T_n)$ ein Tupel von perfekten Bäumen. Färben wir nun Tupel $(t_1, \ldots, t_n)$, wobei $t_i \in T_i$ ist und alle Elemente des Tupels gleiche Höhe haben, dann gibt es perfekte Teilbäume $T_i' \subseteq T_i$ und eine unendliche Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, so dass alle Tupel der beschriebenen Gestalt, mit $t_i \in T_i'$ und Höhe in A, die gleiche Farbe haben.

Dieser Satz, der ursprünglich formuliert wurde, um die Konsistenz von $\neg AC$ mit dem booleschen Primidealsatz zu zeigen, hat in den vergangenen 40 Jahren diverse Anwendungen im Bereich der deskriptiven Mengenlehre und der unendlichen Kombinatorik gefunden. Um diesen Satz und einige seiner Anwendungen wird es in dieser Arbeit hauptsächlich gehen. Dabei gibt es folgende Struktur: Kapitel 1 und 2 behandeln die Grundlagen, wobei Kapitel 1 der Notation gewidmet ist und Kapitel 2 dem Satz von Halpern und Läuchli. In Kapitel 3 und 4 geht es um Anwendungen beziehungsweise Verallgemeinerungen des Satzes [6, 7]. Kapitel 5 ist nochmals Notation und Kapitel 6 behandelt dann den oben genannten Satz von Blass.

Der Original-Beweis des Satzes von Halpern und Läuchli von 1966 verwendet Methoden, die oft als „meta-mathematisch“ bezeichnet werden. Erst 2000 (veröffentlicht 2002) wurde von S.A. Argyros, V. Felouzis und V. Kanellopoulos ein kombinatorischer Beweis vorgestellt [1]. Dadurch können nun eine Reihe von Sätzen, die den Satz von Halpern und Läuchli verwenden, ebenfalls rein kombinatorisch bewiesen werden, unter ihnen sämtliche in dieser Arbeit beschriebenen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Diplombetreuer PD Dr.habil. Stefan Geschke für seine vielen hilfreichen Anmerkungen und Hinweise. Außerdem danke ich Anna Gundert für ihre Unterstützung und das kritische Lesen meiner Arbeit, sowie Prof. Dr. Sabine Koppelberg und Prof. Dr. Martin Aigner dafür, dass sie mir einen Arbeitsraum zur Verfügung gestellt und mir die Gelegenheit geboten haben, Teile meiner Arbeit vorzutragen.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Berlin, 14.08.2007 Frederik von Heymann

Kapitel 1

Einführung

Bevor wir uns den eigentlichen Ergebnissen in dieser Arbeit zuwenden, wollen wir uns ein wenig mit der Notation dieses Gebiets beschäftigen. Dies erscheint sinnvoll, da sie leider recht umfangreich ausfällt. Die Beweise scheinen deshalb, falls man mit den Schreibweisen noch nicht vertraut ist, möglicherweise schwieriger als sie sind.

Zunächst wollen wir einige Sprachkonventionen festlegen. Teilweise sind sie wohlbekannt, teilweise weichen sie aber von den Konventionen mancher Gebiete ab.

1.1 Definition. Sei mit ω die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und auch die kleinste Limesordinalzahl bezeichnet.

Wir wollen außerdem $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \omega \setminus \{0\}$ schreiben. Damit gilt (etwas widersprüchlich) $\omega \neq \mathbb{N}$, aber die Vorteile dieser Schreibweise scheinen zu überwiegen.

Es gilt $|\mathbb{N}| = |\omega| = \omega = \aleph_0$.

1.2 Definition. Sei M eine Menge und $<$ eine Halbordnung auf M (das heißt, $<$ ist transitiv und irreflexiv).

$c \subseteq M$ heißt ***Kette***, falls c durch $<$ linear geordnet ist. c heißt ***maximale Kette***, falls für jede Kette c' in M gilt: ist $c \subseteq c'$, so ist $c = c'$.

c heißt ***Kette maximaler Länge***, falls für jede Kette c' in M gilt: $|c'| \leq |c|$.

1.3 Definition. Eine Menge T mit einer Halbordnung $\prec$ heißt ***Baum***, wenn Folgendes gilt:

(i) T hat ein kleinstes Element, genannt die ***Wurzel*** von T.

(ii) Für jedes $t \in T$ ist $\{q \in T : q \prec t\}$ eine endliche Kette.

(iii) Jedes $t \in T$ hat nur endlich viele direkte Nachfolger, mindestens aber einen.

Wir sehen hierbei, dass jedes Element eines Baums, mit Ausnahme der Wurzel, wegen (ii) einen direkten Vorgänger hat und es somit keine Limespunkte im Baum gibt. Aus (i)-(iii) ergibt sich außerdem, dass den betrachteten Bäumen immer abzählbare Mengen zugrunde liegen. Deshalb und wegen (iii) hat jede Kette maximaler Länge in einem Baum T die Länge ω.

In einigen Texten wird nur gefordert, dass ein Baum eine endliche Anzahl von Wurzeln hat. Alle hier für unsere Bäume bewiesenen Sätze gelten auch für solche Objekte (denn durch Einfügen eines Elements unterhalb aller Wurzeln bekommen wir wieder einen Baum in unserem Sinne). Der Übersichtlichkeit halber wollen wir es bei einer Wurzel belassen.

Die Elemente von T werden auch ***Knoten*** in T genannt. Eine maximale Kette in T heißt ***Ast*** in T.

Wir wollen einen Knoten, der (mindestens) zwei nicht vergleichbare direkte Nachfolger hat, einen ***Spaltknoten*** nennen. Hat ein Knoten keine Nachfolger in T, so heißt er auch ***Blatt*** von T. Die hier betrachteten Bäume haben daher nach (iii) keine Blätter.

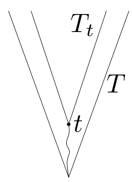
1.4 Definition. Sei T ein Baum. Für ein $W \subseteq T$ schreiben wir $\boldsymbol{C_{\max}(W)}$ für die Menge der Ketten maximaler Länge in W. Dabei ist klar, dass ein Element von $C_{\max}(W)$ höchstens abzählbare Mächtigkeit haben kann.

Ist $c \in C_{\max}(W)$, $|c| = \omega$ und c' eine unendliche Teilmenge von c, so schreiben wir $\boldsymbol{c' \preceq c}$ (dabei ist c' insbesondere auch in $C_{\max}(W)$).

Es ist dabei noch zu bemerken, dass $|W| = \omega$ nicht die Existenz einer unendlichen Kette in W garantiert. Denn betrachten wir etwa einen Baum, in dem es einen Ast mit abzählbar vielen Spaltknoten gibt, so findet sich leicht eine unendliche Teilmenge W, so dass je zwei Elemente von W nicht vergleichbar sind.

1.5 Definition. Sei T ein Baum.

(i) Wir ordnen allen $t \in T$ ihre ***Höhe*** $\boldsymbol{|t|} := |\{q \in T : q \prec t\}|$ zu.



(ii) Für $t \in T$ ist der ***Baum durch t*** die Menge

$$T_t := \{s \in T : s \prec t \text{ oder } s \succ t \text{ oder } s = t\}$$

mit der von T geerbten Halbordnung.

1.6 Definition. Sei T ein Baum und W eine Teilmenge von T. Das ***k-te Level*** $\boldsymbol{W(k)}$ von W ist die Menge $\{t \in W : |t| = k\}$. Dabei richtet sich also für $t \in W$ das Level, auf dem t liegt, nach seiner Höhe in T und nicht etwa nach der Höhe in W.

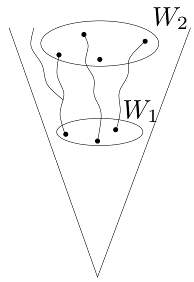
Die ***Menge der Level*** von W ist die Menge $\boldsymbol{L(W)}:= \{k \in \omega : W(k) \neq \varnothing\}$. Meist schreiben wir $L(W) = \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei wir die $l_n \in \omega$ so indizieren, dass die Folge (l_n) streng monoton steigend ist.

Offensichtlich gilt für einen Baum T und $W \subseteq T$ immer

$$\bigcup_{k\in\omega} W(k) = \bigcup_{k\in L(W)} W(k) = W \text{ und } L(T) = \omega.$$

1.7 Definition. Sei T ein Baum. Wir definieren dann die folgenden Eigenschaften.

(i) Seien W_1, W_2 Teilmengen von T. Wir sagen W_2 ***dominiert*** W_1, falls es für jedes $t_1 \in W_1$ ein $t_2 \in W_2$ mit $t_1 \prec t_2$ gibt.



(ii) Sei $W \subseteq T$. Dann ist W ***dicht*** in T, falls W den Baum T dominiert.

(iii) Sei $W \subseteq T$ mit $L(W) = \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wollen W ***streng dicht*** in T nennen, falls für jedes $n \in \omega$ das Level $T(n)$ von $W(l_n)$ dominiert wird.

(iv) Sei $W \subseteq T$ mit $L(W) = \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $t \in T$. Die Menge W heißt ***streng t-dicht***, falls für jedes $n \in \omega$ zumindest $T_t(n)$ von $W(l_n)$ dominiert wird. Eine streng dichte Menge ist also insbesondere streng t-dicht für jedes $t \in T$.

Außerdem ist klar, dass $W \subseteq T$ genau dann streng t-dicht in T ist, wenn $W \cap T_t$ streng dicht in T_t ist.

Wir bemerken dabei noch, dass eine Teilmenge eines Baums sich selbst dominieren kann. Dagegen kann ein Baum nicht streng dicht in sich selbst sein (ist aber T ein Baum und t_0 seine Wurzel, so ist $T \setminus \{t_0\}$ immer streng dicht in T).

1.8 Definition. Sei T ein Baum, $W \subseteq T$ und $M \subseteq \omega$. Dann definieren wir $\boldsymbol{W{\restriction}_M}:= \{t \in W : |t| \in M\}$.

Es folgen nun einige Lemmata und noch weitere Definitionen. Hierbei wird nur Lemma 1.14 tatsächlich später verwendet. Die übrigen sind allein dazu da, die Begriffe besser kennenzulernen. Darum sind die Beweise recht ausführlich gehalten, auch wenn sie teilweise nur aus dem Zusammentragen von Definitionen bestehen.

1.9 Lemma. *Sei T ein Baum und W streng dicht in T. Dann ist für jedes unendliche $M \subseteq L(W)$ die Menge $W' = W\restriction_M$ ebenfalls streng dicht in T.*

Ist W für ein $t \in T$ lediglich streng t-dicht in T, so ist auch $W' = W\restriction_M$ streng t-dicht in T.

Beweis. Sei zunächst W streng dicht in T, und sei ein unendliches $M \subseteq L(W)$ gegeben. Um nachzuweisen, dass $W' = W\restriction_M$ ebenfalls streng dicht in T ist, zeigen wir, dass für beliebiges $n \in \omega$ die Menge $T(n)$ von $W'(l'_n)$ dominiert wird, wobei $L(W') = \{l'_n\}_{n\in\omega}$ gelten soll.

Da aber $W'(l'_n) = W(l_m)$ für ein $m \geq n$ ist, reicht es sicher zu zeigen, dass $W(l_m)$ für jedes $m > n$ das Level $T(n)$ dominiert (Für $n = m$ bleibt nichts zu zeigen). Dies ist aber gegeben, da jeder Knoten in $T(n)$ einen Nachfolger in $T(m)$ hat und jeder Knoten in $T(m)$ nach Voraussetzung einen Nachfolger in $W(l_m)$ hat.

Dieses Argument lässt sich ebenso anwenden, wenn W nur streng t-dicht für ein $t \in T$ ist. □

Wir bemerken noch, dass die Elemente von $C_{\max}(W)$ Länge ω haben, falls W streng dicht oder streng t-dicht in T ist. Außerdem sei angemerkt, dass jedes $s \in W$ in einer Kette maximaler Länge von W enthalten ist, falls W streng dicht oder streng t-dicht ist.

1.10 Definition. Sei $T_1, \ldots, T_d$ eine endliche Folge von Bäumen. Das ***Baumtupel*** (oder ***d-Baumtupel***) $\vec{T}$ ist das geordnete d-Tupel $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$.

1.11 Definition. Wir wollen nun einige Begriffe, die wir schon für Bäume und ihre Teilmengen kennengelernt haben, auch für Baumtupel definieren:

(i) Seien $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ und $\vec{W}' = (W'_1, \ldots, W'_d)$ d-Tupel von Mengen. Wir schreiben $\boldsymbol{\vec{W} \preceq \vec{W}'}$, falls $W_i \subseteq W'_i$ für alle $i = 1, \ldots, d$ gilt.

(ii) Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d) \preceq \vec{T}$. Falls $L(W_i) = L(W_j)$ für alle $i, j \leq d$ ist, so heißt $\vec{W}$ ***kompatibel*** (bei kompatiblen Tupeln können wir dann auch $L(\vec{W}) := L(W_i)$ definieren). Falls nicht anders bezeichnet, sind alle Tupel als kompatibel zu betrachten.

(iii) Sei $\vec{T} = (T^1, \ldots, T^d)$ ein Baumtupel (die hochgestellten Indizes haben rein notationelle Gründe). Wir schreiben für $\vec{t} \in \prod_{i=1}^d T^i$ kurz $\vec{t} \in \vec{T}$. Für $\vec{t} \in \vec{T}$ ist $\boldsymbol{\vec{T}_{\vec{t}}} := (T^1_{t_1}, \ldots, T^d_{t_d})$. Außerdem sei $\boldsymbol{\vec{T}(m)} := (T^1(m), \ldots, T^d(m))$.

(iv) Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d) \preceq \vec{T}$. $\vec{W}$ heißt ***streng dicht*** (***streng $\vec{t}$-dicht***) in $\vec{T}$, falls $\vec{W}$ kompatibel ist und jedes W_i streng dicht (streng t_i-dicht) in T_i ist.

1.12 Definition. Sei $\vec{T}$ ein d-Baumtupel.

(i) Für $\vec{t} \in \vec{T}$ sei $|\vec{t}| := \max\{|t_i| : i = 1, \ldots, d\}$ die ***Ordnung*** von $\vec{t}$.

(ii) Für $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \vec{T}$ und eine echte Teilmenge $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ von $\vec{T}$ setzen wir $\vec{W}_{\vec{t}} := (W'_1, \ldots, W'_d)$, wobei

$$W'_i := \{s \in W_i : t_i \prec s \text{ und } |\vec{t}| < |s|\}.$$

Es ist hierbei auffällig, dass diese Definition von der oben gegebenen Definition von $\vec{T}_{\vec{t}}$ abweicht und darum nur für echte Teilmengen gültig ist. Dies ist notwendig, weil das sonst entstehende Tupel inkompatibel sein könnte.

Wir können nun eine Erweiterung von Lemma 1.9 für Baumtupel formulieren.

1.13 Lemma. *Sei $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ eine streng dichte (beziehungsweise streng $\vec{t}$-dichte) Teilmenge eines Baumtupels $\vec{T}$. Dann ist für jedes unendliche $M \subseteq L(\vec{W})$ die Menge $\vec{W}\restriction_M = (W_1\restriction_M, \ldots, W_d\restriction_M)$ ebenfalls streng dicht (beziehungsweise streng $\vec{t}$-dicht) in $\vec{T}$.*

Beweis. Dass eine Menge $\vec{W}$ streng dicht (beziehungsweise streng $\vec{t}$-dicht) ist, wird lokal in jedem T_i nachgewiesen. Dort kann aber Lemma 1.9 angewendet werden. □

1.14 Lemma. *Sei $\vec{T}$ ein Baumtupel, $\vec{W}$ eine kompatible Teilmenge von $\vec{T}$ mit Levelmenge $L(\vec{W}) = \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\vec{t} \in \vec{T}$. Dann gilt: Wird $\vec{T}_{\vec{t}}(|\vec{t}|+n)$ von $\vec{W}(l_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ dominiert, so ist $\vec{W}$ streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$.*

Beweis. Sei $d \geq 1$, $\vec{T} = (T^1, \ldots, T^d)$, $\vec{W} = (W^1, \ldots, W^d)$ und $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ gegeben. Wieder nutzen wir, dass es sich um eine lokale Eigenschaft handelt, die wir nachweisen wollen. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\vec{T}_{\vec{t}}(|\vec{t}| + n) = (T^1_{t_1}(|\vec{t}| + n), \ldots, T^d_{t_d}(|\vec{t}| + n)).$$

Falls also $\vec{T}_{\vec{t}}(|\vec{t}| + n)$ von $\vec{W}(l_n)$ dominiert wird, so heißt das, dass $T^i_{t_i}(|\vec{t}| + n)$ von $W^i(l_n)$ für $i = 1, \ldots, d$ dominiert wird. Dann dominiert $W^i(l_n)$ natürlich auch $T^i_{t_i}(n)$ (da T^i keine Blätter hat). Damit ist W^i streng t_i-dicht in T^i und also $\vec{W}$ streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$, wie behauptet. □

1.15 Definition. Sei M eine Menge und sei $\{C_1, \ldots, C_p\}$ eine Partition von M. Oft schreiben wir dann, dass $M = C_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} C_p$ eine Partition ist.

Wir werden häufig Partitionen und Färbungen synonym verwenden. Haben wir also eine Partition $M = C_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} C_p$, so sprechen wir davon, dass M mit p Farben gefärbt ist.

Ist $N \subseteq M$ und $N \subseteq C_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, p\}$, so hat demnach N für uns die Farbe j. Gleichbedeutend schreiben wir auch, dass N j-homogen ist.

Kapitel 2

Satz von Halpern-Läuchli

Wie schon im Vorwort erwähnt, verwendet der erste Beweis des Satzes von James Halpern und Hans Läuchli Methoden der Modelltheorie, die der kombinatorischen Struktur des Satzes nicht angemessen scheinen. Dies haben bereits die Autoren in ihrem Artikel bemerkt und den Leser angeregt, einen kombinatorischen Beweis zu finden [4]. Ein solcher Beweis liegt inzwischen durch Spyros Argyros, Vaggelis Felouzis und Vassilis Kanellopoulos [1] vor und wird uns in diesem Kapitel beschäftigen.

Es sei noch auf einen eleganten Beweis mit Hilfe von Forcing von Harrington (zu finden in [10]) hingewiesen, dessen Makel allerdings ist, dass er ebenfalls nicht als kombinatorisch angesehen werden kann.

Es ist noch eine letzte notationelle Hürde zu überwinden, bevor wir uns dem titelgebenden Satz zuwenden.

2.1 Definition. Für $A \subseteq \omega$ und ein Baumtupel $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ sei

$$\bigotimes^A \vec{T} := \bigcup_{n \in A} \prod_{1 \leq i \leq d} T_i(n)$$

das ***Baumprodukt*** von $\vec{T}$.

Falls $A = \omega$ ist, schreiben wir $\bigotimes^A \vec{T} = \bigotimes \vec{T}$. Auf die gleiche Weise definieren wir für kompatibles $\vec{W} \prec \vec{T}$ und $L(\vec{W}) = \{l_n\}_{n \in \omega}$

$$\bigotimes^A \vec{W} = \bigcup_{n \in A} \prod_{1 \leq i \leq d} W_i(l_n)$$

und $\bigotimes^A \vec{W} = \bigotimes \vec{W}$ für $A = \omega$. In diesem Kapitel wird uns nur $A = \omega$ begegnen.

Dabei ist klar, dass jedes $\vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$ ein Element von $\vec{T}$ (im weiter vorne beschriebenen Sinn) ist und $|\vec{t}|$ in diesem Fall das eindeutige $k \in \omega$ ist, so dass $\vec{t} \in \prod_{i=1}^d T_i(k)$ gilt.

Außerdem ist auch $\bigotimes^A \vec{T}$ ein Baum (mit der von den Bäumen in $\vec{T}$ induzierten Halbordnung), was aber für unsere weiteren Betrachtungen nicht ausgenutzt werden wird.

2.1 Der Satz von Halpern und Läuchli

Nun haben wir also das Handwerkszeug beisammen, um den Satz zu formulieren:

2.2 Satz (Halpern, Läuchli [4, 1]). *Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ streng dicht in $\vec{T}$. Dann gilt für jede endliche Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ eine der folgenden Aussagen:*

(a) Es gibt ein kompatibles $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, so dass $\vec{W}'$ streng dicht in $\vec{T}$ und $\bigotimes \vec{W}'$ 1-homogen ist.

(b) Es gibt ein $j \in \{2, \ldots, p\}$, ein $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \vec{T}$ und ein in $\vec{T}$ streng $\vec{t}$-dichtes $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, so dass $\bigotimes \vec{W}'$ j-homogen ist.

Die Betrachtung von $C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ kann durch Induktion leicht auf die von $C_1 \dot\cup C_2$ reduziert werden, also auf die folgende Aussage:

2.3 Satz. *Sei $\vec{T}$ ein d-Baumtupel und $\vec{W} \prec \vec{T}$ streng dicht in $\vec{T}$. Dann gilt für jede Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup C_2$ eine der folgenden Aussagen:*

(a) Es gibt ein $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, so dass $\vec{W}'$ streng dicht in $\vec{T}$ und $\bigotimes \vec{W}'$ 1-homogen ist.

(b) Es gibt ein $\vec{t} \in \vec{T}$ und ein $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, so dass $\vec{W}'$ streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$ und $\bigotimes \vec{W}'$ 2-homogen ist.

Beweis von 2.2 aus 2.3. Wie angekündigt folgt eine Induktion über p:

Sei uns dazu ein Baumtupel $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$, ein in $\vec{T}$ streng dichtes $\vec{W} \prec \vec{T}$ und eine Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ gegeben.

Der Fall $p = 2$ ist Satz 2.3. Sei also $p > 2$. Betrachten wir nun die Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_{p-2} \dot\cup C^1_{p-1}$ mit $C^1_{p-1} = C_{p-1} \dot\cup C_p$, so können wir die Induktionvoraussetzung auf diese Färbung anwenden.

Die Fälle, dass Aussage (a) oder für ein $j < p-1$ Aussage (b) eintritt, liefern auch in unserer ursprünglichen Färbung das gewünschte Ergebnis.

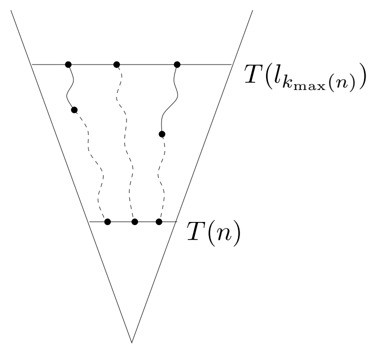
Tritt (b) mit $j = p-1$ ein, so wenden wir Satz 2.3 auf das Baumtupel $\vec{T}_{\vec{t}}$, die darin streng dichte Menge $\vec{W}'$ und die Partition $\bigotimes \vec{W}' = C^2_{p-1} \dot\cup C^2_p$ an, wobei $C^2_k := C_k \cap \bigotimes \vec{W}'$ ist ($k \in \{p-1, p\}$). Damit finden wir auch hier eine Menge mit den geforderten Eigenschaften. $\square$

Der Beweis von Satz 2.3 wird durch Induktion über d geführt. Der Fall $d = 1$ ist ein altbekanntes Ergebnis, das auch nicht schwer zu zeigen ist.

2.4 Proposition. *Sei T ein Baum und W eine streng dichte Teilmenge von T. Dann gibt es für jede Partition $W = C_1 \dot\cup C_2$ entweder ein 1-homogenes, streng dichtes $W' \subseteq W$ oder ein $t \in T$ und ein 2-homogenes, streng t-dichtes $W' \subseteq W$ in T.*

Beweis. Sei $L(W) = \{l_k\}_{k\in\omega}$ die Levelmenge von W. Betrachte die folgenden Fälle:

1. Fall: Für jedes $t \in T$ existiert ein $k_t \in \omega$, so dass für alle $k \geq k_t$ gilt: $W(l_k) \cap T_t \cap C_1 \neq \varnothing$.



Wir betrachten dann zu jedem $n \in \omega$ das Level $T(n) = \{t_{n,1}, \ldots, t_{n,p_n}\}$ und suchen $k_{\max}(n) = \max\{k_{\max}(n-1)+1, \max\{k_{t_{n,i}} : 1 \leq i \leq p_n\}\}$ (sei dabei $k_{\max}(-1) := 0$). Zu jedem $t \in T(n)$ wählen wir dann einen Nachfolger in $W(l_{k_{\max(n)}}) \cap T_t \cap C_1$ aus. Tun wir dies für jedes n, erhalten wir ein 1-homogenes, streng dichtes $W' \subseteq W$.

2. Fall: Fall 1 tritt nicht ein, das heißt, es existiert ein $t \in T$ und eine streng monoton steigende Folge $(k_n)_{n\in\omega}$, so dass für alle $n \in \omega$ gilt: $W(l_{k_n}) \cap T_t \subseteq C_2$.

Dann setzen wir $W' = \bigcup_{n\in\omega} W(l_{k_n}) \cap T_t$. Damit ist W' streng t-dicht in T und außerdem 2-homogen. $\square$

Vereinbarung: Ab jetzt argumentieren wir unter der Voraussetzung, dass Satz 2.3 für ein $d \geq 1$ gilt.

Für den Rest des Kapitels sei außerdem ein $(d+1)$-Baumtupel $(S, \vec{T})$, eine in $(S, \vec{T})$ streng dichte Teilmenge $(V_0, \vec{W}_0)$ und eine Partition $\bigotimes(V_0, \vec{W}_0) = C_1 \dot\cup C_2$ vorgegeben.

Bevor wir den Beweis von 2.3 weiterführen, wollen wir zunächst eine Abkürzung definieren. Diese wirkt im ersten Moment vielleicht recht unhandlich, trägt aber erheblich zur Lesbarkeit der nachfolgenden Sätze bei. Man erinnere sich dabei, dass $C_{\max}(W)$ die Menge der Ketten maximaler Länge von W bezeichnet.

2.5 Definition. Für jedes $(V, \vec{W}) \preceq (V_0, \vec{W}_0)$, das streng dichte Teilmenge von $(S, \vec{T})$ ist, sowie für jedes $(s, \vec{t}) \in (S, \vec{T})$ und $\varepsilon \in \{1, 2\}$ definieren wir die folgenden zwei Aussagen:

$Q(\varepsilon, \vec{0}, (V, \vec{W})) :\Leftrightarrow$ Für jedes $s' \in V$ und jedes in $\vec{T}$ streng dichte $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ existiert ein $c \in C_{\max}(V_{s'})$ und ein in $\vec{T}$ streng dichtes $\vec{W}'' \preceq \vec{W}'$, so dass $(c, \vec{W}'')$ kompatibel und $\bigotimes(c, \vec{W}'')$ ε-homogen ist.

$Q(\varepsilon, (s, \vec{t}), (V, \vec{W})) :\Leftrightarrow$ Für jedes $s' \in V_s$ und jedes in $\vec{T}$ streng dichte $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ existiert ein $c \in C_{\max}(V_{s'})$ und ein in $\vec{T}$ streng dichtes $\vec{W}'' \preceq \vec{W}'$, so dass $(c, \vec{W}''_{\vec{t}})$ kompatibel und $\bigotimes(c, \vec{W}''_{\vec{t}})$ ε-homogen ist.

Für den Beweis des ersten größeren Schritts auf dem Weg zu Satz 2.3 benötigen wir außerdem noch ein Lemma. Dieses beweisen wir wohlgemerkt mit Hilfe der Induktions-Voraussetzung für Satz 2.3.

2.6 Lemma. *Seien $c \in C_{\max}(V_0)$ und $\vec{W} \preceq \vec{W}_0$ streng dicht in $\vec{T}$ so, dass $(c, \vec{W})$ kompatibel ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

(a) Es existiert ein $c' \preceq c$ und ein $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ streng dicht in $\vec{T}$, so dass $(c', \vec{W}')$ kompatibel und $\bigotimes(c', \vec{W}')$ 1-homogen ist.

(b) Es existiert ein $c' \preceq c$, ein $\vec{t} \in \vec{T}$, sowie ein streng $\vec{t}$-dichtes $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ in $\vec{T}$, so dass $(c', \vec{W}')$ kompatibel und $\bigotimes(c', \vec{W}')$ 2-homogen ist.

Beweis. Sei $L(\vec{W}) = \{l_k\}_{k \in \omega}$ die Levelmenge von $\vec{W}$. Dann schreiben wir $c = \{s_k\}_{k \in \omega}$, wobei $s_k \in V_0$ und $|s_k| = l_k$ für alle $k \in \omega$ ist. Nun betrachten wir die Partition $\bigotimes \vec{W} = \widetilde{C}_1 \dot{\cup} \widetilde{C}_2$, wobei

$$\widetilde{C}_1 = \{\vec{t} \in \bigotimes \vec{W} : |\vec{t}| = l_k \text{ für ein } k \in \omega \text{ und } (s_k, \vec{t}) \in C_1\}$$

und

$$\widetilde{C}_2 = \{\vec{t} \in \bigotimes \vec{W} : |\vec{t}| = l_k \text{ für ein } k \in \omega \text{ und } (s_k, \vec{t}) \in C_2\}.$$

Unter der Annahme, dass Satz 2.3 für d gilt, existiert dann entweder ein streng dichtes $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ in $\vec{T}$, so dass $\bigotimes \vec{W}' \subseteq \widetilde{C}_1$ ist, oder es existiert ein $\vec{t} \in \vec{T}$ und ein streng $\vec{t}$-dichtes $\vec{W}' \preceq \vec{W}$ in $\vec{T}$, so dass $\bigotimes \vec{W}' \subseteq \widetilde{C}_2$ ist. Dann ist für $c' := c{\restriction}_{L(\vec{W}')}$ das Produkt $\bigotimes(c', \vec{W}')$ entweder Teilmenge von C_1 oder von C_2. $\square$

2.7 Proposition ([1]). *Für jedes* $(V, \vec{W}) \preceq (V_0, \vec{W}_0)$*, wobei* $(V, \vec{W})$ *eine streng dichte Teilmenge von* $(S, \vec{T})$ *ist, gilt eine der beiden Aussagen:*

(a) $Q(1, \vec{0}, (V, \vec{W}))$ *gilt.*

(b) Es gibt ein $(s, \vec{t}) \in (S, \vec{T})$ *und ein* $(V', \vec{W}') \preceq (V, \vec{W})$ *streng dicht in* $(S, \vec{T})$*, so dass* $Q(2, (s, \vec{t}), (V', \vec{W}'))$ *gilt.*

Beweis (durch Widerspruch). Wir wollen annehmen, dass weder (a) noch (b) gilt.

Zunächst fixieren wir eine Aufzählung $(\vec{t}_n)_{n\in\omega}$ der Elemente von $\vec{T}$. Dann wählen wir ein $s_0 \in V$ mit $|s_0| > |\vec{t}_0|$ und eine in $\vec{T}$ streng dichte Menge $\vec{W}^0 \preceq \vec{W}$, welche die Ungültigkeit von $Q(1, \vec{0}, (V, \vec{W}))$ bezeugen (haben wir ein Gegenbeispiel s_0' gefunden, so ist $|s_0| > |\vec{t}_0|$ leicht zu erfüllen, da jeder Nachfolger von s_0' in V ebenfalls ein Gegenbeispiel ist).

Wir werden nun das Folgende beweisen: Da nach unserer Annahme auch (b) nicht gilt, können induktiv zwei Folgen $(s_n')_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Knoten in S, eine Folge $(\vec{W}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\vec{W}^n \prec \vec{T}$ für jedes n und eine streng monoton steigende Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus natürlichen Zahlen konstruiert werden, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) s_n' und s_n liegen in V_{s_0} und es ist $s_n \in V(m_n)$ und

$$s_0 \prec s_1' \prec s_1 \prec \ldots \prec s_n' \prec s_n;$$

(ii) $\vec{W}^n$ ist streng dicht in $\vec{T}$, die Menge $\vec{W}^n(m_n)$ dominiert $\vec{T}(n)$ und es ist $\vec{W}^0 \succeq \vec{W}^1 \succeq \ldots \succeq \vec{W}^n$;

(iii) Sei $V^n := V\restriction_{L(\vec{W}^n)}$ und seien $c \in C_{\max}(V^n_{s_n'})$ und $\vec{W}' \preceq \vec{W}^n$ streng dicht in $\vec{T}$, so dass $(c, \vec{W}'_{\vec{t}_n})$ kompatibel ist. Dann ist $\bigotimes(c, \vec{W}'_{\vec{t}_n})$ nicht 2-homogen;

(iv) Es ist $m_n > |\vec{t}_n|$.

Der Induktionsanfang ist, wie man sich leicht an den Bedingungen überlegen kann, analog zum Induktionsschritt. Denn überall, wo wir bei der Konstruktion für $n+1$ auf den Fall n zurückgreifen, haben wir die entsprechenden Objekte für $n = 0$ (s_0, $\vec{W}^0$, V^0, wobei wir $V^0 := V\restriction_{L(\vec{W}^0)}$ setzen) bereits festgelegt.

Der Induktionsschritt wird nun wie folgt geführt: Angenommen, $(s_k')_{k=1}^n$, $(s_k)_{k=1}^n$, $(\vec{W}^k)_{k=1}^n$ und $(m_k)_{k=1}^n$ wurden definiert, so dass (i)-(iv) gilt. Da (b) nicht gilt, können wir ein $s_{n+1}' \in V^n_{s_n}$ und ein in $\vec{T}$ streng dichtes $\vec{W}^{n+1} \preceq \vec{W}^n$ so wählen, dass sie die Ungültigkeit von $Q(2, (s_n, \vec{t}_{n+1}), (V^n, \vec{W}^n))$ bezeugen. Die Bedingung (iii) bleibt dabei gültig, wenn man n durch $n+1$ ersetzt, da $V^{n+1} \subseteq V^n$ ist. Da $\vec{W}^{n+1}$ streng dicht in $\vec{T}$ ist, können wir ein ausreichend großes $m_{n+1} \in L(\vec{W}^{n+1})$ wählen, das heißt so, dass $m_{n+1} > \max\{|s'_{n+1}|, |\vec{t}_{n+1}|\}$ ist und außerdem $\vec{T}(n+1)$ von $\vec{W}^{n+1}(m_{n+1})$ dominiert wird. Damit sind die Bedingungen (ii) und (iv) erfüllt.

Wir wählen nun noch ein (beliebiges) $s_{n+1} \in V_{s'_{n+1}}(m_{n+1})$. Damit ist der Induktionsschritt ausgeführt.

Nun setzen wir $\vec{W}_\infty := \bigcup_{n\in\omega} \vec{W}^n(m_n)$ und $c_\infty := \{s_n\}_{n\in\omega}$. Aus den Bedingungen (i) und (ii) erhalten wir, dass $\vec{W}_\infty \preceq \vec{W}^0$, $\vec{W}_\infty$ streng dicht in $\vec{T}$, $c_\infty \in C_{\max}(V_{s_0})$ und $(c_\infty, \vec{W}_\infty)$ kompatibel ist. Durch die Wahl von s_0 und $\vec{W}^0$ folgt damit, dass für alle $c \preceq c_\infty$, $\vec{W}' \preceq \vec{W}_\infty$, so dass $\vec{W}'$ streng dicht in $\vec{T}$ und $(c, \vec{W}')$ kompatibel ist, $\bigotimes(c, \vec{W}')$ nicht 1-homogen ist.

Darum gibt es nach Lemma 2.6 ein $c \preceq c_\infty$, ein $\vec{t} \in \vec{T}$ und ein streng $\vec{t}$-dichtes $\vec{W}' \preceq \vec{W}_\infty$ in $\vec{T}$, so dass $(c, \vec{W}')$ kompatibel und $\bigotimes(c, \vec{W}')$ 2-homogen ist. Außerdem gibt es ein $n \in \omega$ mit $\vec{t} = \vec{t}_n$ (nach Definition der $\vec{t}_n$).

Sei $L := \{m_n, m_{n+1}, \ldots\}$, $c' := c\restriction_L$ und $\vec{W}^{(1)} := \vec{W}'\restriction_L$. Dann gilt nach (i), dass $c' \in C_{\max}(V^n_{s'_n})$ ist, und es ist $\vec{W}^{(1)} \preceq \vec{W}^n$ streng $\vec{t}_n$-dicht in $\vec{T}$.

$\vec{W}^{(1)}$ kann nun (wie man sich leicht überlegt) zu $\vec{W}^{(2)} \preceq \vec{W}_\infty$ erweitert werden, wobei $\vec{W}^{(2)}$ streng dicht in $\vec{T}$, $L(\vec{W}^{(2)}) = L(\vec{W}^{(1)})$ und $\vec{W}^{(2)}_{\vec{t}_n} = \vec{W}^{(1)}_{\vec{t}_n}$ ist. Dies ist möglich, (unter anderem) da $\vec{W}_\infty$ streng dicht in $\vec{T}$ ist. Außerdem ist dann auch $\vec{W}^{(2)} \preceq \vec{W}^n$. Wir stellen jetzt noch fest, dass dann $(c', \vec{W}^{(2)})$ kompatibel ist und außerdem $\bigotimes(c', \vec{W}^{(2)}_{\vec{t}_n}) = \bigotimes(c', \vec{W}^{(1)}_{\vec{t}_n})$ 2-homogen ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu (iii) aus der induktiven Konstruktion. Darum ist es nicht möglich, dass weder (a) noch (b) gilt. □

Nun kommen wir zum zweiten Schritt, in welchem wir zeigen wollen, dass wir die Aussage in Satz 2.3 aus der Aussage in Proposition 2.7 gewinnen können.

2.8 Proposition ([1]). *Sei $(s, \vec{t}) \in (S, \vec{T})$, $(V, \vec{W}) \preceq (V_0, \vec{W}_0)$ streng dichte Teilmenge von $(S, \vec{T})$ und $\varepsilon \in \{1, 2\}$ derart, dass $Q(\varepsilon, (s, \vec{t}), (V, \vec{W}))$ gilt.*

Dann existiert ein $(V', \vec{W}') \preceq (V, \vec{W})$, $(V', \vec{W}')$ streng $(s, \vec{t})$-dicht in $(S, \vec{T})$, so dass $\bigotimes(V', \vec{W}')$ ε-homogen ist.

Falls $Q(\varepsilon, \vec{0}, (V, \vec{W}))$ gilt, so existiert ein entsprechendes $(V', \vec{W}')$, das in $\vec{T}$ streng dicht ist.

Beweis. Gelte also $Q(\varepsilon, (s, \vec{t}), (V, \vec{W}))$ für ε, $(s, \vec{t})$, $(V, \vec{W})$ wie in der Proposition beschrieben.

Wir werden induktiv und simultan die folgenden Folgen konstruieren: eine streng monoton steigende Folge $(m_n)_{n\in\omega}$ von positiven ganzen Zahlen, eine Folge $(V_n)_{n\in\omega}$ von Teilmengen von V und eine Folge $(\vec{W}_n)_{n\in\omega}$ von Teilmengen von $\vec{W}$, so dass für alle $n \in \omega$ gilt:

(i) V_n dominiert $S_s(|(s, \vec{t})| + n)$ und $V_n \subseteq V_s(m_n)$;

(ii) $\vec{W}_n$ dominiert $\vec{T}_{\vec{t}}(|(s,\vec{t})|+n)$ und $\vec{W}_n \preceq \vec{W}_{\vec{t}}(m_n)$;

(Die Elemente von V_n und $\vec{W}_n$ haben also alle die gleiche Höhe)

(iii) Das Levelprodukt $\prod(V_n, \vec{W}_n)$ ist ε-homogen.

Nachdem die obige Konstruktion ausgeführt wurde, setzen wir

$$V' := \bigcup_{n\in\omega} V_n \text{ und } \vec{W}' := \bigcup_{n\in\omega} \vec{W}_n.$$

Dann ist nach (i), (ii) und Lemma 1.14 klar, dass $(V',\vec{W}') \preceq (V,\vec{W})$ gilt und $(V',\vec{W}')$ streng $(s,\vec{t})$-dicht in $(S,\vec{T})$ ist. Außerdem ist dann $\bigotimes(V',\vec{W}') = \bigcup_{n\in\omega}\prod(V_n,\vec{W}_n)$, womit wegen (iii) $\bigotimes(V',\vec{W}')$ ε-homogen ist.

Nun müssen wir noch zeigen, dass diese Objekte auch tatsächlich konstruiert werden können. Der Induktionsanfang wird leicht durch $Q(\varepsilon,(s,\vec{t}),(V,\vec{W}))$ geleistet, der Induktionsschritt kann nun wie folgt geführt werden:

Seien $(m_i)_{i=0}^n$, $(V_i)_{i=0}^n$ und $(\vec{W}_i)_{i=0}^n$ konstruiert, so dass (i)-(iii) gelten. Da V streng dicht in S ist, gibt es ein $m \in L(V)$, so dass $V(m)$ die Menge $S(|(s,\vec{t})|+n+1)$ dominiert. Es gilt dabei sogar, dass $V_s(m)$ nicht leer ist und $S_s(|(s,\vec{t})|+n+1)$ dominiert. Sei $V_s(m) = \{s_k\}_{k=1}^r$. Da $Q(\varepsilon,(s,\vec{t}),(V,\vec{W}))$ gilt, können induktiv die folgenden endlichen Folgen konstruiert werden:

(i') Eine endliche Folge $(c_k)_{k=1}^r$ von Ketten, so dass $c_k \in C_{\max}(V_{s_k})$ für $1 \le k \le r$ ist.

(ii') Eine absteigende endliche Folge $(\vec{W}^k)_{k=1}^r$ von in $\vec{T}$ streng dichten Teilmengen, so dass $\vec{W} \succeq \vec{W}^1 \succeq \ldots \succeq \vec{W}^r$ mit folgender Eigenschaft gilt: $(c_k, \vec{W}^k_{\vec{t}})$ ist kompatibel und $\bigotimes(c_k,\vec{W}^k_{\vec{t}})$ ist ε-homogen für alle $1 \le k \le r$.

Dabei ist zu bemerken, dass für $c'_k := c_k \restriction_{L(\vec{W}^r_{\vec{t}})}$ das Produkt $\bigotimes(c'_k, \vec{W}^r_{\vec{t}})$ für jedes k mit $1 \le k \le r$ ε-homogen ist .

Wir wählen nun $m_{n+1} \in L(\vec{W}^r)$ derart, dass $m_{n+1} > \max\{m_n, m\}$ ist und $\vec{T}(|(s,\vec{t})|+n+1)$ von $\vec{W}^r(m_{n+1})$ dominiert wird. Damit wird auch $\vec{T}_{\vec{t}}(|(s,\vec{t})|+n+1)$ von $\vec{W}^r_{\vec{t}}(m_{n+1})$ dominiert. Setzen wir nun

$$V_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{r} c'_k(m_{n+1}) \text{ und } \vec{W}_{n+1} := \vec{W}^r_{\vec{t}}(m_{n+1}),$$

so dominiert V_{n+1} die Menge $V_s(m)$ und damit auch $S_s(|(s,\vec{t})|+n+1)$. Außerdem ist $\prod(V_{n+1},\vec{W}_{n+1}) \subseteq \bigotimes(\bigcup_{k=1}^r c'_k, \vec{W}^r_{\vec{t}})$, weshalb es nach den vorhergehenden Ausführungen ε-homogen ist. Damit der Beweis schon fast bewältigt.

Der Fall, dass $Q(\varepsilon,\vec{0},(V,\vec{W}))$ gilt, kann nahezu analog behandelt werden, die Unterschiede liegen allein in der Notation. Wir konstruieren dazu (wie oben)

Folgen $(m_n)_{n\in\omega}$, $(V_n)_{n\in\omega}$ und $(\vec{W}_n)_{n\in\omega}$, so dass (m_n) streng monoton steigend ist, $V_n \subseteq V(m_n)$, $\vec{W}_n \preceq \vec{W}(m_n)$, V_n die Menge $S(n)$ dominiert, $\vec{W}_n$ die Menge $\vec{T}(n)$ dominiert und $\prod(V_n, \vec{W}_n)$ ε-homogen ist. Dann setzen wir $V' := \bigcup_{n\in\omega} V_n$ und $\vec{W}' := \bigcup_{n\in\omega} \vec{W}_n$, und es wird auf die gleiche Weise wie eben klar, dass $(V', \vec{W}')$ streng dicht in $(S, \vec{T})$ und $\bigotimes(V', \vec{W}')$ ε-homogen ist. □

Damit ist dann auch der Induktionsschritt zu $d+1$ geschafft und Satz 2.3 bewiesen.

2.2 Bemerkungen

Nachdem wir Satz 2.2 nun vollständig bewiesen haben, wollen wir ein wenig auf seine Struktur und Erweiterbarkeit zu sprechen kommen. Als erstes drängt sich die Frage auf, weshalb er eine Asymmetrie in Bezug auf die Farben aufweist. Und in der Tat könnte man denken, 2.2 hätte auch wie folgt formuliert werden können:

2.9 Korollar. *Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ streng dicht in $\vec{T}$. Dann gilt für jede endliche Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$:*

Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, p\}$, ein $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ und ein $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, welches streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$ ist, so dass $\bigotimes \vec{W}'$ j-homogen ist.

Dies ist offenbar ein Korollar von Satz 2.2. Allerdings gehen auf diese Weise Informationen verloren. Um dies einzusehen, wollen wir eine weitere Folgerung von 2.2 betrachten. Etwas lax formuliert sagt diese aus: Gilt (a) im Satz von Halpern und Läuchli für *keine* der Farben, so gibt es (mindestens) *zwei* Farben, für die (b) gilt.

2.10 Korollar. *Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ streng dicht in $\vec{T}$. Dann gilt für jede endliche Partition $\bigotimes \vec{W} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ eine der folgenden Aussagen:*

(a) Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, p\}$ und ein kompatibles $\vec{W}' \preceq \vec{W}$, so dass $\vec{W}'$ streng dicht in $\vec{T}$ und $\bigotimes \vec{W}'$ j-homogen ist.

(b) Es gibt zwei Zahlen $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, p\}$, für die es jeweils ein $\vec{t}_k = (t_1^k, \ldots, t_d^k)$ (für $k = 1, 2$) und ein $\vec{W}'_k \preceq \vec{W}$ gibt, wobei $\vec{W}'_k$ streng $\vec{t}_k$-dicht in $\vec{T}$ ist und $\bigotimes \vec{W}'_k$ j_k-homogen ist.

Beweis. Seien $\vec{T}$, $\vec{W}$ und $C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ wie beschrieben und sei (a) nicht erfüllt. Dann finden wir ein j_1, für das (b) aus 2.2 gilt. Nun definieren wir $C'_1 := C_{j_1}$ und $C'_{j_1} := C_1$ und wenden Satz 2.2 auf die Färbung

$$\bigotimes \vec{W} = C'_1 \dot\cup C_2 \dot\cup \ldots \dot\cup C_{j_1-1} \dot\cup C'_{j_1} \dot\cup C_{j_1+1} \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$$

an. Da (a) aus 2.2 auch für C_1' nicht erfüllt ist, finden wir ein j_2 (mit $C_{j_1} \neq C_{j_2}$ nach Konstruktion) mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Wir sehen insbesondere an diesem Beweis, dass wir in Satz 2.2 unter bestimmten Umständen Informationen über zwei verschiedene Farben bekommen. Dies gelingt bei Korollar 2.9 nicht.

2.3 Eine metrische Anwendung

Bevor wir uns weiteren Sätzen der unendlichen Kombinatorik widmen, wollen wir eine Umformulierung von Satz 2.2 für metrische Räume betrachten.

Zunächst ist dafür etwas Notation zu klären.

2.11 Definition. Sei (X, ρ) ein metrischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt ***ε-dicht*** für ein $\varepsilon > 0$, falls $\rho(x, F) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ ist.

(ii) (X, ρ) ist ***präkompakt*** (oder total beschränkt), falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche ε-dichte Teilmenge F_ε von X gibt.

2.12 Satz ([1]). *Sei $\{(X_i, \rho_i) : i = 1, \ldots, d\}$ eine endliche Familie von präkompakten metrischen Räumen. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i = 1, \ldots, d$ ein $\frac{1}{n}$-dichtes $F_{n,i} \subseteq X_i$ gegeben. Dann gilt für jede Partition*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} F_{n,i} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$$

die folgende Aussage:

Es existiert eine streng monoton steigende Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, nichtleere Mengen $B_{n_k,i} \subseteq F_{n_k,i}$ und ein $j \in \{1, \ldots, p\}$, so dass

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{d} B_{n_k,i} \quad j\text{-homogen ist.}$$

Es gilt sogar:

(a) Falls $j = 1$ ist, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, d$ die Menge $B_{n_k,i}$ $\frac{1}{k}$-dicht in X_i.

(b) Falls $j > 1$ ist, dann gibt es für jedes $i = 1, \ldots, d$ eine nichtleere offene Umgebung V_i in X_i, so dass $B_{n_k,i}$ $\frac{1}{k}$-dicht in V_i ist.

Zum Beweis benötigen wir zwei Hilfssätze, welche aber nicht schwer zu zeigen sind.

Vorweg wollen wir noch eine Schreibkonvention einführen, welche wir auch in Kapitel 4 wieder brauchen werden.

2.13 Definition. Sei $T = (T, \prec)$ Baum, $t \in T$. Wir definieren dann

$$\mathrm{IS}(t, T) := \{s \in T : t \prec s \text{ und } |s| = \min(|s_0| : s_0 \in \{q \in T : t \prec q\})\},$$

d.h. $\mathrm{IS}(t, T)$ ist die Menge der direkten Nachfolger von t in T.

2.14 Lemma. *Sei (X, ρ) ein präkompakter metrischer Raum. Dann gibt es einen Baum T und eine Familie $\{G_t\}_{t \in T}$ nichtleerer offener Teilmengen von X, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(a) Ist t_0 die Wurzel von T, so ist $G_{t_0} = X$.

(b) Für $t \in T$ mit $|t| \geq 1$ ist $diam(G_t) < \frac{1}{|t|}$.

(c) Für $s, t \in T$ mit $t \prec s$ ist $G_t \supseteq G_s$.

(d) Es ist $G_t = \bigcup_{s \in \mathrm{IS}(t,T)} G_s$ für alle $t \in T$.

Beweis. Induktion über die Höhe der Knoten in T. Der Induktionsanfang wird dabei von (a) geliefert, weitere Bedingungen an G_{t_0} gibt es nicht.

Seien nun T und die entsprechenden G_t bis zur Höhe n konstruiert und sei $t_i \in T(n)$. Da X präkompakt ist, gibt es eine endliche $\frac{1}{2n+4}$-dichte Menge $F_{t_i} \subseteq G_{t_i}$, etwa mit $F_{t_i} = \{x_j\}_{j=1}^m$. Darum gibt es dann auch eine endliche offene Überdeckung $\{U_j^{t_i}\}_{j=1}^m$ von G_{t_i}, wobei alle $U_j^{t_i} \subseteq G_{t_i}$ sind und so, dass $diam(U_j^{t_i}) < \frac{1}{n+1}$ ist (man könnte hierfür beispielsweise $U_j^{t_i} := B_{\frac{1}{2n+4}}(x_j) \cap G_{t_i}$ definieren).

Versehen wir nun t_i mit m direkten Nachfolgern und ordnen jedem dieser neuen Knoten genau ein $U_j^{t_i}$ zu, so werden alle Bedingungen erfüllt. □

2.15 Lemma. *Sei $\{(X_i, \rho_i)\}_{i=1}^d$ eine endliche Familie von präkompakten metrischen Räumen und $\{G_t\}_{t \in T_i}$ die entsprechenden Familien offener Mengen, welche Lemma 2.14 liefert. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, d$ seien $F_{n,i}$ $\frac{1}{n}$-dichte Teilmengen von X_i.*

Dann gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ Familien $\{x_t\}_{t \in T_i}$ und eine streng monoton steigende Folge positiver natürlicher Zahlen $(m_k)_{k \in \omega}$, so dass gilt:

(a) Für alle $t \in T_i$ ist $x_t \in G_t$.

(b) Für alle $k \in \omega$ ist $\{x_t : t \in T_i, |t| = k\} \subseteq F_{m_k,i}$.

Beweis. Wir wählen zu jedem $i = 1, \ldots, d$ und jedem $t \in T_i$ ein $y_t \in G_t$ und ein $\delta_t > 0$, so dass der Ball $B_{\delta_t}(y_t)$ ganz in G_t liegt. Als nächstes wählen wir für jedes $k \in \omega$ den Radius $\delta_k = \min\{\delta_t : t \in T_i, |t| = k, i = 1, \ldots, d\}$. Abschließend suchen wir uns eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(m_k)_{k\in\omega}$, so dass $\frac{1}{m_k} < \delta_k$ für alle $k \in \omega$ ist.

Wir bemerken hierbei, dass für jedes $t \in T_i$ mit $|t| = k$ die Menge $F_{m_k,i} \cap B_{\delta_t}(y_t) \neq \varnothing$ ist. Damit ist auch $F_{m_k,i} \cap G_t$ nicht leer. Wir wählen also x_t als ein beliebiges Element aus $F_{m_k,i} \cap G_t$. Damit haben $\{\{x_t\}_{t\in T_i}\}_{i=1}^d$ und $(m_k)_{k\in\omega}$ die geforderten Eigenschaften. □

Beweis von Satz 2.12. Die beiden vorhergehenden Lemmata liefern uns für jedes (X_i, ρ_i) einen Baum T_i, eine Familie $\{G_t\}_{t\in T_i}$ und eine Familie $\{x_t\}_{t\in T_i}$, jeweils mit den beschriebenen Eigenschaften. Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$. Wir bemerken, dass die Partition $\bigcup_{n=1}^\infty \prod_{i=1}^d F_{n,i} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$ eine Partition von $\bigotimes \vec{T}$ induziert, welche wie folgt lautet: Es ist $\bigotimes \vec{T} = C_1' \cup \ldots \cup C_p'$, wobei für jedes $j \in \{1, \ldots, p\}$ gilt:

$$C_j' = \{\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) : \vec{t} \in \bigotimes \vec{T} \text{ und } (x_{t_1}, \ldots, x_{t_d}) \in C_j\}.$$

Nach Satz 2.2 gibt es entweder eine streng dichte Menge $\vec{W}$ in $\vec{T}$, so dass $\bigotimes \vec{W}$ 1-homogen ist, oder es gibt ein $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d)$ und eine streng $\vec{t}$-dichte Menge $\vec{W}$ in $\vec{T}$, so dass $\bigotimes \vec{W}$ j-homogen ist für ein $j \in \{2, \ldots, p\}$.

Sei $\vec{W} = (W_1, \ldots, W_d)$ und $L(\vec{W}) = \{l_k\}_{k\in\omega}$. Sei außerdem $(m_k)_{k\in\omega}$ die Folge aus Lemma 2.15. Falls wir 1-Homogenität erhalten, wollen wir für jedes $i = 1, \ldots, d$ und jedes $k \in \omega$ schreiben: $n_k := m_{l_k}$ und $B_{n_k,i} := \{x_t : t \in W_i(l_k)\}$. Die Eigenschaften von $\{G_t\}_{t\in T_i}$ und $\{x_t\}_{t\in T_i}$, sowie die Tatsache, dass $\vec{W}$ streng dicht in $\vec{T}$ ist, liefern uns nun, dass $B_{n_k,i}$ $\frac{1}{k}$-dicht in X_i ist, dass $B_{n_k,i} \subseteq F_{n_k,i}$ für alle $i = 1, \ldots, d$ ist, und da $\bigotimes \vec{W} \subseteq C_1'$ ist, gilt auch noch, dass $\bigcup_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^d B_{n_k,i}$ 1-homogen ist. Somit ist der Satz für diesen Fall gezeigt.

Ist $\vec{W}$ streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$ (für ein $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \vec{T}$) und $\bigotimes \vec{W}$ j-homogen (für ein $j > 2$), so setzen wir

$$n_k := m_{l_k},\ B_{n_k,i} := \{x_t : t \in W_i(l_k), t \succ t_i\} \text{ und } V_i := G_{t_i}.$$

Die Eigenschaften von $\{G_t\}_{t\in T_i}$ und $\{x_t\}_{t\in T_i}$ liefern uns dann, dass $B_{n_k,i} \subseteq F_{n_k,i}$ für alle $i = 1, \ldots, d$ ist, dass $B_{n_k,i}$ $\frac{1}{k}$-dicht in V_i ist, und dass außerdem $\bigcup_{k=1}^\infty \prod_{i=1}^d B_{n_k,i}$ j-homogen ist. Damit ist der Satz bewiesen. □

Kapitel 3

Satz von Laver

In den folgenden zwei Kapiteln geht es um Möglichkeiten, den Satz von Halpern und Läuchli zu verallgemeinern. Zunächst fragen wir uns, welche der Voraussetzungen abgeändert werden können, so dass eine möglichst starke Aussage mit Hilfe von Satz 2.2 bewiesen werden kann.

In diesem Kapitel soll uns die Frage beschäftigen, ob (und natürlich auch wie) wir ein Ergebnis in der Art von Satz 2.2 finden, wenn wir von den endlichen Baumtupeln zu unendlichen Baumfolgen übergehen.

3.1 Mehr Definitionen und eine Umformulierung

Als erstes wollen wir die Struktur von streng dichten Mengen etwas detaillierter betrachten. Wir untersuchen hierzu die nichtleeren Level einer streng dichten Menge separat.

3.1 Definition. Ein Tupel $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ $(d \in \mathbb{N})$ von Mengen heißt ***n-dicht*** in einem Baumtupel $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$, falls es ein $m \geq n$ gibt, so dass $\vec{X} \subseteq \vec{T}(m)$ ist und (für $1 \leq i \leq d$) zu jedem $t \in T_i(n)$ ein Nachfolger x in X_i existiert.

Wie man leicht sieht, ist jede in $\vec{T}$ streng dichte Menge aus einer Familie $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots\}$ aufgebaut, wobei $\vec{X}_n$ n-dicht in $\vec{T}$ ist.

Umgekehrt finden wir in jeder Familie $\{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots\}$ von Mengen, in der $\vec{X}_n$ n-dicht in $\vec{T}$ ist, eine unendliche Teilfamilie, deren Vereinigung streng dicht in $\vec{T}$ ist.

3.2 Definition. Sei $\vec{T}$ ein Baumtupel. Für $\vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$ ist ein ***$\vec{t}$-n-dichtes Tupel*** ein n-dichtes Tupel in $\vec{T}_{\vec{t}}$.

Nun formulieren wir den Satz von Halpern und Läuchli so, dass er von n-dichten Mengen spricht. In dieser Form ist er in diesem Kapitel leichter anwendbar.

3.3 Satz. *Sei $d \in \mathbb{N}$, $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Baumtupel und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot{\cup} C_2$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein n-dichtes $\vec{X}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Für ein $\vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\vec{t}$-n-dichtes $\vec{X}$ mit $\bigotimes \vec{X} \subseteq C_2$.

Beweis. Offenbar sind die Voraussetzungen zu Satz 2.2 (dem Satz von Halpern-Läuchli) erfüllt. Mit den vorhergehenden Betrachtungen sind dann auch die Aussagen dieses Satzes unter Verwendung von Satz 2.2 klar. □

Wenn wir nun zu einem vergleichbaren Satz für ***Baumfolgen*** $\vec{T} = (T_1, T_2, \ldots)$ kommen wollen, wollen wir von den T_i zusätzlich fordern, dass sie „nicht zu kahl“ sind. Was damit gemeint ist, wird in der nächsten Definition beschrieben.

3.4 Definition. Ein Baum T heißt ***perfekt***, falls wir für jedes $t \in T$ zwei Nachfolger in verschiedenen Ästen finden, wenn also gilt:

Für alle $t \in T$ ist $\{(u, v) \in T \times T : t \prec u, t \prec v \text{ und } u \not\preceq v, u \not\succ v\} \neq \varnothing$.

Wir wollen außerdem ein Baumtupel $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ perfekt nennen, falls alle T_i perfekt sind. Analoges gilt für Baumfolgen.

Diese Eigenschaft wollen wir auch in der einfarbigen Menge erhalten, die wir zu finden hoffen. Um dies mit einer überschaubaren Notation tun zu können, wollen wir Teilmengen von Bäumen genauer als bisher unterscheiden:

3.5 Definition. Sei T ein Baum. Eine nichtleere Teilmenge T' von T heißt ***Teilbaum*** von T, falls gilt: für jedes $t \in T'$ ist $\{s \in T : s \prec t\}$ eine Teilmenge von T'. Ein Teilbaum ist also die Vereinigung von Anfangsstücken von Ästen aus T.

Teilbäume können nach dieser Definition Blätter haben und sind darum nicht unbedingt Bäume, wie sie in Kapitel 1 definiert wurden. Allerdings sind perfekte Teilbäume (um die es uns gehen wird) sicherlich Bäume im Sinne von Definition 1.3, wie man sich leicht überlegen kann.

Nun bleiben noch zwei vorbereitende Definitionen zu formulieren, bevor wir uns dem entscheidenden Satz dieses Kapitels widmen können:

3.6 Definition. Sei M eine Menge und κ eine Kardinalzahl. Dann bezeichnen wir mit $[\boldsymbol{M}]^{\boldsymbol{\kappa}}$ die Menge der Teilmengen von M, welche Mächtigkeit κ haben.

3.7 Definition. Für eine Baumfolge $\vec{T} = (T_1, T_2, \ldots)$ sei analog zu Baumtupeln

$$\bigotimes \vec{T} := \bigcup_{n \in \omega} \prod_{i \in \mathbb{N}} T_i(n)$$

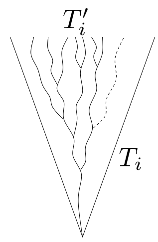
das ***Baumprodukt*** von $\vec{T}$.

3.2 Der Satz von Laver

Nun können wir den Satz formulieren, um den es in diesem Kapitel hauptsächlich gehen soll. Dabei wird auch klar werden, inwiefern die vorangegangenen Definitionen hilfreich sind.

3.8 Satz (Laver [6]). *Sei $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots)$ eine Folge perfekter Bäume und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot{\cup} C_2$. Dann gibt es ein $j \in \{1, 2\}$, ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ und perfekte Teilbäume T_i' von T_i $(i \in \mathbb{N})$, so dass $\bigotimes^A \vec{T}' \subseteq C_j$ ist.*

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir ein paar Beobachtungen festhalten.



Es sei zunächst bemerkt, dass dies keine genaue Übertragung des Satzes 3.3 auf Baumfolgen ist. Es wird so etwa nicht erreicht, dass die einfarbigen Mengen dicht in $\vec{T}$ sind (im nebenstehenden Bild ist der gestrichelte Teilast nicht in T_i' enthalten, weshalb jeder Knoten darauf keine Nachfolger in T_i' hat). Die Aussage, die man durch Ersetzen von Baumtupeln durch Baumfolgen in Satz 3.3 erhält, wird von Laver in [6] als Vermutung formuliert.

Es fällt außerdem auf, dass wir nur mit 2 Farben färben. Dies geschieht allerdings nur, um den Beweis übersichtlicher zu gestalten. Wir können ohne Mühe, wie schon beim Satz von Halpern und Läuchli, die 2-Färbung durch eine p-Färbung für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ ersetzen.

Der Beweis von Satz 3.8 wird aus mehreren Schritten bestehen, wovon lediglich der erste (Lemma 3.10) Gebrauch von Satz 3.3 macht.

Lemma 3.13 nennt eine Eigenschaft, die uns auf abzählbar vielen Leveln einfarbige, perfekte Teilbäume liefert. Die Lemmata 3.16 und 3.17 haben dann die Form: Finden wir keine perfekten und auf abzählbar vielen Leveln 1-homogenen Teilbäume, so bekommen wir eine Eigenschaft, die uns weiter in die Richtung der Aussage aus Satz 3.8 bringt.

Doch zunächst wollen wir noch eine abkürzende Schreibweise einführen:

3.9 Definition. Falls $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$ ist, so sei

$$\mathscr{A}(\vec{X}) := \{(B_1, \dots, B_d) : \text{für jedes } i \text{ gilt } B_i \subseteq X_i \text{ und } |B_i| = 2\}.$$

Mit dieser Definition können wir nun das erste Lemma des Kapitels formulieren:

3.10 Lemma. *Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\vec{T} = (T_1, \dots, T_d)$ ein perfektes Baumtupel. Sei außerdem $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein ausreichend großes $p = p(m, \vec{T}) \in \mathbb{N}$, so dass gilt: für jedes $C \subseteq \prod \vec{T}(p)$ mit $C \cap \prod \vec{B} \neq \varnothing$ für alle $\vec{B} \in \mathscr{A}(\vec{T}(p))$ gibt es ein m-dichtes $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)$, $Y_i \subseteq T_i(p)$, mit $\prod \vec{Y} \subseteq C$.*

Beweis. Die Aussage ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.3.

Falls für ein m und jedes p ein Gegenbeispiel $C_{p,m}$ existieren würde, dann wäre $\bigcup_p C_{p,m}$ eine Teilmenge von $\bigotimes \vec{T}$, die kein Produkt eines m-dichten Tupels in $\vec{T}$ enthält. Nach Satz 3.3 gibt es dann ein $\vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$ und, für unendlich viele q, $\vec{t}$-q-dichte Tupel $\vec{X}_{p_q} \subseteq \vec{T}(p_q)$ mit $\prod \vec{X}_{p_q} \cap C_{p_q,m} = \varnothing$. Wir wählen ein $q \in \mathbb{N}$ aus, so dass jedes t_i eine Spaltknoten s_i als Nachfolger hat, wobei $|s_i| \in (|t_i|, q-1]$ ist.

Jedes Element von $\vec{X}_{p_q}$ enthält dann mindestens zwei Elemente. Somit gilt $C_{p_q,m} \cap \prod \vec{B} = \varnothing$ für mindestens ein $\vec{B} \in \mathscr{A}(\vec{T}(p_q))$, im Widerspruch zur Definition von $C_{p_q,m}$. □

Die Aussage in Lemma 3.10 macht möglicherweise den Eindruck, schwächer zu sein als Satz 3.3. Wie aber schon ansatzweise im Beweis von 3.10 zu sehen ist, wird nahezu die gesamte Stärke des Satzes gebraucht. Es kann lediglich (b) in Satz 3.3 insofern abgeschwächt werden, dass man nicht für jedes, sondern nur für ein n (in bestimmten Schranken) die Existenz eines $\vec{X}$ benötigt, welches auch nicht $\vec{x}$-n-dicht sein, sondern nur in $\mathscr{A}(\vec{T}(n))$ liegen muss. Diese Abschwächungen scheinen aber nicht ausreichend, um auf einen deutlich kürzeren Beweis als den von Satz 3.3 (beziehungsweise 2.2) zu hoffen.

Für den weiteren Verlauf des Kapitels werden wir uns auf eine bestimmte Klasse von Baumfolgen beschränken, die wir zunächst definieren, um dann zu überlegen, weshalb die Betrachtung solcher Folgen ausreicht.

3.11 Definition. Sei $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots)$ eine perfekte Baumfolge. Wir schreiben dann:

$$\vec{T} \in \mathscr{T}_\omega :\Leftrightarrow \lim_{i \to \infty} (m_i \in \omega : T_i \text{ verzweigt erstmals auf dem Level } m_i) = \omega.$$

Wenn wir nun Satz 3.8 für Folgen $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{T}_\omega$ zeigen, haben wir auch den vollen Satz bewiesen. Ist nämlich eine Folge $\vec{T} = (T_1, T_2, \ldots)$ von perfekten Bäumen gegeben, so können wir diese zu einer Folge perfekter Bäume $\vec{T}' \in \mathscr{T}_\omega$ ausdünnen. Perfekte Teilbäume, welche wir in $\vec{T}'$ finden, sind auch perfekte Teilbäume in $\vec{T}$. Erfüllen wir also den Satz 3.8 für $\vec{T}'$, ist er auch für $\vec{T}$ erfüllt.

3.12 Definition. Für $\vec{T} \in \mathscr{T}_\omega$ und $n \in \mathbb{N}$ ist eine ***n-dichte Folge*** in $\vec{T}$ eine Folge $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots)$, so dass (für ein $m > n$) jedes $X_i \subseteq T_i(m)$ ist, $(X_1, \ldots, X_n)$ n-dicht in $(T_1, \ldots, T_n)$ und $X_i \neq \varnothing$ für $i > n$ ist.

3.13 Lemma. *Falls $\vec{T} \in \mathscr{T}_\omega, A \in [\omega]^{\aleph_0}$ und $C \subseteq \bigotimes^A \vec{T}$ ist und es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein n-dichtes $\vec{X}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C$ gibt, dann existieren perfekte Teilbäume $T'_i \subseteq T_i$ $(i \in \mathbb{N})$ und ein $A' \in [A]^{\aleph_0}$ mit $\bigotimes^{A'} \vec{T}' \subseteq C$.*

Beweis. Diese Eigenschaft ist naheliegend. Der Vollständigkeit halber sei hier eine Methode angegeben, wie derartige T'_i konstruiert werden können.

Sei $t \in T_1$ Dann hat t zwei unvergleichbare Nachfolger, also auch zwei Nachfolger s_1, s'_1, die auf einem gemeinsamen Level n liegen. Sei $\vec{X}^1$ die n-dichte Folge in C, die nach Voraussetzung existiert (mit $\vec{X}^1 \subseteq \vec{T}(m)$). Wir wählen $x_1, x'_1 \in X^1_1$ mit $s_1 \prec x_1$ und $s'_1 \prec x'_1$ und nehmen die ensprechenden Teiläste (bis Level m) zu T'_1 hinzu. Aus jedem X_i, mit $i = 2, 3, \ldots$ wählen wir ein $x_i \in T_i(m)$ und nehmen den entsprechenden Teilast zu T_i hinzu. Wir können nun zu x_1, x'_1 und x_2 je zwei unvergleichbare Nachfolger finden, sowie Nachfolger dieser Nachfolger, die auf einem gemeinsamen Level liegen. Dann gehen wir weiter wie im ersten Schritt vor.

Dieses Verfahren liefert induktiv perfekte Teilbäume, die die gewünschten Eigenschaften haben. ☐

Bevor wir uns den entscheidenden Lemmata zuwenden, wollen wir nochmals ein wenig die Notation vereinfachen:

3.14 Definition. Wir nennen S einen ***2-Ast-Teilbaum*** eines perfekten Baumes T, falls S die Vereinigung von zwei verschiedenen Ästen in T ist.

3.15 Definition. Sei $\vec{T} = (T_1, T_2, \ldots)$ eine Baumfolge. Für ein $d \in \mathbb{N}$ sei $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in (T_1, \ldots, T_d)$ und $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots) \in (T_{d+1}, T_{d+2}, \ldots)$. Wir definieren dann $\boldsymbol{\vec{u}\frown\vec{t}} := (u_1, \ldots, u_d, t_1, t_2, \ldots) \in \vec{T}$ als $\vec{u}$ ***verkettet*** mit $\vec{t}$.

3.16 Lemma. *Sei $\vec{T} \in \mathscr{T}_\omega, A \in [\omega]^{\aleph_0}$ und $\bigotimes^A \vec{T} = C_1 \dot{\cup} C_2$. Dann gilt eine der beiden Aussagen:*

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes $i \leq d$ 2-Ast-Teilbäume S_i von T_i, für jedes $j > d$ perfekte Teilbäume T'_j von T_j, sowie ein $A' \in [A]^{\aleph_0}$ gibt, so dass gilt:

($*$) für jedes $A'' \in [A']^{\aleph_0}$ und jede Folge $(T''_j)_{j>d}$, wobei T''_j ein perfekter Teilbaum von T'_j ist, existiert ein $\vec{t} \in \bigotimes^{A''} \vec{T}''$, so dass für jedes $\vec{u} \in \prod_{i \leq d} S_i(|\vec{t}|)$ die Folge $\vec{u}^\frown\vec{t}$ Element von C_2 ist.

Beweis. Angenommen (a) ist für ein m nicht erfüllt, dann wird m das d aus (b). Sei p das $p(d, (T_i)_{i \leq d})$ aus Lemma 3.10. Wir dünnen nun jedes T_i ($i \leq d$) zu $\widetilde{T}_i$ aus, so dass $\widetilde{T}_i$ mit T_i für alle Level $\leq p$ übereinstimmt, und oberhalb von Level p nichts enthält außer für jedes $t \in T_i(p)$ genau einen unendlichen Ast von T_i über t. Sei dann $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_l$ eine Aufzählung für $\mathscr{A}((T_i(p))_{i \leq d})$. Für jedes $p' \geq p$ induziert dies eine Aufzählung $\vec{a}_1(p'), \vec{a}_2(p'), \ldots, \vec{a}_l(p')$ von $\mathscr{A}((\widetilde{T}_i(p'))_{i \leq d})$.

Wir versuchen nun (simultan für alle $j > d$) durch Induktion über $l' \leq l$, so weit dies möglich ist, die folgenden Objekte zu finden: eine Folge $V_j^1 \supseteq V_j^2 \supseteq \ldots \supseteq V_j^{l'} \supseteq \ldots$ von perfekten Teilbäumen von T_j, sowie eine Folge $B^1 \supseteq B^2 \supseteq \ldots \supseteq B^{l'} \supseteq \ldots$, wobei jedes $B^k \in [A]^{\aleph_0}$ ist, so dass gilt:

$$\text{Für jedes } \vec{t} \in \bigotimes\nolimits^{B^{l'}} \left(V_j^{l'}\right)_{j>d} \text{ gibt es ein } \vec{u} \in \prod \vec{a}_{l'}(|\vec{t}|) \text{ mit } \vec{u}^\frown\vec{t} \in C_1.$$

Ein Induktionsanfang muss nicht angegeben werden, denn gelingt er nicht, so impliziert dies direkt (b).

Der Ausdünnungsprozess kann aber auch nicht für alle l Stufen ausgeführt werden. Wäre dem so, dann gäbe es ein $\vec{t} \in \bigotimes^A (T_j)_{j>d}$ mit $|\vec{t}| \geq p$ so dass für alle $l' \leq l$ ein $\vec{u} \in \prod \vec{a}_{l'}(|\vec{t}|)$ mit $\vec{u}^\frown\vec{t} \in C_1$ existiert. Für $\vec{u} \in \prod_{i<d} T_i(|\vec{t}|)$ sei $\vec{u} \in \widehat{C}_1$ genau dann, wenn $\vec{u}^\frown\vec{t} \in C_1$ ist. Nach Definition von p würde $\widehat{C}_1$ eine m-dichte Folge enthalten; indem $\vec{t}$ daran angehängt wird, bekäme man so ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$, welches (a) erfüllt.

Also kommen wir zu einem $l' < l$, so dass $V_j^{l'}$ und $B^{l'}$ gewählt werden können, aber nicht $V_j^{l'+1}$ und $B^{l'+1}$. Sei $A' := B^{l'}$, $T'_j := V_j^{l'}$ ($j > d$) und seien S_i die 2-Ast-Teilbäume von $\widetilde{T}_i$ ($i \leq d$), welche durch $\vec{a}_{l'+1}$ bestimmt sind. Diese erfüllen die Aussage ($*$). □

3.17 Lemma. *Sei $\vec{T} \in \mathscr{T}_\omega$ und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot\cup C_2$. Dann gilt eine der beiden Aussagen:*

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Es gibt 2-Ast-Teilbäume S_i in T_i ($i \in \mathbb{N}$) und $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ mit $\bigotimes^A \vec{S} \subseteq C_2$.

Beweis. Wie im vorhergehenden Lemma wollen wir annehmen, dass (a) nicht gilt.

Für $d_0 \in \mathbb{N}$, $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, 2-Ast-Teilbäume $S_i \subseteq T_i$ $(i \leq d_0)$ und perfekte $T'_j \subseteq T_j$ $(j > d_0)$ definieren wir für jedes $\vec{t} \in \bigotimes^A (T'_j)_{j>d_0}$, dass genau dann $\vec{t} \in C_2^0$ ist, wenn für jedes $\vec{u} \in \bigotimes(S_i)_{i \leq d}$ auf dem gleichen Level wie $\vec{t}$ die Folge $\vec{u}\frown\vec{t}$ in C_2 ist.

Nach Lemma 3.16 können wir ein $d_0 \in \mathbb{N}$, $A_0 \in [\omega]^{\aleph_0}$, 2-Ast-Teilbäume $S_i \subseteq T_i$ $(i \leq d_0)$ und perfekte $T_j^0 \subseteq T_j$ $(j > d_0)$ wählen, so dass für jedes $B \in [A_0]^{\aleph_0}$ und perfekte $U_j \subseteq T_j^0$ $(j > d_0)$ gilt:

$$\text{Es ist } \bigotimes^B (U_j)_{j>d_0} \cap C_2^0 \neq \varnothing.$$

Wir wollen außerdem dafür sorgen, falls nötig durch Ausdünnen der T_j^0, dass es ein $\vec{t} \in \bigotimes(T_j^0)_{j>d_0}$, $\vec{t} \in C_2^0$ gibt, so dass kein T_j^0 auf einem Level unterhalb von $|\vec{t}|$ verzweigt; sei dann $|\vec{t}| = a_0$ das erste Element von A. Nach Lemma 3.13 und der Voraussetzung (bzw. $(*)$ aus 3.16) gibt es ein m, so dass für jede m-dichte Folge $\vec{X}$ in $(T_j^0)_{j>d_0}$, deren Höhe in A_0 ist, $\prod \vec{X} \cap C_2^0 \neq \varnothing$ ist.

Darum kann die Konstruktion auch auf $(T_j^0)_{j>d_0}$, A_0 und C_2^0 angewendet werden; mit Lemma 3.16 finden wir also 2-Ast-Teilbäume $S_i \subseteq T_i^0$ $(d_0 < i \leq d_1)$, perfekte $T_j^1 \subseteq T_j^0$ $(j > d_1)$, $A_1 \in [A_0]^{\aleph_0}$ und eine Menge C_2^1 (wobei genau dann $\vec{t} \in C_2^1$ ist, wenn für jedes $\vec{u} \in \bigotimes(S_i)_{d_0<i\leq d_1}$ auf dem gleichen Level wie $\vec{t}$ die Folge $\vec{u}\frown\vec{t}$ in C_2^0 ist), für die $\bigotimes^B(U_j)_{j>d_1} \cap C_2^1 \neq \varnothing$ ist, falls U_j perfekte Teilbäume von T_j^1 sind und $B \in [A_1]^{\aleph_0}$ ist. Wir dünnen außerdem wieder aus, um ein $a_1 > a_0$ zu wählen.

Führt man dieses Verfahren unendlich oft aus, erhält man eine Folge $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und ein $A := \{a_n : n \in \omega\}$, welche (b) erfüllen. $\square$

Nun wollen wir noch sehen, wie wir mit Hilfe der bisher gezeigten Aussagen Satz 3.8 beweisen können.

Beweis von 3.8. Sei uns eine Baumfolge $\vec{T} = (T_1, T_2, \ldots) \in \mathscr{T}_\omega$ und eine Partition $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot\cup C_2$ gegeben. Wir werden nun perfekte Bäume U_i $(i \in \mathbb{N})$ und eine Abbildung von $\bigotimes \vec{U}$ nach $\bigotimes \vec{T}$ konstruieren, welche ω-viele U_i in jedes T_j „schachtelt". Dann werden wir mit Hilfe des bisher Gezeigten homogene 2-Ast-Teilbäume S_i von U_i finden und belegen, dass diese ein homogenes $\bigotimes^B \vec{T}'$ induzieren (wobei T'_i perfekte Teilbäume von T_i sind).

Wir können hierfür für jedes i den Baum T_i mit der Menge

$$K_i := \{s \in \{0,1\}^{<\omega} : s(j) = 0 \text{ für alle } j < i\}$$

identifizieren, da $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ isomorph zu einer Folge von Teilbäumen der T_i $(i \in \mathbb{N})$, eingeschränkt auf eine gemeinsame, unendliche Menge von Leveln ist.

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von $\mathbb{N}$, wobei jedes B_n unendlich sein soll. Außerdem definieren wir $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$, mit Hilfe einer geeigneten Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, durch die Menge $(U_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$, wobei

$$U_{i,n} := \{s \in \{0,1\}^{<\omega} : s(j) = 0 \text{ für alle } j \notin B_n \text{ und alle } j < i\}.$$

Wir definieren dann, für $\vec{u} \in \bigotimes \vec{U}$, $|\vec{u}| = m$, die Funktion $H(\vec{u}) = \vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$, mit $|\vec{t}\,| = m$, durch:

$$t_i(j) = \begin{cases} u_{i,n}(j) & \text{falls } i \leq j \leq m \text{ und } j \in B_n \text{ ist} \\ 0 & \text{für } j < i \end{cases}$$

Damit ist H eine höhenerhaltende Bijektion zwischen $\bigotimes \vec{U}$ und $\bigotimes \vec{T}$. Hierbei verwenden wir abzählbar viele Bäume $U_{i,n}$ für jeden Baum T_i. Die Urbilder der Vorgänger eines Knoten stammen also im Allgemeinen aus verschiedenen Bäumen.

Für $m \in \mathbb{N}$ und $X_i \subseteq T_i(m)$ $(i \in \mathbb{N})$ muss $H^{-1}[\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i]$ kein Cartesisches Produkt von Mengen sein. Es gilt aber: Ist $m \in \mathbb{N}$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $G_{i,n} \subseteq U_{i,n}(m)$ gegeben, so ist

$$H\left[\prod_{i,n} G_{i,n}\right] = \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i,$$

wobei genau dann $t \in A_i$ ist, wenn natürliche Zahlen $n_0 < \ldots < n_k$ (für ein $k \leq m$) und für jedes $l \leq k$ ein $u_{i,n_l} \in G_{i,n_l}$ existiert, so dass für alle $j < m$ gilt: Es ist $t(j) = u_{i,n_l}(j)$ für das (eindeutige) n_l mit $j \in B_{n_l}$. Also bildet H Cartesische Produkte auf Cartesische Produkte ab.

Wir betrachten nun $\bigotimes \vec{U} = \widehat{C}_1 \dot{\cup} \widehat{C}_2$, wobei $\widehat{C}_j := H^{-1}[C_j]$ ist. Nach Lemma 3.17 existieren ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, 2-Ast-Teilbäume $S_{i,n}$ von $U_{i,n}$ $(i, n \in \mathbb{N})$ und ein $j \in \{1,2\}$ mit $\bigotimes^A \vec{S} \subseteq \widehat{C}_j$. Dann existieren Teilbäume T'_i von T_i mit $H[\bigotimes \vec{S}\,] = \bigotimes \vec{T}'$ und wir erhalten $\bigotimes^A \vec{T}' \subseteq C_j$. Wir müssen nun noch zeigen, dass jedes der T'_i perfekt ist.

Dies wird durch die folgende Beobachtung klar: Falls $m \geq i$ ein Level ist, auf dem für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ der Baum $S_{i,n}$ verzweigt, so verzweigt T'_i an jedem Knoten mit Höhe m. Da aber

$$\lim_{n\to\infty} (|\text{niedrigster Spaltknoten von } U_{i,n}|) = \omega$$

nach Konstruktion der $U_{i,n}$ gilt, gibt es unendlich viele solche Level in jedem T'_i. Damit sind die T'_i perfekt und Satz 3.8 bewiesen. □

Eine Anwendung des Satzes findet sich in Kapitel 5, weil uns an dieser Stelle noch zu viel der notwendigen Notation fehlt.

3.3 Eine Verstärkung

Der folgende Satz ist eine leichte Verstärkung von Satz 3.8, durch den wir zusätzliche Kontrolle über die Struktur der einfarbigen Mengen erhalten. Vorweg wollen wir aber noch zwei Schreibweisen einführen.

Wie im Beweis von Satz 3.8 sei dabei

$$K_i := \{s \in \{0,1\}^{<\omega} : s(j) = 0 \text{ für alle } j < i\}.$$

3.18 Definition. Sei T ein Baum, dann sagen wir dass $T \in \mathscr{K}$ ist, falls T isomorph zu K_i für ein $i \in \mathbb{N}$ ist.

Wir definieren außerdem:

$$(T_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{K}_\omega :\Leftrightarrow (T_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}_\omega \text{ und } T_i \in \mathscr{K} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

3.19 Definition. Sei T ein Baum. Für $s, t \in T$ sei

$$s \wedge t := \max\{q \in T : q \prec s \text{ und } q \prec t\},$$

also der Spaltknoten zweier Äste durch s beziehungsweise t.

3.20 Satz ([6]). *Sei $\vec{T} \in \mathscr{K}_\omega$ und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot\cup C_2$. Dann gilt eine der Aussagen:*

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Es gibt ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, $A = \{a_m\}_{m\in\omega}$, (a_m) streng monoton steigend, und ordnungserhaltende, injektive Abbildungen

$$F_i : K_i \to T_i,\ i \in \mathbb{N},$$

so dass für alle $s, t \in K_i$ gilt: es ist $F_i(s \wedge t) = F_i(s) \wedge F_i(t)$ und außerdem $F[K_i(m)] \subseteq T_i(a_m)$ für alle $m \in \omega$ und $\bigotimes^A (F_i[K_i])_{i\in\mathbb{N}} \subseteq C_2$.

Der Beweis wird darin bestehen, dass wir nacheinander die Lemmata verstärken, die wir zum Beweis von Satz 3.8 verwendet haben. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die folgenden Definitionen:

3.21 Definition. Für $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ und $\vec{B} := (\{t_{i0}, t_{i1}\})_{i\leq d}$, wobei $t_{ij} \in T_i$ sei, definieren wir

$$\overrightarrow{\wedge B} := (t_{i0} \wedge t_{i1})_{i\leq d} \in \vec{T}.$$

3.22 Definition. Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$. Wir sagen, dass $C \subseteq \bigotimes \vec{T}$ ***kofinal*** ist, falls für jedes $\vec{u} \in \bigotimes \vec{T}$ ein $\vec{c} \in C$ existiert, so dass $t_i \prec c_i$ für alle $i \leq d$ ist.

Das folgende Lemma ist eine Verstärkung von Lemma 3.10.

3.23 Lemma. *Sei $d, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{T} = (T_i, \ldots, T_d)$ mit $T_i \in \mathscr{K}$ für $i \leq d$. Sei außerdem C kofinal in $\bigotimes \vec{T}$. Dann gibt es ein $p'(\vec{T}, m, C) =: p'$, so dass es für jedes $q \geq p'$ und jedes $G \subseteq \prod_{i=1}^{d} T_i(q)$ für das gilt:*

> *ist $\vec{B} \in \mathscr{A}((T_i(q))_{i \leq d})$ und $\overrightarrow{\wedge B} \in C$ und $|\overrightarrow{\wedge B}| < p'$, so ist $\prod \vec{B} \cap G \neq \varnothing$,*

ein m-dichtes $\vec{X} \subseteq \vec{T}$ auf Level q mit $\prod \vec{X} \subseteq G$ gibt.

Beweis. Wir nehmen an, die Aussage gelte nicht. Dann können wir für jedes $p' \in \mathbb{N}$ ein Gegenbeispiel $G_{p'}$ wählen, wobei wir ohne Einschränkungen annehmen können, dass $G_{p'} \subseteq \bigotimes T_i(p')$ ist. Sei dann $G_0 = \bigcup_{p'} G_{p'}$.

Da nach Konstruktion keine m-dichte Menge G_0-homogen ist, liefert und der Satz 3.3 ein $\vec{t} \in \bigotimes \vec{T}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\vec{t}$-n-dichtes $\vec{Y}_n$ mit $\vec{Y}_n \cap G \neq \varnothing$. Wir können nun ein $\vec{c} \in C$ mit $\vec{t} \leq \vec{c}$ so wählen, dass c_i ein Spaltknoten in T_i ist (nach Wahl von G_0). Sei $n := |\vec{c}| + 1$, dann gilt für ein $\vec{B} \in \mathscr{A}(\vec{Y}_n)$ mit $\overrightarrow{\wedge B} = \vec{c}$, dass $\bigotimes \vec{B} \cap G_0 = \varnothing$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der $G_{p'}$. □

Nun wollen wir Lemma 3.16 verstärken:

3.24 Lemma. *Sei $\vec{T} \in \mathscr{K}_\omega$ und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot\cup C_2$. Dann gilt eine der Aussagen:*

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, 2-Ast-Teilbäume S_i von T_i $(i \leq d)$, deren Spaltknoten jeweils auf Level n sind, und Teilbäume $T'_j \subseteq T_j$ (für $j > d$) mit $T'_j \in \mathscr{K}$, so dass gilt:

(i) $\prod(S_1(n), \ldots, S_d(n), T'_{d+1}(n), T'_{d+2}(n), \ldots) \subseteq C_2$, und

(ii) für jedes $B \in [A]^{\aleph_0}$ und jede Folge von Teilbäumen $T''_j \subseteq T'_j$ mit $T''_j \in \mathscr{K}$ $(j > d)$, gibt es ein $\vec{t} \in \bigotimes^B \vec{T}''$, so dass für jedes $\vec{u} \in \prod_{i \leq d} S_i(|\vec{t}|)$ gilt: $\vec{u}\smile\vec{t} \in C_2$.

Beweis. Falls (a) für ein $m \in \mathbb{N}$ nicht gilt, so wird dieses m das d aus (b) sein. Wir wählen zunächst induktiv eine Folge $(b_j)_{j>d}$, wobei b_j Ast von T_j ist, und ein kofinales $C \subseteq \bigotimes(T_i)_{i \leq d}$, so dass für jedes $\vec{c} \in C$ mit $|\vec{c}| =: q$ gilt: es ist entweder

$$(*) \qquad \vec{c}\smile(b_j(q))_{j>d} \in C_2,$$

oder

$$(**) \qquad \text{für jedes } \vec{u} \in \bigotimes(T_i)_{i \leq d} \text{ und } \vec{t} \in \bigotimes(T_j)_{j>d} \text{ mit } |\vec{u}| = |\vec{t}|,\ \vec{c} \leq \vec{u} \text{ und } (b_j(q))_{j>d} \leq \vec{t} \text{ ist } \vec{u}\smile\vec{t} \in C_1.$$

Dass diese Konstruktion (ganz unabhängig von unserer Annahme zu (a)) möglich ist, ist leicht einzusehen.

Sei uns nun ein $p' = p'((T_i)_{i \leq d}, m, C)$ gegeben, wie es in Lemma 3.23 beschrieben ist. Wir können annehmen, dass für $j > d$ der kleinste Spaltknoten in T_j ein Nachfolger von $b_j(p')$ ist (falls nötig erreichen wir dies durch Ausdünnen). Nun stellen wir analoge Überlegungen wie im Beweis von Lemma 3.16 an: Wir dünnen die T_i (für $i \leq d$) zu $\widetilde{T}_i$ aus, so dass $\widetilde{T}_i(m) = T_i(m)$ für $m \leq p'$ ist und für jedes $t \in T_i(p')$ genau einen unendlichen Ast durch t enthält.

Für jedes $q \geq p'$ bekommen wir so eine Aufzählung $a_1(q), \ldots, a_r(q)$ der Menge $\{\vec{B} \in \mathscr{A}((\widetilde{T}_i(q))_{i \leq d}) : \overrightarrow{\wedge B} \in C, |\overrightarrow{\wedge B}| < p'\}$.

Wir versuchen nun durch eine induktive Konstruktion über $r' \leq r$ die folgenden Objekte zu finden: Folgen $V_j^1 \supseteq \ldots \supseteq V_j^{r'} \supseteq \ldots$ von Teilbäumen von T_j, die in $\mathscr{K}$ liegen (für $j > d$) und eine Folge $B^1 \supseteq \ldots \supseteq B^{r'} \supseteq \ldots$ mit $B^k \in [\omega]^{\aleph_0}$, so dass gilt:

$$\text{Für jedes } \vec{t} \in \bigotimes^{B^{r'}} (V_j^{r'})_{j>d} \text{ existiert ein } \vec{u} \in \prod a_{r'}(|\vec{t}|) \text{ mit } \vec{u} \frown \vec{t} \in C_1.$$

Auch hier (wie im Beweis von 3.16) bricht die Induktion bei einem $r' < r$ ab, da wir sonst mit Lemma 3.23 eine C_1-homogene, m-dichte Menge finden könnten.

Dann kann $\overrightarrow{\wedge a_{r'+1}} \in C$ nicht $(**)$ erfüllen, da die Induktion sonst hätte fortgesetzt werden können.

Also gilt $(*)$ für $\overrightarrow{\wedge a_{r'+1}}$ und die dadurch bestimmten 2-Ast-Teilbäume (deren Spaltknoten nach Konstruktion alle auf gleicher Höhe sind) erfüllen zusammen mit $A := B^{r'}$ und $T_j' := V_j^{r'}$ das Lemma. □

Zuletzt verstärken wir noch Lemma 3.17.

3.25 Lemma. *Sei $\vec{T} \in \mathscr{K}_\omega$ und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot{\cup} C_2$. Dann gilt eine der Aussagen:*

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein m-dichtes $\vec{X}$ in $\vec{T}$ mit $\prod \vec{X} \subseteq C_1$.

(b) Es gibt 2-Ast-Teilbäume S_i in T_i (für alle $i \in \mathbb{N}$), so dass $\bigotimes^A \vec{S} \subseteq C_2$ ist, wobei $A := \{n \in \omega :$ es gibt ein S_i, das in Höhe n verzweigt$\}$ sei.

Es gilt sogar: Falls $\omega = E_1 \dot{\cup} E_2 \dot{\cup} \ldots$ eine Partition ist, wobei jedes E_i unendlich ist, so können wir erreichen, dass es, falls a_n die n-te Zahl in A ist, für jedes $j \leq n$ ein $i \in E_j$ gibt, so dass S_i in Höhe a_n verzweigt.

Beweis. Dies kann aus Lemma 3.24 bewiesen werden, wie schon Lemma 3.17 aus Lemma 3.16 bewiesen werden konnte.

Wir nehmen an, dass (a) nicht gilt und wenden auf Stufe j das Lemma 3.24 auf die entsprechende Färbung von $\bigotimes^{a_j} (T_i^j)_{i>d_j}$ an, wobei $T_i^j \restriction_{A_j} \in \mathscr{K}$ auf die im Satz 3.20(b) beschriebene Weise in T_i eingebettet ist.

Um den Zusatz zu erfüllen bemerken wir, dass die Zahl d aus Lemma 3.24(b) beliebig groß gewählt werden kann (denn für jedes $m' > m$ ist ein m'-dichtes $\vec{X}$ auch m-dicht). Wir wählen also im n-ten Schritt d_n ausreichend groß, so dass die Bedingung bis E_n erfüllt ist. $\square$

Beweis von Satz 3.20. Wie im Beweis von Satz 3.8 betrachten wir zu gegebenem $\vec{T}$ wieder $\vec{U} = (U_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{K}_\omega$ und eine Abbildung $H : \bigotimes \vec{U} \to \bigotimes \vec{T}$ in der dort beschriebenen Weise.

Es ist dann leicht zu sehen, dass folgendes gilt: Für jedes $m \in \omega$ gibt es ein $p \in \omega$, so dass für jedes p-dichte $\vec{X}$ in $\vec{U}$ die Menge $H[\bigotimes \vec{X}]$ das Cartesische Produkt einer m-dichten Menge $\vec{Y}$ in $\vec{T}$ ist. Deshalb gilt dann auch Satz 3.20(a) für C_1, falls Lemma 3.25(a) für $H^{-1}[C_1]$ erfüllt ist.

Abschließend stellen wir die Beobachtung an, dass, falls Lemma 3.25(b) für $H^{-1}[C_2]$ und $E_i := \{(i,n) : n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt ist, $H[\bigotimes^A \vec{S}]$ das gesuchte $\bigotimes^A (F_i[K_i])_{i\in\mathbb{N}}$ aus Satz 3.20(b) ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Kapitel 4

Satz von Milliken

In diesem Kapitel wird es uns um eine Erweiterung von Satz 2.2 in eine andere Richtung als bei dem Satz von Laver gehen. Wir wollen nicht die Bäume oder Tupellängen verändern sondern größere Stücke des Baums als Elemente der Färbung bekommen. Um dies genauer zu fassen, benötigen wir zunächst wieder ein paar Definitionen.

Nachdem wir diese haben, werden wir nach kurzer Vorbereitung zu Satz 4.5 kommen, um den es uns hier gehen soll. Sein Beweis wird dann den Rest des Kapitels einnehmen.

4.1 Definition. Sei $T = (T, \prec)$ Baum, $t \in T$. Wir definieren dann:

(i) $\mathrm{Succ}(t, T) := \{q \in T : t \preceq q\}$

(ii) $\mathrm{Succ}^*(t, T) := \{q \in T : t \prec q\} = \mathrm{Succ}(t, T) \setminus \{t\}$

(iii) Wir erinnern uns: Es ist

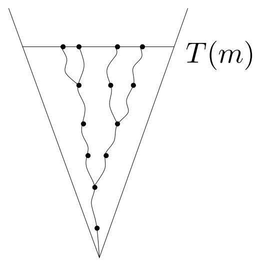
$$\mathrm{IS}(t, T) := \{s \in \mathrm{Succ}^*(t, T) : |s| = \min\{|s_0| : s_0 \in \mathrm{Succ}^*(t, T)\}\},$$

das heißt, $\mathrm{IS}(t, T)$ ist die Menge der direkten Nachfolger von t in T.

(iv) T heißt ***α-Baum*** ($\alpha \leq \omega$), falls jeder Ast von T Höhe α hat.

Wir bemerken dabei, dass ein α-Baum für $\alpha < \omega$ kein Baum im Sinne unserer Definition ist. Er ist aber ein Anfangsstück eines Baums, was die Formulierung nahelegt.

4.2 Definition. Sei S ein α-Baum, T ein β-Baum, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \omega$. S ist in T ***eingebettet***, falls gilt:



(i) Es ist $S \subseteq T$ und auf S gilt die von T induzierte Ordnung (insbesondere hat S eine eindeutige Wurzel).

(ii) Falls $s \in S$ nicht maximal und $t \in \mathrm{IS}(s, T)$ ist, so ist $|\,\mathrm{Succ}(t, T) \cap \mathrm{IS}(s, S)| = 1$. Das bedeutet, dass s in S genau einen direkten Nachfolger für jeden direkten Nachfolger in T hat und diese vergleichbar sind.

S ist in T ***stark eingebettet***, falls zusätzlich gilt:

(iii) Für jedes $n < \alpha$ gibt es ein $m \geq n$, so dass

$$\{s \in S : |\{p \in S : p \prec s\}| = n\} \subseteq T(m)$$

ist. Wir schreiben

$$St^{\alpha}(T) := \{S \subseteq T : S \text{ ist } \alpha\text{-Baum und stark in } T \text{ eingebettet}\}.$$

Diese Notation kann problemlos auf d-Baumtupel ausgeweitet werden, indem wir definieren:

$\vec{S} \in St^{\alpha}(\vec{T}) :\Leftrightarrow$ Es ist $d \in \mathbb{N}$, $\vec{S} = (S_1, \dots, S_d)$, $\vec{T} = (T_1, \dots, T_d)$, $S_i \in St^{\alpha}(T_i)$ (für alle $i \leq d$) und die S_i sind kompatibel.

Solche Tupel $\vec{S}$ wollen wir in Satz 4.5 färben.

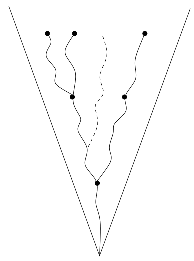
Wie man leicht sehen kann ist die Eigenschaft der starken Einbettung transitiv. Wir bemerken an dieser Stelle außerdem noch, dass die Eigenschaften *stark eingebettet* und *streng dicht* nicht äquivalent sind. Allerdings stehen sie im folgenden Zusammenhang zueinander:

4.3 Lemma. *Sei $\vec{T}$ ein d-Baumtupel, $\vec{t} \in \vec{T}$ und $\vec{W}$ streng $\vec{t}$-dicht in $\vec{T}$. Dann existiert ein $\vec{S} \in St^{\omega}(\vec{T})$ mit $\vec{S} \prec \vec{W}$.*

Beweis. Seien $\vec{T}$, $\vec{t}$ und $\vec{W}$ wie im Lemma beschrieben und sei $L(\vec{W}) = \{l_n\}_{n \in \omega}$. Wir wollen nun induktiv die Elemente von $\vec{S}$ definieren:

Zu jedem $t_i \in \vec{t}$ wählen wir ein $s_i^0 \in W_i(l_{|\vec{t}|})$ mit $t_i \prec s_i^0$ für unser S_i (für $i = 1, \dots, d$). Dies ist möglich, weil $\vec{W}$ streng dicht in $\vec{T}$ ist. Sei $\mathrm{IS}(s_i^0, T_i) = \{t_i^1, \dots, t_i^k\}$ wir wählen dann zu jedem $j \in \{1, \dots, k\}$ ein $s_i^{1(j)} \in W_i(l_{|s_i^0|+1})$ mit $t_i^j \prec s_i^{1(j)}$, welche wir zu S_i hinzufügen. Führen wir dieses Verfahren immer weiter für jeden neu gefundenen Knoten in S_i aus, so ist das entstehende Tupel $\vec{S}$ nach Konstruktion stark in $\vec{T}$ eingebettet. $\square$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt dabei nicht, wie wir leicht am nebenstehenden Bild erkennen können. Die eingezeichneten Knoten bilden zwar einen stark eingebetteten Baum. Dieser ist aber nur in einem Teilbaum des ursprünglichen Baums dicht.



Wir werden in diesem Kapitel nicht den vollen Satz 2.2 verwenden, sondern eine leichte Folgerung, welche wir mit Hilfe von Lemma 4.3 zeigen können.

4.4 Satz. *Seien $d, r \in \mathbb{N}$ und sei $\vec{T}$ ein d-Baumtupel. Falls $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} C_r$ ist, dann gibt es ein $k \leq r$ und ein $\vec{S} \in St^{\omega}(\vec{T})$ mit $\bigotimes \vec{S} \subseteq C_k$.*

Beweis. Satz 2.2 liefert ein $k \leq r$ und, für ein $\vec{t} \in \vec{T}$, eine streng $\vec{t}$-dichte, k-homogene Menge. Lemma 4.3 liefert dann das gewünschte $\vec{S} \in St^{\omega}(\vec{T})$. □

Nun zur Formulierung des Satzes:

4.5 Satz (Milliken [7]). *Seien $\alpha, d, r \in \mathbb{N}$ und sei $\vec{T}$ ein d-Baumtupel. Falls $St^{\alpha}(\vec{T}) = C_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} C_r$ ist, dann gibt es ein $k \leq r$ und ein $\vec{S} \in St^{\omega}(\vec{T})$ mit $St^{\alpha}(\vec{S}) \subseteq C_k$.*

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir eine leichte Beobachtung in Worte fassen, die wir wiederholt verwenden werden.

4.6 Lemma. *Sei T ein Baum, $\{l_n\}_{n \in \omega} \subseteq \omega$ mit $i \leq l_i < l_{i+1}$, $i \in \omega$, und $t \in T(l_0)$. Dann existiert ein $S \in St^{\omega}(T)$ mit $L(S) = \{l_n\}_{n \in \omega}$, so dass t die Wurzel von S ist.*

Beweis. Wir betrachten eine Induktion über n und wählen dabei nacheinander die Level $S(l_n)$ derart, dass die Bedingungen (i)-(iii) in Definition 4.2 erfüllt sind. Damit ist S dann stark in T eingebettet. □

Wie bereits angekündigt, wird der Beweis von Satz 4.5 nun den Rest des Kapitels einnehmen. Da es sich um eine dreifach verschachtelte Induktion handelt, scheint es nicht sinnvoll, Teile des Beweises in Lemmata zu fassen.

Strukturell verläuft der Beweis wie folgt: Wir wollen eine Induktion über α ausführen und definieren hierfür die Forderungen (a)-(h). Dann zeigen wir, das die Induktion über α gelingt, falls diese Forderungen erfüllt sind. Dass sie tatsächlich erfüllt werden können, zeigen wir im zweiten Teil des Beweises (mit Hilfe der Induktionsannahme für α).

Beweis von Satz 4.5. Betrachten wir die Induktion über α. Wir bekommen hierbei für $\alpha = 1$ genau die Aussage von Satz 4.4.

Gelte also Satz 4.5 für ein $\alpha \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch für $\alpha + 1$ gilt.

Sei uns hierzu ein $d \in \mathbb{N}$ und ein $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ mit

$$St^{\alpha+1}(\vec{T}) = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_r \text{ (mit } r \in \mathbb{N})$$

gegeben.

Durch Induktion über $n \in \omega$ wollen wir eine Baumfolge $(T(i,n))_{i \le d, n \in \omega}$, eine Funktion $\nu : \omega \to \omega$ und eine Funktion F konstruieren, so dass für alle $n \in \omega$ gilt:

(a) $\nu(0) = 0$ und $\nu(k) < \nu(n)$ für alle $k < n$;

(b) $(T(i,n))_{i \le d} \in St^{\omega}(\vec{T})$;

(c) $T(i,n) \subseteq \bigcap_{k<n} T(i,k)$ für jedes $i \le d$;

(d) $T(i,n)(l_n) \subseteq T_i(\nu(n))$, das heißt, das (n+1)-te nichtleere Level von $T(i,n)$ ist eine Teilmenge des $\nu(n)$-ten Levels von T_i;

(e) Für jedes $n > 0$, $i \le d$ und

$$s \in \bigcup_{t \in T(i,n-1)(l_{n-1})} \mathrm{IS}(t, T_i) :$$

existiert ein eindeutiges $s' \in T(i,n)(l_n)$ mit $s' \succ s$;

(f) Für jedes $i \le d$ und $j \le k \le n$ gilt $T(i,n)(l_j) = T(i,k)(l_j)$. Also ist insbesondere $T(i,n)(l_j) = T(i,j)(l_j)$ für alle $j \le n$;

(g) $\operatorname{dom} F = \bigcup_{k\in\omega}(\prod_{i \le d} T(i,k)(l_k))$ und $\operatorname{ran} F = \{1, \ldots, r\}$;

(h) Sei $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \prod_{i \le d} T(i,n)(l_n)$ und $\{l_k\}_{k \le \alpha} \subseteq \omega$ mit

$$\nu(n) < l_0 < \ldots < l_\alpha.$$

Gelte außerdem, dass für jedes $i \le d$ und jedes $s \in \mathrm{IS}(a_i, T_i)$ ein $S^{(s)} \in St^{\alpha}(T_i)$ mit $L(S^{(s)}) = \{l_k\}_{k \le \alpha}$ und $S^{(s)} \subseteq \mathrm{Succ}(s, T_i) \cap T(i,n)$ existiert. Wir schreiben

$$R_i = \{a_i\} \cup \left(\bigcup_{s \in \mathrm{IS}(a_i, T_i)} S^{(s)} \right), \text{ also } R_i \in St^{\alpha+1}(T_i).$$

Dann gilt für jedes $k \le r$: $F(\vec{a}) = k \Leftrightarrow (R_1, \ldots, R_d) \in C_k$.

Können all diese Bedingungen erfüllt werden (was noch zu zeigen ist), so setzen wir $T'_i = \bigcap_{n\in\omega} T(i,n)$ und bemerken dabei, dass die Bedingung (f) uns für festes k liefert, dass $T(i,n)(l_k) = T(i,m)(l_k)$ für alle $n,m \geq k$ gilt. Darum gilt nach Bedingung (b), (c) und (e) auch $T'_i \in St^\omega(T_i)$. Außerdem gilt nach (f) $T'_i = \bigcup_{n\in\omega} T(i,n)(l_n)$ und darum mit Hilfe von (d) $L(T'_i) = \nu[\omega]$.

Wegen $T'_i = \bigcup_{n\in\omega} T(i,n)(l_n)$ bekommen wir außerdem $\operatorname{dom} F = \bigotimes(T'_i)_{i\leq d}$. Es ist also Satz 4.4 anwendbar, und somit wissen wir, dass es ein $k'' \leq r$ und kompatible Bäume $S_i \in St^\omega(T'_i)$ $(i \leq d)$ gibt, so dass F konstant den Wert k'' auf $\bigotimes(S_i)_{i\leq d}$ annimmt.

Nun ist wegen $S_i \in St^\omega(T'_i)$ und $T'_i \in St^\omega(T_i)$ auch $S_i \in St^\omega(T_i)$. Wenn wir jetzt noch zeigen, dass

$$(*) \qquad St^{\alpha+1}((S_i)_{i\leq d}) \subseteq C_{k''}$$

gilt, ist uns der Induktionsschritt bezüglich α gelungen. Dazu betrachten wir kompatible $R_i \in St^{\alpha+1}(S_i)$ $(i \leq d)$. Sei a_i die Wurzel von R_i und sei n_0 das Level, für das $a_i \in T_i(n_0)$ gilt. Dann ist

$$\{a_i\} \subseteq S_i(l_k = n_0) \subseteq T'_i(l_m = n_0) = T(i,m)(l_m) \subseteq T_i(\nu(m) = n_0).$$

Wir wissen bereits auf Grund der Wahl von $(S_i)_{i\leq d}$, dass $F((a_i)_{i\leq d}) = k''$ ist. Außerdem gilt wegen Bedingung (d), dass $(R_i)_{i\leq d}$ in Bedingung (h) untersucht wurde (für $n = m$). Darum gilt mit (h) $(R_i)_{i\leq d} \in C_{k''}$, womit $(*)$ gezeigt und der erste Teil des Beweises abgeschlossen ist.

Wenden wir uns nun also der Induktion über n zu. Der Wert von $\nu(0)$ wird in (a) festgelegt. Die Wahl von $T(i,0)$ $(i \leq d)$ und $F(\vec{a})$ für $\vec{a} \in \prod_{i\leq d} T(i,0)(l_0)$ kann analog zur Wahl im Induktionsschritt ausgeführt werden, außer dass mit T_i anstatt $T(i,n-1)$ begonnen werden muss. Darum wollen wir nur den Induktionsschritt ausführlich beschreiben.

Seien also $\nu(k)$, $T(i,k)$ $(i \leq d)$ und $F{\restriction}_{\prod_{i\leq d} T(i,k)(l_k)}$ schon konstruiert für $k < n$. Wir wollen nun die Bedingungen (a)-(h) für n erfüllen. Wir beginnen damit, indem wir $\nu(n) = l_n$ wählen (für $l_n \in L(T(i,n-1))$), so dass also $\nu(n)$ das $(n+1)$-te nichtleere Level von $T(i,n-1)$ in T_i ist.

Sei nun $T(i,n)(l_k) = T(i,n-1)(l_k)$ für jedes $k \leq n$, weil damit (f) erfüllt werden kann.

Als nächstes nummerieren wir $\prod_{i\leq d} T(i,n)(l_n)$ als $\{\vec{a}(p) : 1 \leq p \leq K\}$, wobei $K := |\prod_{i\leq d} T(i,n)(l_n)|$ ist, und schreiben dann $\vec{a}(p) =: (a(p,i))_{i\leq d}$. Durch Induktion über $p \leq K$ wollen wir nun ein Baumtupel $(T(i,n,p))_{i\leq d, p\leq K}$ finden, so dass für jedes $p \leq K$ gilt:

(i) $T(i,n-1) = T(i,n,0)$ für alle $i \leq d$;

(ii) $(T(i,n,p))_{i\le d} \in St^{\omega}(\vec{T})$;

(iii) $T(i,n,p) \subseteq \bigcap_{q<p} T(i,n,q)$ für alle $i \le d$;

(iv) $T(i,n,p)(l_k) = T(i,n)(l_k)$ für jedes $k \le n$;

(v) Sei $p > 0$ und $\{l_k\}_{k\le\alpha} \subset \omega$ mit $\nu(n) < l_0 < \ldots < l_\alpha$. Gelte außerdem, dass für jedes $i \le d$ und $s \in \mathrm{IS}(a(p,i),T_i)$ ein $S^{(s)} \in St^{\alpha}(T_i)$ mit $L(S^{(s)}) = \{l_k\}_{k\le\alpha}$ und $S^{(s)} \subseteq \mathrm{Succ}(s,T_i) \cap T(i,n,p)$ existiert. Wir schreiben

$$R_i = \{a(p,i)\} \cup \left(\bigcup_{s\in \mathrm{IS}(a(p,i),T_i)} S^{(s)} \right), \text{ also } R_i \in \; St^{\alpha+1}(T_i).$$

Dann gilt für jedes $k \le r$: $F(\vec{a}(p)) = k \Leftrightarrow (R_i)_{i\le d} \in C_k$.

Der Induktionsanfang ist erfüllt, indem wir $T(i,n,0) = T(i,n-1)$ setzen, welches ja schon konstruiert ist.

Sei also $T(i,n,p-1)$ $(i \le d)$ gegeben. Zur besseren Übersichtlichkeit wollen wir im folgenden (für fixiertes n und p) abkürzend schreiben:

$$I_i := \mathrm{IS}(a(p,i),T_i)$$

und für $s \in I_i$ (für ein $i \le d$) schreiben wir

$$Q(s) := \mathrm{Succ}(s,T_i) \cap T(i,n,p-1).$$

Außerdem wollen wir die Menge derjenigen α-Bäume genauer beschreiben können, die dieselben nichtleeren Level besitzen, und zwar in folgendem Sinne: Sei $\vec{T} = (T_i)_{i\le d}$ ein Baum, $\beta \le \omega$ und $f : \beta \to \omega$ eine Funktion mit $f(i) < f(j)$ für $i < j < 1+\beta$. Wir definieren dann

$$St_f((T_i)_{i\le d}) := \prod_{i\le d} St_f(T_i) := \prod_{i\le d} \left(St^{\alpha}(T_i) \cap \{S \subseteq T_i : L(S) = f[\beta]\} \right).$$

Nun betrachten wir das Baumtupel $(Q(s))_{i\le d, s\in I_i}$ (die Länge dieses Tupels ist im Allgemeinen größer als d) und definieren eine Funktion H,

$$H : \bigcup_{\substack{f:\alpha\to\omega \\ f(i)<f(j), i<j\le\alpha}} \left(\prod_{i\le d, s\in I_i} St_f(Q(s)) \right) \to \{1,\ldots,r\},$$

durch die folgende Bedingung. Sei $f : \alpha \to \omega$ gegeben, f streng monoton steigend. Für jedes $i \le d$ und $s \in I_i$ und $S^{(s)} \in St_f(Q(s))$ schreiben wir

$$R_i := \{a(p,i)\} \cup \left(\bigcup_{s\in I_i} S^{(s)} \right) \quad \text{(für alle } i \le d).$$

Dann definieren wir $H((S^{(s)})_{i\leq d, s\in I_i}) = k \Leftrightarrow (R_i)_{i\leq d} \in C_k$.

H partitioniert also die verketteten Tupel der stark in $(Q(s))_{i\leq d, s\in I_i}$ eingebetteten α-Bäume. Die Induktionsvoraussetzung (dass Satz 4.5 für α erfüllt ist) impliziert die Existenz einer natürlichen Zahl $k' \leq r$ und von kompatiblen Bäumen $Q'(s) \in St^\omega(Q(s))$ $(i \leq d, s \in I_i)$, wobei $L(Q'(s)) =: \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei, so dass H den konstanten Wert k' auf

$$(**) \qquad \bigcup_{\substack{f:\alpha\to\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ f(i)<f(j), i<j\leq\alpha}} \left(\prod_{i\leq d, s\in I_i} St_f(Q'(s)) \right)$$

hat. Also definieren wir $F(\vec{a}(p)) = k'$.

Für festes $i \leq d$ wollen wir als nächstes $T(i,n,p)(l_k)$ für $k > n$ wie folgt definieren. Für jedes $a \in T(i,n,p)(l_n)(= T(i,n)(l_n))$ mit $a \neq a(p,i)$ und für jedes $s' \in IS(a, T_i)$ können wir nach Lemma 4.6 einen beliebigen, zu den $Q'(s)$ kompatiblen Baum

$$(***) \qquad Q'(s') \in St^\omega(\mathrm{Succ}(s', T_i) \cap T(i,n,p-1)) \text{ wählen.}$$

Wir definieren dann

$$T(i,n,p) = \left(\bigcup_{k\leq n} T(i,n,p-1)(l_k) \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{a\in T(i,n)(l_n), \\ s\in IS(a,T_i)}} Q'(s) \right).$$

Es ist dabei zu bemerken, dass $Q'(s)$ unterschiedlich definiert ist, je nachdem ob $s \in IS(a, T_i)$ mit $a = a(p,i)$ oder mit $a \neq a(p,i)$ ist. Im ersten Fall erfüllt $Q'(s)$ $(**)$, im zweiten Fall wird $Q'(s)$ beliebig gewählt, und es muss lediglich $(***)$ erfüllt sein.

Damit ist die Induktion über $p \leq K$ abgeschlossen, und es ist leicht zu sehen, dass die Bedingungen (i)-(v) erfüllt sind. Da $T(i,n)(l_n) = T(i,n,p)(l_n)$ für jedes $p \leq K$ ist, haben wir außerdem die Konstruktion von F auf $\prod_{i\leq d} T(i,n)(l_n)$ abgeschlossen. Um die Definition von $T(i,n)(l_k)$ für $k > n$ abzuschließen, setzen wir $T(i,n) = T(i,n,K)$. Somit sichern die Bedingungen (i)-(v) ab, dass die Bedingungen (a)-(h) für $T(i,n)$ gelten.

Damit ist dann auch die Induktion über n und also die Konstruktion von ν, F und der Bäume $T(i,n)$ abgeschlossen. $\square$

Kapitel 5

Etwas deskriptive Mengenlehre

Nachdem wir nun einige Sätze und Beweise über abzählbare Bäume betrachtet haben, wollen wir jetzt sehen, wie sich diese Techniken verwenden lassen, um Aussagen in anderen Gebieten zu beweisen. In diesem Kapitel werden hauptsächlich technische Vorbereitungen für diese Anwendungen getroffen. In Abschnitt 5.3 werden wir dann eine Anwendung des Satzes von Laver zeigen.

5.1 Grundlegende Definitionen

Sei X ein topologischer Raum.

5.1 Definition. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt ***perfekt***, falls $M \neq \varnothing$ ist und keine isolierten Punkte hat.

5.2 Definition. Eine Menge $Y \subseteq X$ heißt ***G_δ-Menge***, falls $Y = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ für eine Familie $\{U_n\}_{n\in\omega}$ offener Mengen in X ist.

5.3 Definition. Eine Menge $D \subseteq X$ ist ***dicht***, falls ihr Schnitt mit jeder nichtleeren offenen Menge in X nicht leer ist.

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt ***nirgends dicht***, falls das Innere von $\bar{A}$ leer ist.

Gibt es eine abzählbare dichte Menge in X, so heißt X ***separabel***.

Dabei bemerken wir noch: A ist genau dann nirgends dicht, wenn $X \setminus \bar{A}$ dicht ist. Außerdem sieht man direkt: A ist auch genau dann nirgends dicht, wenn $\bar{A}$ nirgends dicht ist.

5.4 Definition. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt ***mager***, falls es eine Familie $\{A_n\}_{n\in\omega}$ nirgends dichter Teilmengen von X mit $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ gibt.

Falls A mager ist, heißt die Menge $B = X \setminus A$ ***komager***, (das heißt: B ist genau dann komager, wenn B den Schnitt einer abzählbaren Familie dichter offener Mengen enthält).

5.5 Definition. $A \subseteq X$ hat die ***Bairesche Eigenschaft***, falls es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, so dass

$$A \triangle U := (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$$

mager ist.

5.6 Definition. Seien X und Y topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist ***Baire-messbar*** (hat die Bairesche Eigenschaft), falls die Urbildmenge jeder offenen Menge in Y die Bairesche Eigenschaft in X hat.

5.2 Baire-Räume und polnische Räume

5.7 Definition. Ein topologischer Raum X heißt ***Baire-Raum***, falls er folgende Bedingung erfüllt:

$(*)$ Jede nichtleere offene Menge in X ist nicht mager.

5.8 Lemma. *Für jeden topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent zu $(*)$:*

(a) Jede komagere Menge ist dicht in X.

(b) Der Schnitt abzählbar vieler dichter offener Mengen ist dicht in X.

Beweis. $(*) \Rightarrow$ *(a)*: Sei B komager in X und sei $U \neq \varnothing$ offen in X. Dann kann U nicht in $X \setminus B$ enthalten sein, weil U sonst mager wäre, was wegen $(*)$ nicht sein kann. Also ist $B \cap U \neq \varnothing$ und damit B dicht.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*: Der Schnitt abzählbar vieler dichter offener Mengen in X ist komager und damit nach (a) dicht.

(b) $\Rightarrow (*)$: Sei $U \neq \varnothing$ offen in X. Angenommen U ist mager. Dann ist $X \setminus U$ komager und enthält darum den Schnitt einer abzählbaren Familie dichter offener Mengen. Damit ist $X \setminus U$ nach (b) dicht. Es ist aber andererseits $U \cap (X \setminus U) = \varnothing$, ein Widerspruch. $\square$

5.9 Definition. Ein topologischer Raum X heißt ***vollständig metrisierbar***, falls es eine Metrik d gibt, die die Topologie erzeugt, so dass (X, d) vollständig ist, also ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Dass es tatsächlich viele Beispiele für Baire-Räume gibt, wird durch den folgenden klassischen Satz klar:

5.10 Satz (Baire Category Theorem). *Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire-Raum. Jeder lokal kompakte Hausdorff-Raum ist ein Baire-Raum.*

Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [5], S.41-42 (8.4).

5.11 Satz. *Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \to Y$ Baire-messbar. Falls die Topologie auf Y eine abzählbare Basis hat*[1]*, dann gibt es ein $G \subseteq X$, so dass G der Schnitt abzählbar vieler dichter offener Mengen ist und $f{\restriction}_G$ stetig ist.*

Ist X außerdem ein Baire-Raum, so ist f stetig auf einer dichten G_δ-Menge.

Beweis. Sei $\{U_n\}_{n\in\omega}$ eine Basis von Y. Dann hat $f^{-1}[U_n]$ die Bairesche Eigenschaft in X. Wir finden also für jedes $n \in \omega$ ein in X offenes V_n und eine Menge F_n, die eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen, nirgends dichten Mengen ist, so dass $f^{-1}[U_n] \triangle V_n \subseteq F_n$ ist. $G_n := X \setminus F_n$ ist dann der abzählbare Schnitt von dichten offenen Mengen, und $G := \bigcap_{n\in\omega} G_n$ ebenso.

Da für jedes $n \in \omega$ nach Konstruktion $f^{-1}[U_n] \cap G = V_n \cap G$ gilt und V_n offen ist, ist $f{\restriction}_G$ stetig.

Ist X ein Baire-Raum, so bekommen wir unter Beachtung von Lemma 5.8(b) das Gewünschte. □

Als nächstes wollen wir einen Satz von Galvin formulieren. Dazu brauchen wir noch folgende Definitionen:

5.12 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ist X separabel und vollständig metrisierbar, so heißt X ***polnisch***.

5.13 Definition. Wenn wir die Menge $2 = \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen und dann $2^{\mathbb{N}}$ als das Produkt abzählbar vieler Kopien von 2 auffassen, so wollen wir den entstehenden topologischen Raum ***Cantorraum*** nennen. Jede zu $2^{\mathbb{N}}$ homöomorphe Menge heißt ***Cantormenge***.

5.14 Satz (Galvin). *Sei X ein nichtleerer perfekter polnischer Raum und $[X]^2 = P_1 \dot\cup \ldots \dot\cup P_k$ eine Partition, so dass für jedes P_i die Menge $\{(x, y) \in X \times X : \{x, y\} \in P_i\}$ die Bairesche Eigenschaft in $X \times X$ hat.*

Dann gibt es eine Cantormenge $C \subseteq X$ mit $[C]^2 \subseteq P_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Für einen direkten Beweis mit den in diesem Kapitel vorgestellten Mitteln sei hier auf [5], S.130-131 (19.7), verwiesen. Wir werden im nächsten Kapitel einen Satz von Blass beweisen, dessen Spezialfall Satz 5.14 ist.

[1] Ein solcher Raum ***erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom*** (*second countable*).

5.3 Eine Anwendung zum Satz von Laver

Mit den bis hier zusammengetragenen Mitteln ist es uns möglich, einen Satz zu formulieren, der das Ergebnis aus Kapitel 3 verwendet. Es sei dabei $I = [0, 1]$ und entsprechend I^ω der Hilbert-Würfel.

Leider reichen die bisherigen Mittel nicht ganz aus, um den Satz auch zu beweisen, aber die noch benötigten Ergebnisse sind überwiegend bekannte Resultate oder leicht zu zeigen.

5.15 Satz. *Sei $f_n : I^\omega \to I$ für jedes $n \in \omega$ eine messbare Funktion oder für jedes $n \in \omega$ eine Baire-messbare Funktion.*

Dann gibt es perfekte Mengen $P_i \subseteq I$ $(i \in \omega)$ und eine Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\omega}$, die monoton und gleichmäßig konvergent auf $\prod_{i\in\omega} P_i$ ist. Die Mengen P_i können dabei so gewählt werden, dass die f_{n_i} stetig auf $\prod_{i\in\omega} P_i$ sind.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir die Hilfsmittel formulieren, die wir in der gegebenen Reihenfolge anwenden werden.

5.16 Lemma. *Sei $D \subseteq I^\omega$ eine dichte G_δ-Menge. Dann gibt es perfekte Mengen $Q_i \subseteq I$ mit $\prod_{i\in\omega} Q_i \subseteq D$.*

Beweis. Sei $D = \bigcap_{i\in\omega} U_i$ mit dichten offenen Mengen U_i, wobei wir ohne Einschränkungen $U_k = \bigcap_{i=0}^k U_i$ annehmen wollen. Die offenen Mengen haben die Form

$$\left\{ V = \prod_{i=0}^{d} W_i \times I^\omega : d \in \omega, W_i \text{ offen in } I \right\}.$$

Darum können wir induktiv bezüglich n (und simultan bezüglich i) Mengen $K_{i,n} = \bigcup_{j=1}^{m_{i,n}} L_j^{i,n}$ finden, wobei $L_j^{i,n}$ abgeschlossene Intervalle mit nichtleerem Inneren sind, so dass gilt:

$$\prod_{i=1}^{d_n} K_{i,n} \times I^\omega \subseteq U_n \text{ und } K_{i,m} \subseteq K_{i,n} \text{ für alle } m \leq n,$$

wobei d_n das Maximum von d_{n-1} und dem größten Index einer Komponente $\neq I$ von U_n ist. Diese Konstruktion ist insbesondere möglich, da jedes U_n dicht und offen ist.

Außerdem wollen wir annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \omega$ die Menge $K_{i,n}$ in jedem Intervall in $K_{i,n-1}$ mindestens zwei Intervalle enthält.

Dann ist $\bigcap_{n\in\omega} K_{i,n}$ eine perfekte Teilmenge von I. Denn angenommen nicht, dann gibt es einen Punkt $x \in \bigcap_{n\in\omega} K_{i,n}$ und eine Umgebung $U(x)$, so dass kein weiterer Punkt der Menge in $U(x)$ liegt. Es gibt aber ein $L_j^{i,n} \subseteq U(x)$, und dieses wird für $m > n$ unterteilt, so dass es ein $L_k^{i,m} \subseteq U(x)$ mit $x \notin L_k^{i,m}$ gibt.

Dann gibt es aber ein $y \in \bigcap_{n\in\omega} K_{i,n}$ mit $y \in L_k^{i,m}$, also auch $y \in U(x)$, $y \neq x$. Also ist $\bigcap_{n\in\omega} K_{i,n}$ perfekt.[2]

Sei außerdem $d_\omega := \sup\{d_n : n \in \omega\}$. Ist $d_\omega = \omega$, so ist $\prod_{i\in\omega} \bigcap_{n\in\omega} K_{i,n} \subseteq D$, sonst ist $\prod_{i\leq d_\omega} \bigcap_{n\in\omega} K_{i,n} \times I^\omega \subseteq D$. □

5.17 Satz (Lusin). *Sei X ein metrisierbarer Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf X. Sei außerdem Y ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis der Topologie und $f : X \to Y$ eine μ-messbare Funktion.*

Dann gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine abgeschlossene Menge $F \subseteq X$, so dass $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ gilt und $f\restriction_F$ stetig ist.

Beweis. Sei $\{U_i\}_{i\in\omega}$ eine Basis der Topologie auf Y und $n \in \omega$ beliebig. Dann ist $f^{-1}(U_n)$ nach Voraussetzung μ-messbar. Da μ regulär ist[3], finden wir eine abgeschlossene Menge F_n und eine offene Menge V_n, so dass $F_n \subseteq f^{-1}(U_n) \subseteq V_n$ und $\mu(V_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ gilt.

Sei $U := \bigcup_{n\in\omega}(V_n \setminus F_n)$, dann ist U offen und $\mu(U) < \varepsilon$. Sei nun $F := X \setminus U$. Damit ist F abgeschlossen, es ist $\mu(X \setminus F) = \mu(U) < \varepsilon$, und wegen $f^{-1}(U_i) \cap F = V_i \cap F$ ist $f\restriction_F$ stetig. □

5.18 Satz (Eggleston [3]). *Sei K ein kompakter metrischer Raum mit einem Borel-Maß λ, so dass $\lambda(K) = 1$ ist und λ jeder nichtleeren offenen Menge positives Maß zuordnet. Sei ν das Produktmaß auf $I \times K$ und sei $M \subseteq I \times K$ mit $\nu(M) > 0$.*

Dann existiert ein perfektes $Q \subseteq I$ und ein $M' \subseteq K$, so dass $Q \times M' \subseteq M$ und $\lambda(M') > 0$ ist. Es kann dabei sogar für jedes $\varepsilon > 0$ erreicht werden, dass $\lambda(M') \geq \lambda(\pi_2(M)) - \varepsilon$ ist.[4]

Zum Beweis, welcher nicht kompliziert aber recht langwierig ist, sei hier nur auf [3] verwiesen.

5.19 Lemma. *Seien $Q_i \subseteq I$ $(i \in \omega)$ perfekt und seien f und g_n $(n \in \omega)$ stetige Funktionen von $\prod_{i\in\omega} Q_i$ nach I.*

Dann gibt es perfekte $P_i \subseteq Q_i$, ein $R \in \{<, =, >\}$ und eine Teilfolge $(g_{n_j})_{j\in\omega}$ von $(g_n)_{n\in\omega}$, so dass für jedes $j \in \omega$ und $\vec{p} \in \prod_{i\in\omega} P_i$ gilt: $R(g_{n_j}(\vec{p}), f(\vec{p}))$.

Beweis. Es sei vorweg daran erinnert, dass

$$K_i = \{s \in \{0,1\}^{<\omega} : s(j) = 0 \text{ für alle } j < i\}$$

[2]Dieses Argument ist auch als *Fusion-Lemma* bekannt (siehe etwa [10], S.54)

[3]Für einen Beweis hiervon siehe [5], S.107 (17.10)

[4]Dabei meinen wir für $M \subseteq I \times K$ mit $\pi_2(M)$ die Projektion von M auf seine Komponenten in K.

ist. Wir wählen nun induktiv, unter Ausnutzung der Stetigkeit der Funktionen, abgeschlossene Intervalle $J^i_s \subseteq Q_i$ (für $i \in \omega$ und $s \in K_i$), so dass gilt:

(i) Für $s \prec t$ ist $J^i_s \supseteq J^i_t$ (für $i \in \omega$ und $s, t \in K_i$).

(ii) Sind $s^\frown 0$ und $s^\frown 1$ in K_i, so sind $J^i_{s^\frown 0}$ und $J^i_{s^\frown 1}$ disjunkt.

(iii) Ist $\vec{s} \in \bigotimes \vec{K}$ mit $|\vec{s}| = n$, dann gilt für ein $R_{\vec{s}} \in \{<, =, >\}$ und alle $\vec{p} \in \prod_{i\in\omega} J^i_{s_i}$: $R_{\vec{s}}(g_n(\vec{p}), f(\vec{p}))$.

Dies induziert eine Färbung von $\bigotimes \vec{K}$ mit drei Farben. Nach Satz 3.8 gibt es dann perfekte Teilbäume T_i von K_i und ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$, so dass $\bigotimes^A \vec{T}$ einfarbig ist.

Sei

$$P_i := \bigcup_{b\in[T_i]} \bigcap_{n\in\omega} J^i_{b\upharpoonright n}.$$

Dann erfüllen $(P_i)_{i\in\omega}$ und $(g_j)_{j\in A}$ das Lemma. $\square$

Zuletzt geben wir einen klassischen Satz der Analysis an:

5.20 Satz (Dini). *Sei K kompakter metrischer Raum und seien $f_n, f : K \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ist die Folge $(f_n)_{n\in\omega}$ monoton und punktweise konvergent gegen f, so ist sie sogar gleichmäßig konvergent.*

Damit haben wir genügend Hilfsmittel gesammelt und wollen nun den Satz 5.15 beweisen.

Beweis von 5.15. Zunächst wollen wir die Aussagen auf den Fall reduzieren, dass die f_n stetig sind. Genauer wollen wir im Folgenden perfekte $Q_i \subseteq I$ ($i \in \omega$) wählen, so dass jedes der f_n stetig auf $\prod_{i\in\omega} Q_i$ ist.

Falls die f_n Baire-messbar sind, so gibt es nach Satz 5.11 eine dichte G_δ-Menge W, auf der sie alle stetig sind. Dann finden wir nach Lemma 5.16 perfekte Mengen Q_i mit $\prod_{i\in\omega} Q_i \subseteq W$.

Falls die f_n messbar sind, wählen wir mit Hilfe des Satzes von Lusin eine Menge mit positivem μ-Maß, auf der alle Funktionen stetig sind. Nun müssen wir noch zeigen, dass es für jedes $X \subseteq I^\omega$ mit $\mu(X) > 0$ perfekte $Q_i \subseteq I$ mit $\prod_{i\in\omega} Q_i \subseteq X$ gibt.

Hierzu sei $C \subseteq X$ abgeschlossen mit $\mu(C) > 0$. Wir wenden nun den Satz von Eggleston ω-mal an: In Schritt n haben wir $Q_0 \times \ldots \times Q_{n-1} \times C_n \subseteq C$ gewählt, so dass $\mu(C_n) > 0$ und jedes Q_i perfekt ist (wir bemerken dabei, dass $C_n \subseteq I^\omega$ ist). Dann finden wir nach 5.18 ein perfektes Q_n und ein $C_{n+1} \subseteq I^\omega$ mit $\mu(C_{n+1}) > 0$, so dass $Q_n \times C_{n+1} \subseteq C_n$ ist.

Da C abgeschlossen gewählt war, ist dann $\prod_{i\in\omega} Q_i \subseteq C$.

Damit haben wir in beiden Fällen gezeigt, dass wir perfekte $Q_i \subseteq I$ finden können, so dass jedes $f_n : \prod_{i\in\omega} Q_i \to I$ stetig ist.

Wir wählen nun induktiv eine Teilfolge (g_n) von (f_n) und eine Folge perfekter Mengen $(J_s^i)_{i\in\omega, s\in K_i}$, so dass gilt:

(i) $Q_i \supseteq J_s^i \supseteq J_t^i$ für alle $s \prec t \in K_i$ und für alle $i \in \omega$.

(ii) $J^i_{s^\frown 0} \cap J^i_{s^\frown 1} = \varnothing$ falls $s^\frown 0$ und $s^\frown 1$ in K_i sind.

(iii) Sei $\vec{s} \in \bigotimes \vec{K}$ mit $|\vec{s}| = n$. Dann existiert ein $R_{\vec{s}} \in \{<, =, >\}$, so dass für alle $n' > n$ gilt: $R_{\vec{s}}(g_{n'}(\vec{q}), g_n(\vec{q}))$ für alle $\vec{q} \in \prod_{i\in\omega} J^i_{s_i}$.

Die J_s^i und g_n werden dabei durch wiederholtes Anwenden von Lemma 5.19 ausgewählt.

Die verschiedenen $R_{\vec{s}}$ induzieren dann eine 3-Färbung auf $\bigotimes \vec{K}$. Wie schon im Beweis zu Lemma 5.19 liefert uns eine Anwendung des Satzes 3.8 perfekte $P_i' \subseteq Q_i$ und eine Teilfolge $(h_n)_{n\in\omega}$ von $(g_n)_{n\in\omega}$, welche aufgrund der Definition der Färbung monoton konvergent ist (konvergent, weil alle Funktionen nach I abbilden).

Dass die h_n gleichmäßig konvergent auf $\prod_{i\in\omega} P_i$ (für gewisse perfekte $P_i \subseteq P_i'$) sind, zeigen wir folgendermaßen:

Der Limes h von h_n auf $\prod_{i\in\omega} P_i'$ hat als Limes von stetigen Funktionen die Bairesche Eigenschaft. Darum ist für ein in $\prod_{i\in\omega} P_i'$ komageres H die Funktion $h\restriction_H$ stetig. Da H komager ist, gibt es also perfekte P_i mit $\prod_{i\in\omega} P_i \subseteq H$. Der Satz von Dini liefert dann die gleichmäßige Konvergenz. $\square$

Kapitel 6

Satz von Blass

6.1 Definition. In diesem Kapitel wollen wir unsere Definition von einem Baum T etwas enger als bisher fassen. Das heißt: Eine nichtleere Menge T mit einer Halbordnung $\prec$ heißt hier ***Baum***, wenn wie bisher gilt:

(i) T hat ein kleinstes Element, genannt die Wurzel von T.

(ii) Für jedes $t \in T$ ist $\{q \in T : q \prec t\}$ eine endliche Kette.

Zusätzlich fordern wir noch:

(iii') Jedes $t \in T$ hat höchstens zwei direkte Nachfolger und T ist perfekt (das heißt, jeder Knoten in T hat zwei nicht vergleichbare Nachfolger).

Damit haben genau wie bisher alle Äste die Länge ω.

Eine weitere Folge von (iii') ist, dass alle hier betrachteten Bäume als Teilmengen von $\{0,1\}^{<\omega}$ angesehen werden können. Denn zu jedem perfekten Baum gibt es einen (nicht eindeutigen) perfekten Teilbaum von $\{0,1\}^{<\omega}$, der eine äquivalente „Verzweigungsstruktur“ aufweist.

Die zusätzliche Struktur, die wir dadurch in den Bäumen erhalten, wollen wir nun nutzen, um perfekte Bäume mit perfekten Teilmengen von $I = [0,1]$ in Verbindung zu bringen.

Zuerst jedoch wollen wir die folgende Schreibweise einführen:

6.2 Definition. Wir schreiben $\boldsymbol{[T]}$ für die Menge der Äste von T. Dies steht etwas im Konflikt mit unserer Notation $[T]^n$ für die Menge der n-elementige Teilmengen von T. Da wir aber in diesem Kapitel nie $[T]^n$, sondern höchstens $[[T]]^n$ (also die Menge der n-elementigen Ast-Mengen) verwenden, bleiben wir bei der üblichen Notation.

Offenbar ist $\bigcup[T] = T$ und außerdem können wir $[T]$ als Teilmenge von $\{0,1\}^{\omega}$ auffassen.

Wie bei der Binärdarstellung der reellen Zahlen üblich wollen wir nun die folgende Äquivalenzrelation $\sim$ betrachten: Sei $T \subseteq \{0,1\}^{<\omega}$ ein Baum und $x, y \in [T]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad & \text{Es gibt ein } s \in T \text{ mit } x = s^\frown(0,1,1,1,\ldots),\ y = s^\frown(1,0,0,0,\ldots) \\ & \text{oder } x = s^\frown(1,0,0,0,\ldots),\ y = s^\frown(0,1,1,1,\ldots). \end{aligned}$$

Ordnen wir nun $[T]/\sim$ lexikographisch, so erhalten wir einen Ordnungs-Isomorphismus zwischen $[T]/\sim$ und $I = [0,1]$. Zur besseren Übersicht werden wir ab jetzt $[T]/\sim = [T]$ schreiben.

Auf $[T]$ betrachten wir dann die durch den Isomorphismus induzierte Topologie.

Mit diesen Vorüberlegungen wird nachvollziehbar, weshalb es möglich ist, den folgenden Satz mit Hilfe eines Ergebnisses für Bäume zu beweisen. Der Spezialfall $n = 2$ dieses Satzes ist uns schon in Kapitel 5 als *Satz von Galvin* begegnet.

Wir werden ab jetzt Färbungen als Funktionen betrachten, und nicht mehr so sehr als Partitionen. Um bestimmte Qualitäten (wie Stetigkeit, Messbarkeit oder Ähnliches) dieser Funktionen ausdrücken zu können, müssen wir noch eine Topologie auf der zu färbenden Menge definieren.

Sei M eine Menge. $U \subseteq [M]^n$ ist ein Element der Basis der Topologie auf $[M]^n$, falls es disjunkte offene Mengen $U_1, \ldots, U_n$ in M gibt so dass gilt:

$$U = \{\{x_1, \ldots, x_n\} : x_i \in U_i\}.$$

Hierbei sieht man, dass die Stetigkeit (und andere Eigenschaften) einer Funktion mit Urbildraum $[M]^n$ sozusagen „komponentenweise“ geprüft werden kann.

6.3 Satz (Blass [2]). *Sei $P \subseteq [0,1]$ perfekt, $c : [P]^n \to \omega$ Borel- oder Baire-messbar mit endlichem Bildbereich und $n \in \omega$. Dann gibt es ein perfektes $P' \subseteq P$, so dass $|c''[P']^n| \leq (n-1)!$ ist.*

Der folgende Satz ist eine etwas schwächere Version des Satzes von Halpern und Läuchli. Dabei handelt es sich um den Satz von Laver (Satz 3.8) für endlich viele Bäume. Wir können also Satz 6.4 als Korollar aus Satz 3.8 ansehen, er lässt sich aber auch leicht aus Satz 2.2 beweisen.

6.4 Satz. *Sei $\vec{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ ein Tupel perfekter Bäume und $\bigotimes \vec{T} = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_p$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \ldots, p\}$, ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ und perfekte Teilbäume T_i' von T_i $(1 \leq i \leq d)$, so dass $\bigotimes^A \vec{T}' \subseteq C_j$ ist.*

Bevor wir uns nun dem eigentlichen Thema des Kapitels zuwenden, halten wir das Folgende fest:

6.5 Lemma (und Definition). *Sei T ein Baum (also ein perfekter Teilbaum von $\{0,1\}^{<\omega}$). Dann gibt es einen Teilbaum $T' \subseteq T$, so dass jedes Level von T' höchstens einen Spaltknoten enthält. Ein solcher Baum heißt* ***windschief*** *(skew).*

Beweis. Wir nummerieren die Knoten von T und dünnen dann schrittweise aus, so dass wir eine Folge $T = T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots$ von perfekten Bäumen bekommen: Angenommen wir haben T_n bereits definiert und einen Spaltknoten oberhalb von t_{n-1} auf Level l_n gefunden. Ist dann $t_n \notin T_n$, setzen wir $T_{n+1} = T_n$ und $l_{n+1} = l_n$. Ist t_n noch in T_n enthalten, suchen wir uns einen Spaltknoten t in T_n oberhalb von t_n mit $|t| =: l \geq l_n$, und beschneiden T_n so, dass es außer t keine Spaltknoten mit Höhe k für $l_n \leq k \leq l$ gibt. Den entstehenden Baum nennen wir T_{n+1} und setzen außerdem $l_{n+1} = l + 1$.

Auf diese Weise ist sichergestellt, dass jeder Knoten in $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ einen Spaltknoten als Nachfolger hat und also perfekt ist. Außerdem hat T' sicherlich auf jedem Level höchstens einen Spaltknoten und ist somit windschief. □

Vereinbarung. Wann immer wir im weiteren Verlauf des Kapitels einen Baum ausdünnen, wollen wir davon ausgehen, dass der Baum bereits windschief gemacht wurde.

Wir werden nun nicht mehr d-Tupel von Knoten d verschiedender Bäume färben, sondern n-Tupel von Ästen eines perfekten Baums.

6.6 Lemma. *Für jeden Baum T und jedes stetige $c : [[T]]^n \to \omega$ gibt es ein perfektes $T' \subseteq T$, so dass für jedes $m \in \omega$ und jedes $\vec{t} = \{t_1, \ldots, t_n\} \in [T'(m)]^n$ die Funktion c konstant ist auf der Menge*

$$\{\{x_i\}_{i=1}^n : x_i \in [T'_{t_i}]\}.$$

Beweis. Wir wollen eine Folge von Bäumen $T = T^1 \supseteq T^2 \supseteq T^3 \supseteq \ldots$ und eine streng monoton steigende Folge $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen konstruieren, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $T^{i+1}(m) = T^i(m)$ für alle $m \leq k_i$.

(ii) Für jedes $\vec{t} \in [T^i(k_i)]^n$ ist c konstant auf $\{\{x_j\}_{j=1}^n : x_j \in [T^i_{t_j}]\}$.

(iii) T^{i+1} hat genau einen Spaltknoten v_{i+1}, für den $|v_{i+1}| \in [k_i, k_{i+1})$ ist.

(iv) Für jeden Knoten $y \in T^i$ mit $|y| \leq k_i$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so dass der Spaltknoten v_j oberhalb von y ist.

Wir fixieren hierzu zunächst eine Wohlordnung von Ordnungstyp ω auf den Knoten von T, damit wir sie nacheinander betrachten können. Seien nun die Folgen bis T^i und k_i konstruiert. Wir werden nur oberhalb des Levels k_i Veränderungen vornehmen, darum wird (i) erfüllt.

Für (iv) betrachten wir den (in der neuen Ordnung) kleinsten Knoten t_j, der noch nicht betrachtet wurde und noch in T_i enthalten ist. Zu diesem finden wir einen Spaltknoten $v_{i+1} \succ t_j$ mit $|v_{i+1}| = k > k_i$. Wir beschneiden nun T^i, so dass es keine weiteren Spaltknoten zwischen den Leveln k_i und k (inklusive dieser Level) gibt.

Sei $\{s_1, \ldots, s_m\}$ eine Aufzählung der verbleibenden Knoten in $T^i(k+1)$ und seien $x'_1, \ldots, x'_m$ Äste im (ausgedünnten) Baum T^i, so dass $s_j \in x'_j$ ist. Wir definieren außerdem $B' := \{x'_1, \ldots, x'_m\}$.

Da c stetig ist, gibt es zu jedem $\{x_j\}_{j=1}^n \in [B']^n$ eine Menge $\{t'_j\}_{j=1}^n$ mit $t'_j \in x_j$, so dass $\{\{x''_j\}_{j=1}^n : x''_j \in [T^i_{t'_j}]\}$ im Urbild von $c(\{x_j\}_{j=1}^n)$ enthalten ist.[1] Es ist klar, dass wir dann auch eine kompatible Menge $\{t_j\}_{j=1}^n$ auf einem Level $\geq |\vec{t}'|$ fixieren können, das diese Eigenschaft hat.

Da es nur $\binom{m}{n}$ und also endlich viele verschiedene $\{x_j\}_{j=1}^n \in [B']^n$ gibt, können wir k_{i+1} als die maximale Ordnung der auftretenden Knotenmengen $\vec{t}$ festlegen.

Abschließend erhalten wir T^{i+1}, in dem wir nochmals T^i beschneiden, so dass gilt: für jedes $t \in T^{i+1}$ mit $|t| \in [k+1, k_{i+1}]$ gibt es ein $x \in B'$ mit $t \in x$.

Es ist klar, dass die Bedingungen (i), (iii) und (iv) dafür sorgen, dass $T' = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} T^i$ perfekt ist. (ii) liefert die Aussage des Lemmas für T'. $\square$

6.7 Definition. Sei $[T] \subseteq \{0,1\}^\omega$ lexikographisch geordnet. Für $\{x_1, \ldots, x_n\} \in [[T]]^n$ steht die Schreibweise $\boldsymbol{\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}}$ für eine Umindizierung der x_i, so dass gilt:

$$x_1 <_{Lex} x_2 <_{Lex} \ldots <_{Lex} x_n.$$

6.8 Definition. Sei T ein Baum. Für zwei verschiedene Äste $x_i, x_j \in [T]$ definieren wir $\Delta(x_i, x_j) := \min\{k : x_i(k) \neq x_j(k)\}$.

6.9 Definition. Sei T ein windschiefer Baum und sei $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}$ ein Element aus $[[T]]^n$. Das ***Muster*** (oder *pattern*) von $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}$ ist eine Permutation σ von $\{1, \ldots, n-1\}$ ($\sigma \in S_{n-1}$), welche durch

$$i <_\sigma j \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(x_i, x_{i+1}) < \Delta(x_j, x_{j+1})$$

[1] Man beachte, dass wir auf $[T]$ die von I geerbte Topologie betrachten und I regulär ist.

bestimmt ist.

Wir können nun einen Satz zeigen, mit dessen Hilfe es dann ein Leichtes sein wird, den Satz von Blass zu beweisen.

6.10 Satz ([2, 10]). *Sei T ein Baum, M endlich, $c\colon [[T]]^n \to M$ stetig und $\sigma \in S_{n-1}$. Dann gibt es einen Teilbaum $T' \subseteq T$, so dass c konstant auf den $\{x_1, \dots, x_n\}_{<_{Lex}}$ in $[[T']]^n$ mit Muster σ ist.*

Beweis. Induktion über n.

Sei l das größte Element von $\{1, \dots, n-1\}$ in der von σ induzierten Ordnung. Wir konstruieren einen Baum T' als Schnitt einer Folge von Bäumen $T = T^1 \supseteq T^2 \supseteq \dots$, welche für eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen k_i ($i \in \mathbb{N}$) (unter anderem) folgendes erfüllen:

(i) $T^{i+1}(m) = T^i(m)$ für alle $m \leq k_i$.

(ii) T^{i+1} hat genau einen Spaltknoten v_{i+1}, für den $|v_{i+1}| \in [k_i, k_{i+1})$ gilt.

(iii) Für jeden Knoten $y \in T^i$ mit $|y| \leq k_i$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so dass der Spaltknoten v_j oberhalb von y ist.

Wir fixieren zunächst wieder auf T eine Wohlordnung $<$ vom Ordnungstyp ω, um später (iii) induktiv erfüllen zu können. Seien die Folgen bis k_i und T^i schon gegeben. Wir dünnen T^i nun nach Lemma 6.6 so aus, dass c für jedes $k \in \omega$ und jedes $\{t_1, \dots, t_n\} \in [T^i(k)]^n$ konstant auf $\{\{x_j\}_{j=1}^n : x_j \in [T^i_{t_j}]\}$ ist.

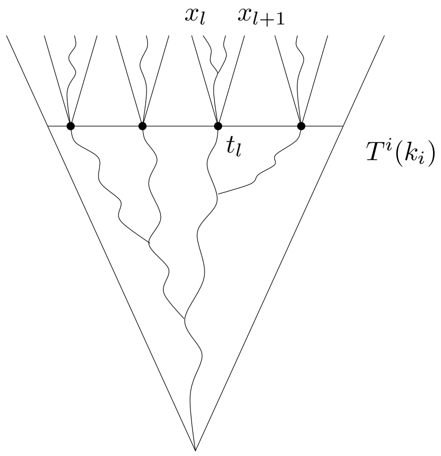
Nun konstruieren wir eine endliche, absteigende Folge von Bäumen $T^i = T^{i(0)} \supseteq T^{i(1)} \supseteq \dots \supseteq T^{i(r)}$, so dass $T^{i(j)}(m) = T^i(m)$ für alle $j \leq r$ und $m \leq k_i$ ist.

Sei nun $s \in T^i(k_i)$. Wir wählen (falls möglich) eine $(n-1)$-elementige Menge $\{t_1, \dots, t_l = s, t_{l+2}, \dots, t_n\}$ von paarweise verschiedenen Knoten aus $T^i(k_i)$, so dass gilt: Das Muster einer beliebigen Menge $\{x_1, \dots, x_n\}_{<_{Lex}} \in [[T^i]]^n$, für die

$$(*) \qquad \begin{aligned} & t_i \in x_i \text{ für alle } i \leq n \text{ mit } i \neq l+1 \text{ und} \\ & t_l \in x_{l+1} \end{aligned}$$

gilt, entspricht σ.

Wir sagen dann, das ***l*-Muster** einer solchen Menge $\{t_1, \dots, t_l, t_{l+2}, \dots, t_n\}$ ist σ.



Für $j \leq n$ und $j \neq l+1$ sei $P_j := T^i_{t_j}$. Wir definieren eine Färbung $f : \bigotimes(P_1, \ldots, P_l, P_{l+2}, \ldots, P_n) \to N$ mit $N \subseteq M$ auf folgende Weise: Sei $(u_1, \ldots, u_l, u_{l+2}, \ldots, u_n)$ ein $(n-1)$-Tupel aus $\bigotimes(P_1, \ldots, P_l, P_{l+2}, \ldots, P_n)$, mit $|u_i| =: q$. Sei $k < q$ die maximale natürliche Zahl, so dass $u_l(k)$ ein Spaltknoten von T_i ist, falls so eine Zahl existiert, sonst sei $k = 0$. Dabei betrachten wir wieder u_l als Element von $\{0,1\}^{<\omega}$ und $u_l(k)$ als Anfangsstück der Länge k.

Falls $k \geq k_i$ ist, setzen wir $f((u_1, \ldots, u_l, u_{l+2}, \ldots, u_n))$ auf den konstanten Wert von c auf

$$\left\{ \{x_j\}_{j=1}^n : \text{ es ist } x_l \in \left[T^i_{(u_l(k))^\frown 0}\right],\ x_{l+1} \in \left[T^i_{u_l(k)^\frown 1}\right], \text{ sonst } x_j \in \left[T^i_{u_j(k+1)}\right] \right\}.$$

Andernfalls setzen wir $f(u_1, \ldots, u_l, u_{l+2}, \ldots, u_n)$ auf einen beliebigen Wert von c.

Mit Satz 6.4 (für $d = n-1$ und $p = |N|$) können wir perfekte $P'_j \subseteq P_j$ (mit $j \leq n$, $j \neq l+1$) und ein $A \in [\omega]^{\aleph_0}$ finden, so dass f konstant auf $\bigotimes^A(P'_1, \ldots, P'_l, P'_{l+2}, \ldots, P'_n)$ ist.

Das bedeutet, dass wir einen Baum

$$T^{i(1)} := \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq l+1}} P'_j \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{t \in T^i(k_i) \\ t \notin \{t_1, \ldots, t_l, t_{l+2}, \ldots, t_n\}}} T^i_t \right)$$

bekommen, der etwas dünner als T^i ist (und bis Level k_i mit ihm übereinstimmt), so dass gilt: für jedes $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}$ aus $[[T^{i(1)}]]^n$, welches $(*)$ erfüllt, hängt die Farbe $c(\{x_1, \ldots, x_n\})$ nicht von x_{l+1} ab; mit anderen Worten gilt für jedes $x'_{l+1} \ni s$, $x'_{l+1} \neq x_l$:

$$c(\{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n\}) = c(\{x_1, \ldots, x_l, x'_{l+1}, \ldots, x_n\}).$$

Wir verfeinern nun nach dem beschriebenen Verfahren weiter für jede Wahl von s und $(n-1)$-elementiger Mengen $\{t_1, \ldots, t_l = s, t_{l+2}, \ldots, t_n\}$ paarweise verschiedenen Knoten aus $T^i(k_i)$ mit l-Muster σ. Dadurch erhalten wir die gesuchte Kette $T^i = T^{i(0)} \supseteq T^{i(1)} \supseteq \ldots \supseteq T^{i(m)}$ von Verfeinerungen. Setzen wir $\widetilde{T}^{i+1} := T^{i(m)}$, dann gilt für jedes $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}} \in [[\widetilde{T}^{i+1}]]^n$ mit Muster σ, für das gilt:

$$\begin{aligned} &\Delta(x_j, x_{j+1}) < k_i \text{ für } j \neq l, \\ &\Delta(x_l, x_{l+1}) \geq k_i, \end{aligned}$$

dass der Wert $c(\{x_1, \ldots, x_n\})$ nicht von der Wahl von x_{l+1} abhängt.

Nun suchen wir den kleinsten Knoten $y \in T^i$ mit $|y| \leq k_i$ ohne Spaltknoten oberhalb von y vor Level k_i und finden dann einen Spaltknoten v_{i+1} in $\widetilde{T}^{i+1}$, so dass $v_{i+1} > y$ ist. Wir setzen $k_{i+1} = |v_{i+1}| + 1$ und verfeinern $\widetilde{T}^{i+1}$ so, dass v_{i+1} der einzige Spaltknoten in $\widetilde{T}^{i+1}$ mit $|v_{i+1}| \in [k_i, k_{i+1})$ ist. Damit ist die Konstruktion von T^{i+1} abgeschlossen.

Sei $T' = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} T^i$. Dann hängt für jedes $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}$, mit Elementen aus $[T']$ und Muster σ, der Wert $c(\{x_1, \ldots, x_n\})$ nicht von x_{l+1} ab. Deshalb sind wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung fertig. $\square$

Beweis von Satz 6.3. Wie im Beweis von Satz 5.15 ist es uns möglich, P so zu verkleinern, dass es perfekt bleibt und c stetig wird.

Sei dann T der perfekte Baum mit $[T] = P$. Sei außerdem $\sigma_1, \ldots, \sigma_{(n-1)!}$ eine Auflistung der Elemente von S_{n-1}. Wir konstruieren dann eine Folge $T = T_0 \supseteq \ldots \supseteq T_{(n-1)!}$ perfekter Bäume, indem wir den Satz 6.10 im j-ten Schritt auf T_{j-1}, $c\restriction_{[[T_{j-1}]]^n}$ und σ_j anwenden. Dadurch bekommen wir einen perfekten Baum T_j, der einfarbig auf den Ast-Mengen mit Muster σ_j ist.

Da jedes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Muster aus S_{n-1} hat und darum in einer Stufe $j \in \{1, \ldots, (n-1)!\}$ betrachtet wurde, erhalten wir eine Menge $P' := [T_{(n-1)!}]$ deren Bild unter c höchstens $(n-1)!$-viele Elemente haben kann. $\square$

6.1 Bemerkungen

Die Anzahl der nötigen Farben ist mit $(n-1)!$ bestmöglich bestimmt, wie das folgende Argument zeigt:

6.11 Lemma. *Sei T ein perfekter Baum, $n \geq 2$ und $\sigma \in S_{n-1}$. Dann gibt es Äste $\{x_1, \ldots, x_n\}_{<_{Lex}}$ in T mit Muster σ.*

Beweis. Induktion über n. Für $n = 2$ gibt es nur ein Muster, und da T perfekt ist, gibt es zwei verschiedene Äste.

Sei nun $n > 2$ und $\sigma = (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in S_{n-1}$. Wir betrachten nun die Permutation $(i'_1, \ldots, i'_{n-2}) \in S_{n-2}$, wobei gilt:

$$i'_j = \begin{cases} i_j & \text{falls } i_j < i_{n-1}, \\ i_j - 1 & \text{falls } i_j > i_{n-1}. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung gibt es Äste $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}_{<_{Lex}}$ in T mit Muster $(i'_1, \ldots, i'_{n-2})$. Da T perfekt ist, enthält $x_{i'_{n-2}+1}$ einen Spaltknoten v_n, der höher ist als die Verzweigungen der x_i (für den also $|v_n| > \Delta(x_i, x_j)$ für alle $i, j \leq n-1$ gilt). Also gibt es einen Ast x_n in T mit $\Delta(x_{i'_{n-2}+1}, x_n) = |v_n|$. Sortieren wir nun x_n entsprechend der lexikographischen Ordnung in die Menge $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ ein (und ändern die Indizes entsprechend), so erhalten wir eine Menge von n Ästen aus T mit Muster σ. $\square$

Wie man anhand von Lemma 6.6 leicht sieht, gibt es perfekte Bäume, in denen die Färbung, die die Ast-Mengen gemäß ihrer Muster färbt, stetig ist. Darum ist $(n-1)!$ tatsächlich die beste untere Schranke für die Anzahl der Farben.

Es sei noch bemerkt, dass der Satz 6.3 auch für perfektes $P \subseteq \mathbb{R}$, und noch etwas allgemeiner für perfekte Teilmengen vollständig metrisierter Räume gilt. Der Beweis hierzu ist offensichtlich.

Literaturverzeichnis

[1] Spiros A. Argyros, Vaggelis Felouzis, and Vassilis Kanellopoulos, *A Proof of Halpern-Läuchli Partition Theorem*, Eur. J. Comb. **23** (2002), no. 1, 1–10.

[2] Andreas Blass, *A Partition Theorem for Perfect Sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 271–277.

[3] H.G. Eggleston, *Two Measure Properties of Cartesian Product Sets*, Quart. J. Math. Oxfort (2) **5** (1954), 108–115.

[4] James D. Halpern and Hans Läuchli, *A Partition Theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **124** (1966), 360–367.

[5] Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[6] Richard Laver, *Products of Infinitely Many Perfect Trees*, J. London Math. Soc. (2) **29** (1984), 385–396.

[7] Keith R. Milliken, *A Ramsey Theorem for Trees*, J. Comb. Theory (Series A) **26** (1979), 215–237.

[8] Frank P. Ramsey, *On A Problem of Formal Logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1930), 264–286.

[9] Waclaw Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) (1933), no. 3, 285–287.

[10] Stevo Todorchevich and Ilijas Farah, *Some Applications of the Method of Forcing*, Yensey Publishing Company, Moscow, 1995.