



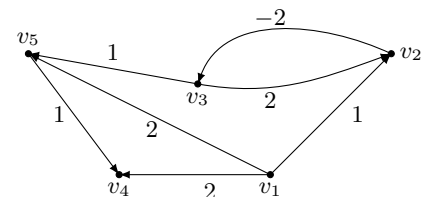
Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 4 —

Aufgabe 4.1 (10 Punkte) Finden Sie im rechtsstehenden gerichteten Graphen kürzeste Wege von dem Knoten v_1 zu jedem der anderen Knoten, sowie eine optimale Potentialfunktion.

Begründen Sie, warum die von Ihnen angegebene Funktion eine optimale Potentialfunktion ist.



Lösung: Wir geben die Wege als geordnete Menge von Knoten an. Sie lauten:

v_1 - v_2 : (v_1, v_2) , mit Länge 1;

v_1 - v_3 : (v_1, v_2, v_3) , mit Länge -1 ;

v_1 - v_4 : $(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4)$, mit Länge 1;

v_1 - v_5 : (v_1, v_2, v_3, v_5) , mit Länge 0.

Ein optimales Potential ist $p = (0, 1, -1, 1, 0)^\top$. Dazu prüfe zunächst, dass es ein Potential ist: $p(v_j) - p(v_i) \leq l((v_i, v_j))$ für alle Kanten $(v_i, v_j) \in A$.

Es kann kein Potential p' geben mit $p'(v_i) - p'(v_1) > p(v_i) - p(v_1)$, weil nach Satz 3.3 $\text{dist}(v_1, v_i)$ eine obere Schranke an diesen Wert angibt, und wir Wege gefunden haben, für die diese Werte erreicht werden. Umgekehrt belegt dieses Potential auch, dass die angegebenen Wege kürzeste Wege sind.

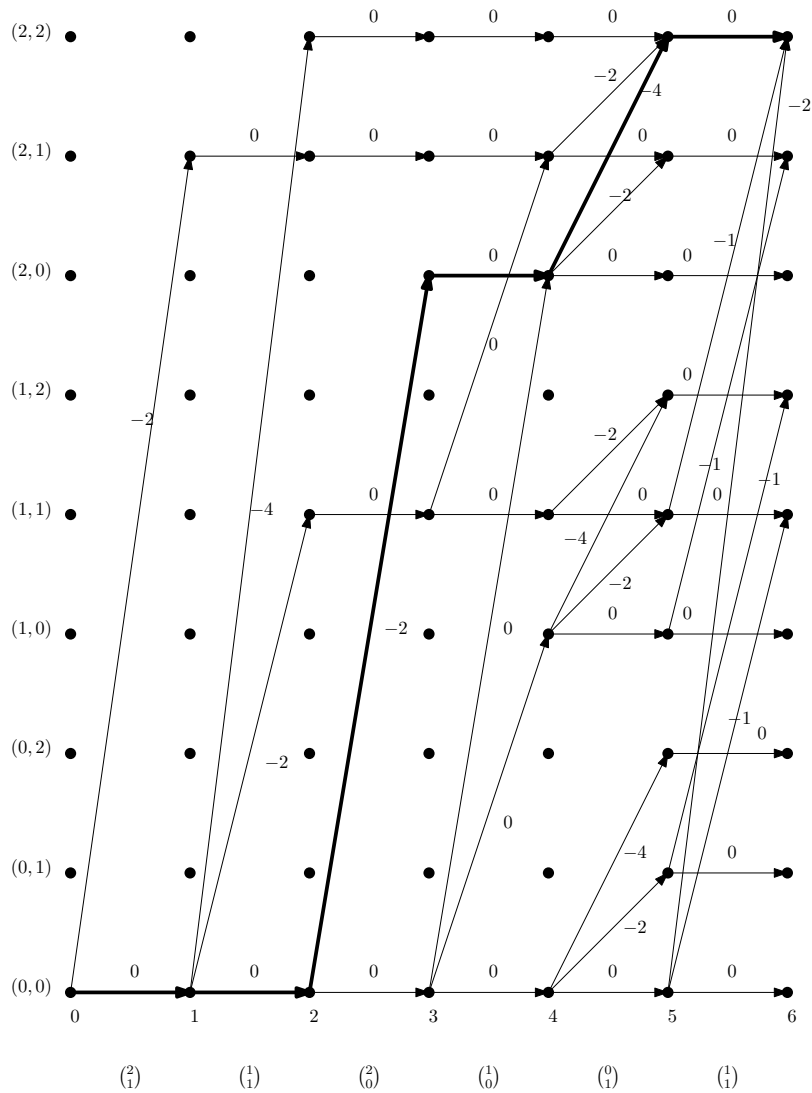
Aufgabe 4.2 (10 Punkte) Verwenden Sie den Algorithmus von Bellman und Ford, um das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem zu lösen:

$$\max\{c^\top x : x \in \mathbb{Z}^6, x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6, (Ax)_j \leq b_j, j = 1, 2\}$$

mit

$$c = (2, 2, 2, 0, 2, 1)^\top, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (2, 2)^\top.$$

Lösung: Wir modellieren das gegebene ganzzahlige lineare Optimierungsproblem wie in der Vorlesung beschrieben als Graphenproblem und erhalten so einen gerichteten Graphen. In der folgenden Abbildung sind die von $(0, (0, 0))$ erreichbaren Kanten dieses Graphen dargestellt:



Hier suchen wir nun den kürzesten Weg vom Knoten $(0, (0, 0))$ zu einem Knoten der Form $(6, u)$ mit $u \in U = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$. Anwenden von Bellman-Ford ergibt den markierten Weg der Länge -6 . Der maximale Wert unseres Programms ist also 6 . Der dem gefundenen Weg entsprechende optimale Lösungsvektor ist $x = (0, 0, 1, 0, 2, 0)^T$.

Aufgabe 4.3 (10 Punkte) Sei $U = \{U_1, \dots, U_6\}$ eine Menge von Übungen und $T = \{T_1, \dots, T_4\}$ eine Menge von Tutoren. Zu jedem Tutor gibt es eine Menge von Übungen, die er betreuen könnte:

| | | | |
|-----------------|------------|------------|-----------------|
| T_1 | T_2 | T_3 | T_4 |
| U_1, U_4, U_5 | U_2, U_3 | U_3, U_5 | U_2, U_4, U_6 |

Darüber hinaus hat jeder Dozent angegeben, welche Tutoren er für geeignet hält:

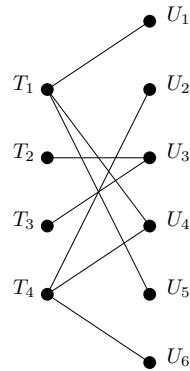
| | | | | | |
|-----------------|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| U_1 | U_2 | U_3 | U_4 | U_5 | U_6 |
| T_1, T_3, T_4 | T_1, T_3, T_4 | T_2, T_3 | T_1, T_4 | T_1, T_4 | T_2, T_4 |

Jede Übung soll betreut werden, und jedem Tutor kann höchstens eine Übung zugewiesen werden. Modellieren Sie das Problem als bipartiten Graph und geben Sie ein Matching an, so dass möglichst vielen Übungen ein passender Tutor zugewiesen wird.

Lösung: Betrachte zunächst den gerichteten Graphen $D = (V, A)$ mit $V = T \cup U$ und

$$A = \{(T_i, U_j) : T_i \text{ kann } U_j \text{ betreuen}\} \cup \{(U_k, T_l) : T_l \text{ ist geeignet für } U_k\}.$$

Nun konstruieren wir daraus den ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ durch $\{T_i, U_j\} \in E$ genau dann, wenn sowohl $(T_i, U_j) \in A$ als auch $(U_j, T_i) \in A$ ist. Dann ist G nach Konstruktion bipartit und sieht wie folgt aus:



Da T_2 und T_3 beide nur zu U_3 adjazent sind, können nicht beide gleichzeitig in einem Matching sein. Das größte Matching hat also höchstens 3 Kanten. $M = \{(T_1, U_1), (T_3, U_3), (T_4, U_4)\}$ ist ein Matching mit 3 Kanten, also maximal.

Variante: Die Aufgabenstellung lässt sich auch so interpretieren, dass die Vorgaben der Tutoren und Dozenten soweit wie möglich beachtet werden sollen, aber auf jeden Fall allen Tutoren eine Übung zugewiesen werden soll. In diesem Fall kann beispielsweise zusätzlich noch T_2 zu U_2 zugeordnet werden, was der Vorgabe des Tutors entspricht, aber der Vorgabe des Dozenten widerspricht.