Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 3 —

Aufgabe 3.1 (10 Punkte) Sei X eine endliche Menge und $\mathcal{I}$ eine Menge von Teilmengen von X.

a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{I})$ genau dann ein Matroid ist, wenn Bedingungen (a) und (b) aus der Definition eines Matroids (Definition 3.1) gelten, sowie:

   (c') Für jede Menge $Y \subseteq X$ haben alle Basen von Y dieselbe Kardinalität.

b) Sei $(X, \mathcal{I})$ ein Matroid und sei $\mathcal{B}$ die Menge der Basen von X. Zeigen Sie:

   (i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

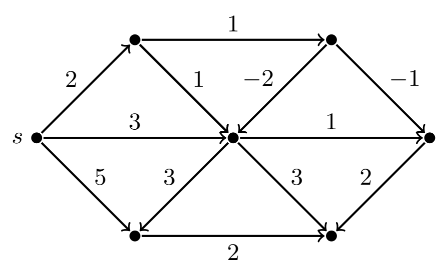
   (ii) Für $A, B \in \mathcal{B}$ und $a \in A \setminus B$, gibt es $b \in B \setminus A$ so dass $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\} \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 3.2 (10 Punkte) Für zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B definiere das *Min-Plus Produkt* als $A \oplus B = C$, wobei $C_{ij} = \min\{A_{ik} + B_{kj} : k = 1, \ldots, n\}$. Sei $D = (V, A)$ ein Graph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und Kantenlängenfunktion $l \in \mathbb{R}^A$. Sei W die Matrix definiert durch

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ l(a) & \text{falls } a = (v_i, v_j) \in A \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Mit Hilfe des $(n-1)$-fachen Min-Plus Produkts von W mit sich selbst kann man die Existenz von Kreisen in D erkennen, die negative Länge besitzen. Genauer: Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $W_{ii}^{\oplus(n-1)} < 0$ genau dann, wenn D einen Kreis enthält, der negative Länge besitzt.

Aufgabe 3.3 (10 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford im folgenden gerichteten Graphen einen kürzesten Weg vom Knoten s zu jedem anderen Knoten:



Aufgabe 3.4 (Präsenzaufgabe)
Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten und Kantenlängenfunktion $l : A \to \mathbb{Z}$. Sei $s \in V$ der Startknoten. Betrachte die Funktionen $d_0, \ldots, d_n \colon V \to \mathbb{Z}$, die der Algorithmus von Bellman-Ford berechnet. Zeige: Es gilt $d_n = d_{n-1}$ genau dann, wenn alle gerichteten Kreise, die von s aus erreichbar sind, nicht-negative Länge besitzen.

Abgabe: Bis Dienstag, 9. Mai 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 31, 3.2 und 3.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer (!) auf die Abgabe schreiben.