Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 8 —

Aufgabe 8.1 (10 Punkte) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $\dim(C) = n$. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in C$ gilt:

$$x \in \operatorname{int} C \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in C \; \exists z \in C \; \exists \alpha \in (0,1) : x = (1-\alpha)y + \alpha z\,.$$

Aufgabe 8.2 (10 Punkte) Es sei $C = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und sei

$$y = \frac{2}{7}x_1 + \frac{1}{28}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{14}x_4 + \frac{3}{14}x_5 + \frac{1}{7}x_6.$$

Verwenden Sie den Beweis des Satzes von Carathéodory, um y als Konvexkombination von affin unabhängigen x_i zu schreiben.

Aufgabe 8.3 (10 Punkte) Es sei

$$C = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} n \\ \sin \frac{\pi}{4} n \end{pmatrix} : n = 0, \ldots, 7 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ die metrische Projektion von x auf C.

Hinweis: Sie dürfen Symmetrien von C verwenden.

Aufgabe 8.4 (Präsenzaufgabe) Zeigen Sie: Eine konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ ist genau dann unbeschränkt, wenn sie einen Strahl, das heißt eine Menge der Form $\{x + \lambda v : \lambda \geq 0\}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $v \in S^{n-1}$, enthält.

Abgabe: Bis Dienstag, 20. Juni 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 8.1, 8.2 und 8.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.