Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 3 —

Aufgabe 3.1 (10 Punkte) Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{I}$ eine Menge von Teilmengen von X.

a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{I})$ genau dann ein Matroid ist, wenn Bedingungen (a) und (b) aus der Definition eines Matroids (Definition 3.1) gelten, sowie:

   (c') Für jede Menge $Y \subseteq X$ haben alle Basen von Y dieselbe Kardinalität.

b) Sei $(X, \mathcal{I})$ ein Matroid und sei $\mathcal{B}$ die Menge der Basen von X. Zeigen Sie:

   (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

   (ii) Für $A, B \in \mathcal{B}$ und $a \in A \setminus B$, gibt es $b \in B \setminus A$ so dass $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.

Lösung:

a) "$\Rightarrow$": Seien $A, B \subseteq Y$ mit $A, B \in \mathcal{I}$ und $|A| > |B|$. Dann gibt es nach Bedingung (c) ein $a \in A \setminus B$ so dass $B \cup \{a\}$ in $\mathcal{I}$ ist. Da $B \cup \{a\} \subseteq Y$, ist B keine Basis von Y.

   "$\Leftarrow$": Seien $A, B \in \mathcal{I}$ mit $|A| > |B|$. Wegen (c') hat jede Basis von $A \cup B$ mindestens Kardinalität $|A|$. Also ist B keine Basis von $A \cup B$ und somit gibt es ein $Z \in \mathcal{I}$ mit $B \subseteq Z \subseteq A \cup B$ und $B \neq Z$. Dann ist $Z \setminus B \subseteq A$ nicht leer, also sei $a \in Z \setminus B$. Nach Eigenschaft (b) ist dann $B \cup \{a\} \in \mathcal{I}$, weil $B \cup \{a\} \subseteq Z$.

b) Da $\mathcal{I} \neq \emptyset$ und X endlich ist, ist $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

   Seien nun $A, B \in \mathcal{B}$ und $a \in A \setminus B$. Nach Eigenschaft (b) ist $A \setminus \{a\} \in \mathcal{I}$ und nach Teil a) ist $|A| = |B|$, also $|B| > |A \setminus \{a\}|$. Dann gibt es nach Eigenschaft (c) ein $b \in B \setminus (A \setminus \{a\})$ mit $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{I}$. Da $a \notin B$, ist $b \in B \setminus A$. Nun ist $|(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}| = |A|$, das heißt für alle $Z \in \mathcal{I}$ mit $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \subseteq Z$ gilt $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} = Z$ und wir haben (ii) gezeigt.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte) Für zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B definiere das *Min-Plus Produkt* als $A \oplus B = C$, wobei $C_{ij} = \min\{A_{ik} + B_{kj} : k = 1, \ldots, n\}$. Sei $D = (V, A)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und Kantenlängenfunktion $l \in \mathbb{R}^A$. Sei W die Matrix definiert durch

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ l(a) & \text{falls } a = (v_i, v_j) \in A \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Mit Hilfe des n-fachen Min-Plus Produkts von W mit sich selbst kann man die Existenz von Kreisen in D erkennen, die negative Länge besitzen. Genauer: Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $W_{ii}^{\oplus n} < 0$ genau dann, wenn D einen Kreis enthält, der negative Länge besitzt.

Lösung: Wir zeigen zuerst per Induktion, dass für $d \in \mathbb{N}$ gilt:

$$W_{ij}^{\oplus d} = \begin{cases} l(K), & K \text{ ist kürzeste } v_i\text{-}v_j\text{-Kantenfolge mit höchstens } d \text{ Kanten;} \\ \infty, & \text{Es gibt keine } v_i\text{-}v_j\text{-Kantenfolge mit höchstens } d \text{ Kanten.} \end{cases}$$

Für $d = 1$ gilt dies nach Definition, wobei die leere Kantenfolge Länge 0 hat.
Angenommen die Aussage gilt für $d-1$, dann betrachte

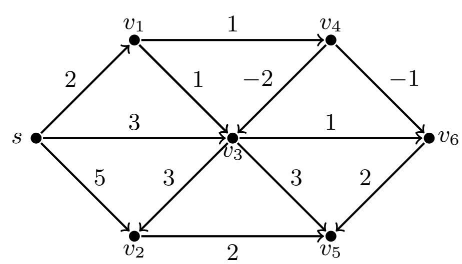
$$W_{ij}^{\oplus d} = \min\{W_{ik}^{\oplus(d-1)} + W_{kj} : k = 1, \dots, n\}.$$

Es ist also $W_{ij}^{\oplus d} = \infty$ genau dann, wenn für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt dass $W_{ik}^{\oplus(d-1)} = \infty$ oder $W_{kj} = \infty$ ist (oder beides). Also gibt es nach Voraussetzung keine v_i-v_k-Kantenfolge mit höchstens $d-1$ Kanten, oder wenn es sie gibt, dann ist die Kante (v_k, v_j) nicht in A. Somit gibt es keine v_i-v_j-Kantenfolge mit höchstens d Kanten.
Ist $W_{ij}^{\oplus d} < \infty$, betrachte die $k \in \{1, \dots, n\}$, für welche $W_{ik}^{\oplus(d-1)} < \infty$ und $W_{kj} < \infty$ ist. Die kleinste Summe ist dann die Länge einer kürzesten v_i-v_j-Kantenfolge mit höchstens d Kanten.

Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ gegeben mit $W_{ii}^{\oplus n} < 0$. Also gibt es eine v_i-v_i-Kantenfolge K mit höchstens n Kanten und $l(K) < 0$. Dann muss K mindestens einen Kreis enthalten. Hat dieser negative Länge, sind wir fertig. Sonst entferne ihn aus K (bis auf den Anfangsknoten) und erhalte eine nichtleere Kantenfolge K', die wiederum mindestens einen Kreis enthält. Dann ist auch $l(K') < 0$, und wir können so weitermachen, bis wir einen Kreis negativer Länge gefunden haben.
Umgekehrt sei C ein Kreis negativer Länge, und durch umbenennen der Knoten können wir annehmen dass $C = (v_1, (v_1, v_2), v_2, \dots, (v_m, v_1), v_1)$ ist. Dann ist $m \le n$ (wieso?) und es gilt

$$W_{11}^{\oplus n} \le W_{11}^{\oplus m} \le l(C) < 0.$$

Aufgabe 3.3 (10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford im folgenden gerichteten Graphen einen kürzesten Weg vom Knoten s zu jedem anderen Knoten:



Lösung: Starten mit $d_0(s) = 0$, $d_0(v) = \infty$ für alle $v \in V \setminus \{s\}$.
Erster Schritt: Setze $d_1(v) = d_0(v)$ für alle $v \in V$, betrachte nun alle Kanten.

(s, v_1)**:** Es ist $d_0(s) + l((s, v_1)) = 0 + 2 < \infty = d_1(v_1)$, also setze $d_1(v_1) = 2$, $g(v_1) = s$.

(s, v_2)**:** Es ist $d_0(s) + l((s, v_2)) = 0 + 5 < \infty = d_1(v_1)$, also setze $d_1(v_1) = 5$, $g(v_2) = s$.

(s, v_3)**:** Es ist $d_0(s) + l((s, v_3)) = 0 + 3 < \infty = d_1(v_1)$, also setze $d_1(v_1) = 3$, $g(v_3) = s$.

(v_i, v_j)**:** Da $d_0(v) = \infty$ für alle $v \neq s$, gibt es keine Veränderung.

Für die übrigen Schritte listen wir nicht alle Kanten auf, sondern halten nur die größte Verbesserung und den Wert von g in der folgenden Tabelle fest:

	d_0	d_1, g	d_2, g	d_3, g	d_4, g	d_5, g	d_6, g	d_7, g
s	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	∞	$2, s$	$2, s$	$2, s$	$2, s$	$2, s$	$2, s$	$2, s$
v_2	∞	$5, s$	$5, s$	$5, s$	$4, v_3$	$4, v_3$	$4, v_3$	$4, v_3$
v_3	∞	$3, s$	$3, s$	$1, v_4$	$1, v_4$	$1, v_4$	$1, v_4$	$1, v_4$
v_4	∞	∞	$3, v_1$	$3, v_1$	$3, v_1$	$3, v_1$	$3, v_1$	$3, v_1$
v_5	∞	∞	$6, v_3$	$6, v_3$	$4, v_3$	$4, v_3$	$4, v_3$	$4, v_3$
v_6	∞	∞	$4, v_3$	$2, v_4$	$2, v_4$	$2, v_4$	$2, v_4$	$2, v_4$

Da $d_4 = d_5$ ist, reicht es auch bis d_5 zu rechnen, da danach keine Änderung mehr eintreten kann.
Die Längen der kürzesten Wege lassen sich direkt in der Tabelle ablesen, die Wege selbst lassen sich anhand der letzten Werte von g rekonstruieren. Wir geben sie hier als geordnete Menge von Knoten an. Sie lauten:

s-v_1: (s, v_1);

s-v_2: (s, v_1, v_4, v_3, v_2);

s-v_3: (s, v_1, v_4, v_3);

s-v_4: (s, v_1, v_4);

s-v_5: (s, v_1, v_4, v_3, v_5);

s-v_6: (s, v_1, v_4, v_6);