Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 10 —

Aufgabe 10.1 (10 Punkte) Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge und $P = \operatorname{conv} X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeigen Sie: $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von P, wenn $x \notin \text{conv}(X \setminus \{x\})$.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte) Bestimme die Ecken der folgenden Polyeder:

a) $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \leq b\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y \leq 1, 2x - z \leq -1, -x + y - z \leq 0,$
$x - y - 2z \leq -3\}$.

Wichtig: Diese Woche gibt es zwei Präsenzaufgaben. Mit diesen ehemaligen Klausuraufgaben soll insbesondere das korrekte Aufschreiben geübt werden. Hierzu ist es günstig, wenn Sie die Aufgaben schon *vor* der Übung vorbereiten.

Aufgabe 10.3 (Präsenzaufgabe) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge.

a) Es sei $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Das Maximum $\max\{c^{\mathsf{T}} x : x \in C\}$ wird in einem Extrempunkt von C angenommen.

b) Bestimmen Sie alle Extrempunkte des Polyeders:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 10.4 (Präsenzaufgabe) Sei B_n die Einheitskugel bezüglich der euklidischen Norm.

a) Zeigen Sie, dass B_n konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Extrempunkt von B_n ist.

Abgabe: Bis Dienstag, 4. Juli 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 10.1 und 10.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.