Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 5 —

Aufgabe 5.1 (10 Punkte) Sei X eine endliche Menge und seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von X, nicht notwendigerweise alle verschieden. Bezeichne eine Folge $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in A_i$ und $x_i \neq x_j$, für alle $i \neq j$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, als *System verschiedener Vertreter* für $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Zeigen Sie: Ein System verschiedener Vertreter existiert für $\{A_1, \ldots, A_n\}$ genau dann, wenn für jedes $m \in \{1, \ldots, n\}$ jede Vereinigung von m Mengen A_i mindestens m Elemente enthält.

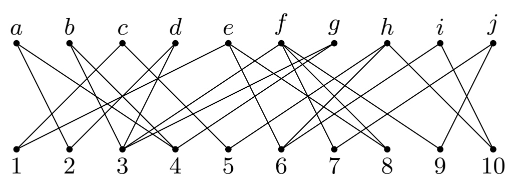
Lösung: Sei $G = (U \dot\cup X, E)$ der bipartite Graph mit $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ (Multimenge) und

$$\{A_i, x\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_i.$$

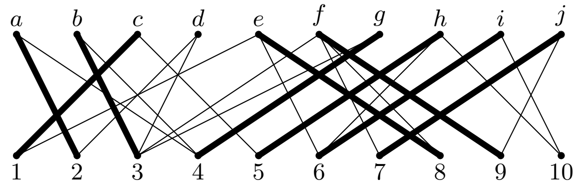
Bemerke dass ein Matching der Größe $|U| = n$ ein System verschiedener Vertreter liefert. Verwende Satz von Hall:

$$\begin{aligned} \nu(G) = n \quad &\Leftrightarrow \quad |\{x \in X \ : \ \{A_i, x\} \in E,\ i \in I\}| \geq |I| \ \text{ für alle } I \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow \quad |\{x \in X \ : \ x \in A_i,\ i \in I\}| \geq |I| \ \text{ für alle } I \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow \quad \Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| \geq |I| \ \text{ für alle } I \subseteq \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 (10 Punkte) Bestimmen Sie die Knotenüberdeckungszahl $\tau(G)$ und die Matchingzahl $\nu(G)$ von folgendem Graphen G und geben Sie ein optimales Matching und eine optimale Knotenüberdeckung an:

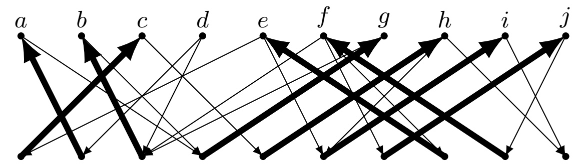


Lösung: Für den gegebenen Graphen G wollen wir zunächst die Matchingzahl $\nu(G)$ bestimmen. Wir beginnen mit einem relativ großen Matching M, das leicht zu finden ist (Greedy auf den Zahlen), aber nicht durch einfaches Hinzufügen von Kanten erweitert werden kann:



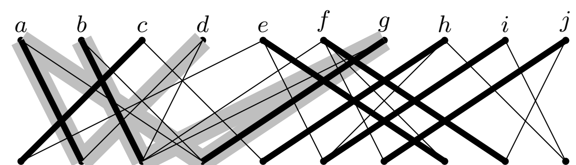
Jetzt können wir mit dem Satz von Hall argumentieren. Die Nachbarschaft der Knotenmenge $\{a, b, d, g\}$ ist $\{2, 3, 4\}$ und somit kleiner als die Menge selbst. Nach dem Satz von Hall kann es also kein Matching der Größe 10 geben. Das oben angegebene Matching M hat 9 Kanten und ist damit also maximal. Es gilt also $\nu(G) = 9$.

Für die Knotenüberdeckungszahl gilt nach dem Satz von König auch $\tau(G) = 9$. Eine optimale Knotenüberdeckung erhalten wir nach dem Verfahren, das im Beweis vom Satz von König verwendet wird. Dazu betrachten wir den Residualgraphen bezüglich M:

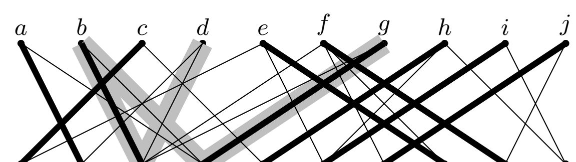


Die Knotenüberdeckung C enthält für jede Matchingkante $\{i, x\}, i \in \{1, \ldots, 10\}, x \in \{a, \ldots, j\}$, einen ihrer Endknoten. Und zwar $i \in C$, falls es einen gerichteten Weg von d, dem einzigen von M nicht überdeckten Knoten in der oberen Knotenmenge, zu i gibt, sonst $x \in C$. Dies ergibt $C = \{2, 3, 4, c, e, f, h, i, j\}$.

Alternative Lösung: Um zu sehen, dass M ein Matching maximaler Kardinalität ist, kann man alternativ auch zeigen, dass es keinen M-augmentierenden Weg gibt. Da nur die Knoten d und 10 nicht von M bedeckt sind, müsste ein solcher Weg ein d-10-Weg sein. Wir betrachten mögliche Wege, die in d starten und abwechselnd Kanten aus M und Kanten, die nicht aus M stammen verwenden.
Von d aus können wir entweder die Kante zu 2 oder die Kante zu 3 nehmen. Wir betrachten erst die Wege, die die Kanten $\{d, 2\}$ enthalten. Sie müssen, wenn sie M-augmentierend sein sollen, auch die Kanten $\{2, a\}$ enthalten. Vom Knoten a aus haben wir nur eine Wahl: die Kante zu 4. Auch in den weitere Schritten gibt es jeweils nur eine Möglichkeit um abwechseld Kanten aus M und Kanten ausserhalb von M zu wählen und wir erhalten den folgenden Weg:



Von b aus ist die einzige Möglichkeit die Kante $\{b, 4\}$, aber den Knoten 4 haben wir schon besucht. Auf diese Weise können wir also keinen M-augmentierenden Weg erhalten.
Wenn wir mit $\{d, 3\}$ beginnend abwechselnd M- und Nicht-M-Kanten folgen, erhalten wir folgenden Weg, der sich nicht fortsetzen lässt:



Auch auf diese Weise können wir also keinen M-augmentierenden Weg erhalten, was zeigt, dass es keinen solchen Weg geben kann. M ist also ein Matching maximaler Kardinalität und wir haben $\nu(G) = 9$.

Aufgabe 5.3 (10 Punkte) Die folgende Tabelle enthält eine fiktive Zuordnung von Veranstaltungen zu den jeweiligen Modulen:

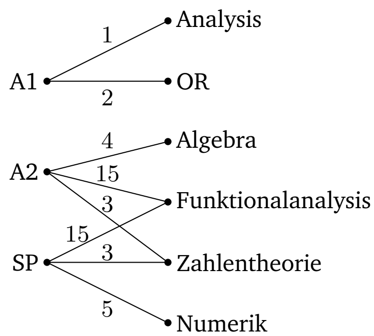
Aufbaumodul I	**Aufbaumodul II**	**Schwerpunktmodul**
Analysis	Algebra	Funktionalanalysis
Operations Research	Funktionalanalysis	Zahlentheorie
	Zahlentheorie	Numerik

Alle drei Module müssen abgedeckt werden, jede Veranstaltung kann höchstens ein Modul abdecken. Sei *S* eine Studierende, die bereits an der Veranstaltung *Funktionalanalysis* erfolgreich teilgenommen hat. Für die restlichen Veranstaltungen hat *S* folgende Präferenzen (absteigend sortiert):

Numerik, Algebra, Zahlentheorie, Operations Research, Analysis

Finden Sie eine minimale Auswahl von Veranstaltungen, die *S* noch belegen muss um alle Module abzudecken, so dass ihre Präferenzen möglichst stark berücksichtigt werden.

Lösung: Konstruiere einen bipartiten Graphen mit Knoten für die Module als eine Partitionsmenge und Knoten für die Veranstaltungen als andere Menge. Setze Kantengewichte entsprechend der Präferenz, mit höheren Werten, je höher die Präferenz ist.



Da S bereits an der Veranstaltung *Funktionalanalysis* teilgenommen hat, muss diese Veranstaltung in dem resultierenden Matching enthalten sein. Somit wird dieser Veranstaltung eine hohe Priorität zugewiesen. Wende nun die ungarische Methode an, um zu einem Matching maximalen Gewichts zu finden:

$$M = \{\{\text{A1,OR}\}, \{\text{A2, Funktionalanalysis}\}, \{\text{SP, Numerik}\}\}$$

mit $w(M) = 22$.