Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 2 —

Aufgabe 2.1 (10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $l \in \mathbb{R}^E$ eine Kantenlängenfunktion. Bestimmen Sie einen Algorithmus, der einen Wald $W = (V, F)$ mit $F \subseteq E$ findet, so dass für alle Wälder $W' = (V, F')$ mit $F' \subseteq E$ gilt:

$$\sum_{e \in F} l(e) \geq \sum_{e \in F'} l(e).$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 2.2 (10 Punkte) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $l \in \mathbb{R}^E$ eine Kantenlängenfunktion.

a) Zeigen Sie die folgende Aussage: Ein Spannbaum $H = (V, T)$ ist genau dann minimaler Spannbaum von G und l, wenn für alle $e \in T$ und alle $f \in E \setminus T$, für die $(V, (T \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ ein Baum ist, stets $l(f) \geq l(e)$ gilt.

b) Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus Teil (a) um ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines eindeutigen minimalen Spannbaums anzugeben und zu beweisen.

Aufgabe 2.3 (10 Punkte) Sei

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 10}$$

und sei $l = (3, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 3, 0) \in \mathbb{R}^{10}$. Finden Sie eine Auswahl $I \subseteq \{1, \ldots, 10\}$ von drei linear unabhängigen Spaltenvektoren von V, so dass $\sum_{i \in I} l(i)$ minimal ist. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 2.4 (Präsenzaufgabe) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Durch eine beliebige Orientierung der Kanten von G erhalte man eine gerichteten Graph $D = (V, A)$. Zeigen Sie, dass Mengen von linear unabhängigen Spalten der Inzidenzmatrix M von D genau Wäldern $W = (V, F)$ mit $F \subseteq E$ entsprechen.

Abgabe: Bis Dienstag, 2. Mai 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 2.1, 2.2 und 2.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer (!) auf die Abgabe schreiben.