Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 2 —

Aufgabe 2.1 (10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $l \in \mathbb{R}^E$ eine Kantenlängenfunktion. Bestimmen Sie einen Algorithmus, der einen Wald $W = (V, F)$ mit $F \subseteq E$ findet, so dass für alle Wälder $W' = (V, F')$ mit $F' \subseteq E$ gilt:

$$\sum_{e \in F} l(e) \geq \sum_{e \in F'} l(e).$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Lösung:
Eingabe: $G = (V, E)$ Graph, $l \in \mathbb{R}^E$ Kantenlängenfunktion
Ausgabe: $W = (V, F)$ ein Wald mit maximalem Gewicht und $F \subseteq E$.
Pseudocode:

$F = \emptyset$
while $\exists e \in E \backslash F$ so dass $(V, F \cup \{e\})$ Wald und $l(e) > 0$:
  wähle $e \in E \backslash F$ mit $l(e)$ maximal, so dass $W = (V, F \cup \{e\})$ ein Wald ist
  $F = F \cup \{e\}$

Definiere $\tilde{E} = \{e \in E : l(e) > 0\}$. Dann ist die Ausgabe des Algorithmus' ein Wald $W = (V, F)$ mit $F \subseteq \tilde{E}$, und der Algorithmus entspricht genau dem Greedy-Algorithmus für $(\tilde{E}, \mathcal{I})$ aus Definition 3.5, wobei $\mathcal{I}$ wie in Definition 3.4 definiert ist.
Die Korrektheit folgt dann mit Satz 3.6, da nach Wahl von $\tilde{E}$ ein Wald mit maximalem Gewicht eine Basis ist.

Aufgabe 2.2 (10 Punkte) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $l \in \mathbb{R}^E$ eine Kantenlängenfunktion.

a) Zeigen Sie die folgende Aussage: Ein Spannbaum $H = (V, T)$ ist genau dann minimaler Spannbaum von G und l, wenn für alle $e \in T$ und alle $f \in E \setminus T$, für die $(V, (T \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ ein Baum ist, stets $l(f) \geq l(e)$ gilt.

b) Verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus Teil (a) um ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines eindeutigen minimalen Spannbaums anzugeben und zu beweisen.

Lösung:

a) “$\Rightarrow$”: Wäre $l(f) < l(e)$, dann wäre $(V, (T \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ ein Spannbaum von geringerer Länge als H.

   “$\Leftarrow$”: Wir zeigen: Falls H nicht minimal ist, dann gibt es $e \in T$ und $f \in E \setminus T$, so dass $(V, (T \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ Spannbaum ist und $l(f) < l(e)$.

Wähle einen minimalen Spannbaum $H' = (V, T')$ so, dass $|T \cap T'|$ maximal ist (unter allen minimalen Spannbäumen). Sei $f \in T' \setminus T$. Da H' minimal zusammenhängend ist, hat der Graph $(V, T' \setminus \{f\})$ zwei Zusammenhangskomponenten. Seien V_1, V_2 die Knoten dieser Komponenten.

Da H maximal kreisfrei ist, enthält $(V, T \cup \{f\})$ einen Kreis C. Sei $f = \{v_1, v_2\}$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$. Dann ist $P = C \setminus \{f\}$ ein v_1-v_2-Weg in H, und es gibt eine Kante $e = \{v, w\} \in P$ mit $v \in V_1$ und $w \in V_2$. Es ist $e \notin T'$. Die Graphen $H'' = (V, T' \setminus \{f\} \cup \{e\})$ und $(V, (T \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ sind kreisfrei(!) und zusammenhängend(!), also Spannbäume.

Es bleibt zu zeigen, dass $l(f) < l(e)$. Wäre $l(f) > l(e)$, so wäre H'' Spannbaum mit kleinerer Länge als H', ein Widerspruch zur Minimalität von H'. Wäre $l(f) = l(e)$, so wäre H'' minimaler Spannbaum, der mehr gemeinsame Kanten mit H hat als H', ein Widerspruch zur Wahl von H'.

b) Wenn $G = (V, E)$ zusammenhängend ist und $l(e) \neq l(f)$ für alle $e, f \in E$ mit $e \neq f$ gilt, dann gibt es einen eindeutigen minimalen Spannbaum.

Denn gäbe es zwei minimale Spannbäume, so könnte man wie im Beweis der Rückrichtung von a) durch Austauschen von Kanten gleicher Länge von einem zum anderen kommen.

Aufgabe 2.3 (10 Punkte) Sei

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 10}$$

und sei $l = (3, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 3, 0) \in \mathbb{R}^{10}$. Finden Sie eine Auswahl $I \subseteq \{1, \dots, 10\}$ von drei linear unabhängigen Spaltenvektoren von V, so dass $\sum_{i \in I} l(i)$ minimal ist. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Lösung: Nach Beispiel 3.2 definieren die linear unabhängigen Spalten von V einen Matroid. Definiere die Gewichtsfunktion $w \in \mathbb{R}^{10}$ durch $w(i) = 3 - l(i)$. Wir suchen also eine Basis des Matroids mit maximalem Gewicht bezüglich w. Nach Satz 3.6 können wir den Greedy Algorithmus anwenden. So erhalten wir (z.B.)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$