



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 7 —

Aufgabe 7.1 (10 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge von univariaten Polynomen konvex ist:

$$P = \{(p_0, p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : p_0 + p_1x + \dots + p_dx^d \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

- b) Bestimmen¹ Sie einen inneren Punkt von P .
c) Bestimmen Sie die konvexen Hüllen der folgenden Mengen:

$$A = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{und} \quad B = \{(x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 7.2 (10 Punkte) Welche der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind konvex?

- a) $f(x) = \max\{g(x), h(x)\}$ für $g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex.

b) $f(x) = x^T \begin{pmatrix} -6/5 & 12/5 \\ 12/5 & 1/5 \end{pmatrix} x.$

c) $f(x) = x^T \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} x.$

d) $f(x) = e^{x^T x}.$

Aufgabe 7.3 (10 Punkte) Zeigen Sie: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge, dann ist auch ihre konvexe Hülle $\text{conv } A$ kompakt.

Hinweis: Satz von Carathéodory.

Aufgabe 7.4 (Präsenzaufgabe) Betrachte eine Herde mit weissen und schwarzen Schafen. Zeigen Sie: Falls bei je 4 Schafen die schwarzen und weissen durch einen geraden Zaun getrennt werden können, dann kann die gesamte Herde durch einen geraden Zaun farblich getrennt werden.

Abgabe: Bis Dienstag, 13. Juni 2017, 10 Uhr.

Aufgaben 7.1, 7.2 und 7.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.

¹Wie üblich in der Mathematik genügt es hier nicht, nur ein Objekt anzugeben. Es wird vielmehr nach einem Beweis für die Tatsache gefragt, dass das von Ihnen angegebene Objekt tatsächlich die gewünschte Eigenschaft erfüllt.