Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 6 —

Aufgabe 6.1 (10 Punkte) Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *doppelt-stochastisch* falls sie nur nicht-negative Einträge besitzt und jede Zeilensumme und Spaltensumme 1 ist.

Zeigen Sie: Für jede doppelt-stochastische Matrix gibt es eine Permutation der Spalten, so dass alle Diagonal-Einträge ungleich Null sind.

Lösung: Die Matrix $A = (A_{ij})$ definiert einen bipartiten Graph: Die Knotenmenge ist $V = U \mathbin{\dot\cup} W$, wobei die Menge $U = \{z_1, \ldots, z_n\}$ für die n Zeilen von A und die Menge $W = \{s_1, \ldots, s_n\}$ für die n Spalten von A steht. Die Kantenmenge ist definiert als $E = \{\{z_i, s_j\} : A_{ij} \neq 0, i, j = 1, \ldots, n\}$. Nach dem Heiratssatz besitzt G ein perfektes Matching M, denn es ist $|U| = |W| = n$ und es gilt für $X \subseteq U$:

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(X)| &= |\{s_j : \{z_i, s_j\} \in E : z_i \in X, j = 1, \ldots, n\}| \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:z_i\in X} A_{ij} \quad \Big(\text{weil} \sum_{i:z_i\in X} A_{ij} \leq 1 \text{ falls } s_j \in \Gamma(X), \sum_{i:z_i\in X} A_{ij} = 0 \text{ falls } s_j \notin \Gamma(X)\Big) \\
&= \sum_{i:z_i\in X} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \\
&= |X| \quad \Big(\text{weil} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1\Big).
\end{aligned}
$$

Dieses perfekte Matching M ist von der Form

$$M = \{\{z_1, s_{\pi(1)}\}, \ldots, \{z_n, s_{\pi(n)}\}\},$$

wobei $\pi \in S_n$ eine Permutation ist. Also liefert die Permutation π^{-1} die gewünschte Permutation der Spalten von A.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Seien $s, t \in V$ und sei $f \in \mathbb{R}^{A}_{\geq 0}$ ein s-t-Fluss. Zeigen Sie, dass für den Wert des Flusses

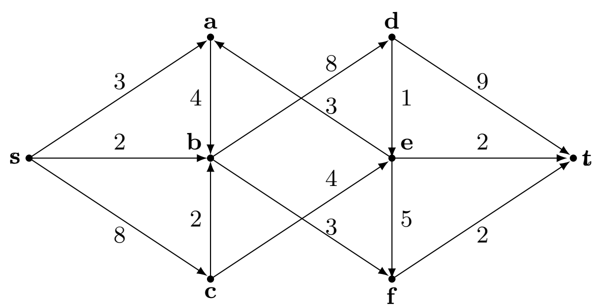
$$\mathrm{value}(f) = \sum_{a\in\delta^{\mathrm{in}}(t)} f(a) - \sum_{a\in\delta^{\mathrm{out}}(t)} f(a)$$

gilt. *Hinweis:* Beweis von Lemma 4.

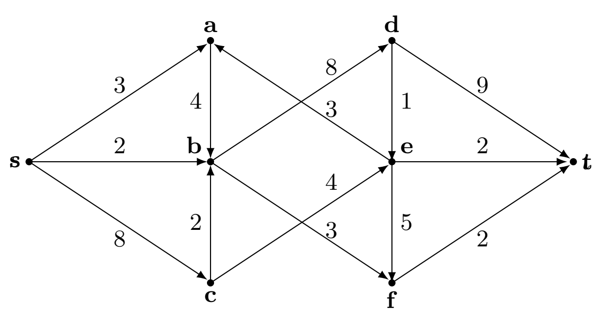
Lösung: Mit Flusserhaltungsgesetz gilt $\sum_{v\in V\setminus\{s,t\}}\Big(\sum_{a\in\delta^{\text{out}}(v)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{in}}(v)} f(a)\Big)=0$, also:

$$\begin{aligned}
\text{value}(f) &= \sum_{a\in\delta^{\text{out}}(s)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{in}}(s)} f(a)\\
&= \sum_{a\in\delta^{\text{out}}(s)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{in}}(s)} f(a)+\sum_{v\in V\setminus\{s,t\}}\Big(\sum_{a\in\delta^{\text{out}}(v)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{in}}(v)} f(a)\Big)\\
&= \sum_{v\in V\setminus\{t\}}\Big(\sum_{a\in\delta^{\text{out}}(v)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{in}}(v)} f(a)\Big)\\
&= \sum_{a\in\delta^{\text{in}}(t)} f(a)-\sum_{a\in\delta^{\text{out}}(t)} f(a).
\end{aligned}$$

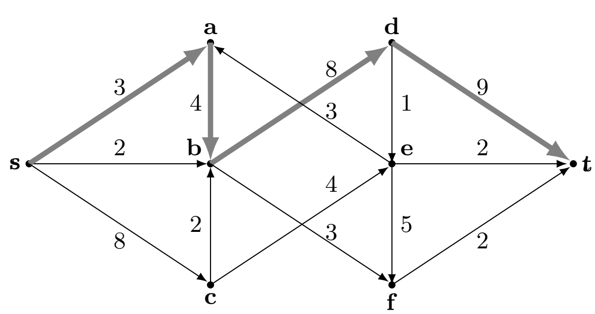
Aufgabe 6.3 (10 Punkte) Berechnen Sie im rechts-stehenden Graphen einen maximalen s-t-Fluss und einen minimalen s-t-Schnitt mit Hilfe des Ford-Fulkerson Algorithmus.



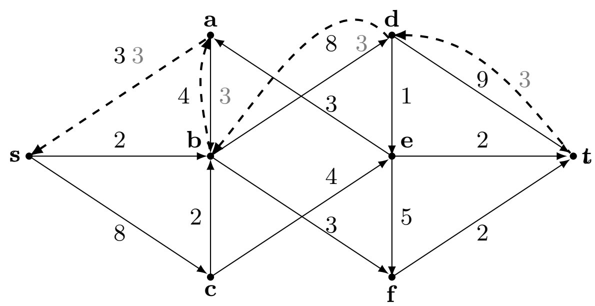
Lösung: Wir haben untenstehenden Graphen gegeben und wollen den Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses verwenden, um einen s-t-Fluss mit maximalem Wert und einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität zu bestimmen.



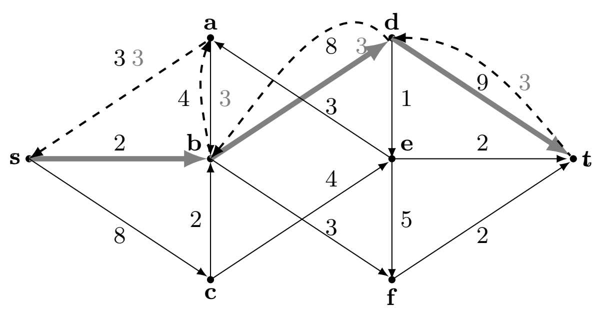
Wir beginnen also mit dem Fluss $f=0$ und betrachten den Residualgraphen D_f, der zunächst dem ursprünglichen Graphen entspricht. Wir wählen einen gerichteten s-t-Weg in D_f:



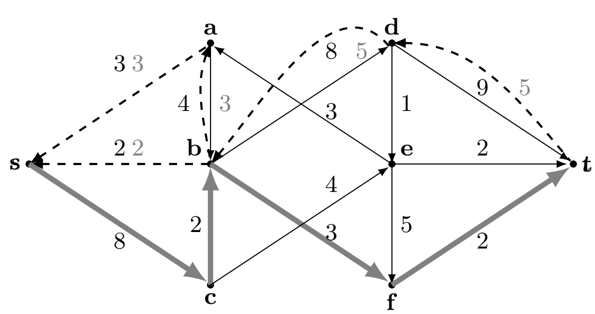
Entlang dieses Wegs können wir den Fluss maximal um 3 erhöhen. Die neuen positiven Flusswerte sind in der Abbildung neben den Kapazitäten in grau dargestellt. Wir betrachten auch gleich den Residualgraphen:

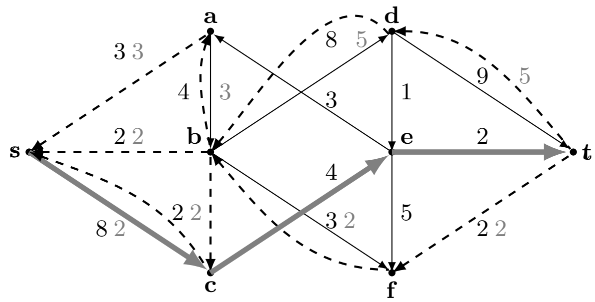


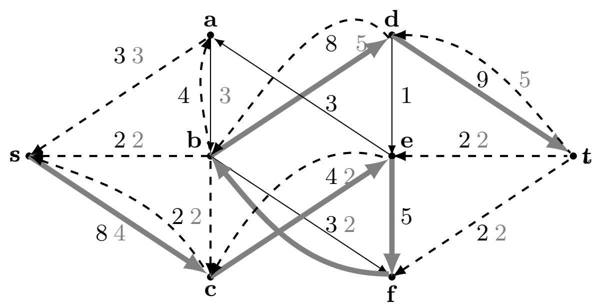
Für die Kanten, die positive Flusswerte haben, gibt es nun auch Rückwärtskanten, die hier gestrichelt dargestellt sind. Kanten, deren Kapazität ausgeschöpft ist, tauchen nicht mehr als Vorwärtskanten auf.
Wir suchen wieder einen gerichteten s-t-Weg und verwenden diesen, um den Fluss zu erweitern.



Die weiteren Schritte des Algorithmus beschreiben wir in nur noch in Abbildungen. Jede Abbildung zeigt den resultierenden Fluss und den Residualgraphen zusammen mit dem gerichteten s-t-Weg darin, der die folgende Flusserhöhung liefert.







Im anschließenden Residualgraphen gibt es keinen gerichteten s-t-Weg, da Knoten c, der einzige Knoten den wir noch von s aus erreichen können, keine ausgehende mehr Kante hat. Wir haben also einen maximalen s-t-Fluss f mit Wert $3 + 2 + 6 = 11$ gefunden.

Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir einen korrespondierenden minimalen s-t-Schnitt erhalten, wenn wir $\delta^{\text{out}}(U)$ betrachten für die Menge U aller Knoten, die in D_f von s aus erreichbar sind. In unserem Beispiel haben wir $U = \{c, s\}$. Ein minimaler Schnitt besteht also aus den in der folgenden Abbildung hervorgehobenen Kanten.