



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 9 —

Aufgabe 9.1 (10 Punkte) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, dann ist für jedes $x \in M$

$$P_{M,x} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \|z - y\| \text{ für alle } z \in M\}$$

definiert, also als die Menge der Punkte, die bezüglich der euklidischen Norm mindestens so nah zu x wie zu jedem der anderen Punkte aus M liegen.

a) Sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie $P_{M,x}$ für jedes $x \in M$.

b) Zeigen Sie: Für jede endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und jedes $x \in M$ ist $P_{M,x}$ konvex.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge mit $\dim K = n$. Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene. Zeigen Sie: Es gibt genau zwei Hyperebenen, die parallel zu H sind und gleichzeitig Stützhyperebenen von K sind.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist die zu K *polare Menge* definiert als

$$K^\times = \{y \in \mathbb{R}^n : x^\top y \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Zeigen Sie:

a) $K^\times$ ist konvex und abgeschlossen.

b) Falls $0 \in \overline{K}$ ist, dann gilt $(K^\times)^\times = \overline{K}$.

Aufgabe 9.4 (Präsenzaufgabe) Beschreiben Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : x_1^2 x_2 \geq 1\}$ als einen Durchschnitt von Halbräumen.

Abgabe: Bis Dienstag, 27. Juni 2017, 10 Uhr.

Aufgaben 9.1, 9.2 und 9.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.