Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 9 —

Aufgabe 9.1 (10 Punkte) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, dann ist für jedes $x \in M$

$$P_{M,x} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \|z - y\| \text{ für alle } z \in M\}$$

definiert, also als die Menge der Punkte, die bezüglich der euklidischen Norm mindestens so nah zu x wie zu jedem der anderen Punkte aus M liegen.

a) Sei
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$
Bestimmen Sie $P_{M,x}$ für jedes $x \in M$.

b) Zeigen Sie: Für jede endliche Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und jedes $x \in M$ ist $P_{M,x}$ konvex.

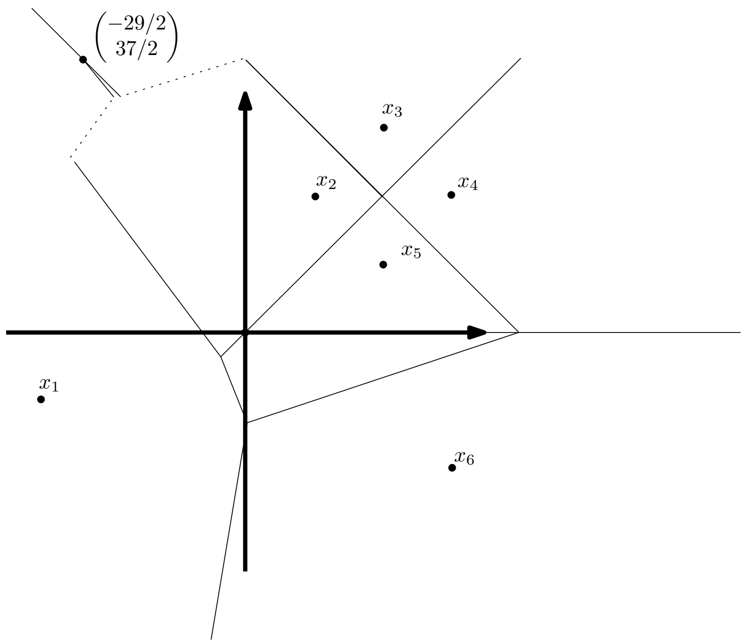
Lösung: Man betrachte zunächst folgende charakterisierende Ungleichung für $P_{M,x}$

$$\begin{aligned}
\|x - y\| \leq \|z - y\| &\Leftrightarrow \|x - y\|^2 \leq \|z - y\|^2 \\
&\Leftrightarrow (x - y)^\mathsf{T}(x - y) \leq (z - y)^\mathsf{T}(z - y) \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 - 2x^\mathsf{T}y + \|y\|^2 \leq \|z\|^2 - 2z^\mathsf{T}y + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 - 2x^\mathsf{T}y \leq \|z\|^2 - 2z^\mathsf{T}y \\
&\Leftrightarrow 2(z - x)^\mathsf{T}y \leq \|z\|^2 - \|x\|^2 \\
&\Leftrightarrow (z - x)^\mathsf{T}y \leq \frac{\|z\|^2 - \|x\|^2}{2}.
\end{aligned}$$

a) Für $x = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich dann beispielsweise

$$P_{M,x} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \; 4y_1 + 3y_2 \leq -\frac{5}{2},\; 5y_1 + 4y_2 \leq \frac{3}{2},\; 6y_1 + 3y_2 \leq \frac{3}{2},\; 5y_1 + 2y_2 \leq -\frac{5}{2},\; 6y_1 - y_2 \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

Insgesamt erhalten wir das folgende Bild:



b) Wir definieren für festes x den Halbraum $H_z^- = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (z-x)^\top y \leq \frac{\|z\|^2 - \|x\|^2}{2} \right\}$ zur Hyperebene H mit Normalenvektor $c = z - x$ und Parameter $\delta = \frac{\|z\|^2 - \|x\|^2}{2}$. Nach unserer Vorüberlegung kann man $P_{M,x}$ auch darstellen als

$$\begin{aligned} P_{M,x} &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (z-x)^\top y \leq \frac{\|z\|^2 - \|x\|^2}{2} \text{ für alle } z \in M \right\} \\ &= \bigcap_{z \in M} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : (z-x)^\top y \leq \frac{\|z\|^2 - \|x\|^2}{2} \right\} \\ &= \bigcap_{z \in M} H_z^- \end{aligned}$$

Da der Schnitt konvexer Mengen konvex ist, sind wir fertig.

Aufgabe 9.2 (10 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe und kompakte Menge mit $\dim K = n$. Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene. Zeigen Sie: Es gibt genau zwei Hyperebenen, die parallel zu H sind und gleichzeitig Stützhyperebenen von K sind.

Lösung: Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = \delta\}$. Setze

$$\delta_{\max} = \max_{x \in K} c^\top x.$$

Da K kompakt ist, kann hier das Maximum betrachtet werden und es wird an einem $x_0 \in K$ angenommen. Wir zeigen, dass $H_{\max} = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = \delta_{\max}\}$ Stützhyperebene von K ist. Nach Konstruktion ist $H_{\max}$ parallel zu H.
Es gilt $\delta_{\max} = c^\top x_0$, also $x_0 \in H_{\max} \cap K$. Für beliebiges $x \in K$ gilt außerdem $c^\top x \leq \delta_{\max}$ und damit $K \subseteq H_{\max}^-$.
Analog erhält man mit $\delta_{\min} = \min_{x \in K} c^\top x$ und $H_{\min} = \{x \in \mathbb{R}^n : -c^\top x = -\delta_{\min}\}$ eine weitere Stützhyperebene von K. Es gilt $H_{\max} \neq H_{\min}$, da sonst $c^\top x = \delta_{\max}$ für alle $x \in K$ gelten würde, also $K \subseteq H_{\max}$, was $\dim K = n$ widersprechen würde.
Ist $H' = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\top x = \delta'\}$ eine beliebige zu H parallele Stützhyperebene von K, so gilt entweder $c^\top x \leq \delta'$ für alle $x \in K$ oder $c^\top x \geq \delta'$ für alle $x \in K$. Im ersten Fall folgt $\delta' = \delta_{\max}$, da $H' \cap K \neq \emptyset$, und damit $H' = H_{\max}$, im zweiten analog $H' = H_{\min}$.

Aufgabe 9.3 (10 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann ist die *zu K polare Menge* definiert als

$$K^\times = \{y \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T} y \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Zeigen Sie:

a) $K^\times$ ist konvex und abgeschlossen.

b) Falls $0 \in \overline{K}$ ist, dann gilt $(K^\times)^\times = \overline{K}$.

Lösung:

a) Nach Satz 2.2 reicht es für die Konvexität zu zeigen, dass für $x, y \in K^\times$ auch $[x, y] \subseteq K^\times$ ist. Für $\alpha \in [0, 1]$ und $z \in K$ gilt:

$$z^\mathsf{T}((1-\alpha)x + \alpha y) = (1-\alpha)z^\mathsf{T} x + \alpha z^\mathsf{T} y \leq (1-\alpha) + \alpha = 1.$$

Da $K^\times$ der Schnitt über die Halbräume $\{y \in \mathbb{R}^n : x^\mathsf{T} y \leq 1\}$ mit $x \in K$ ist, und die Halbräume abgeschlossen sind, ist auch $K^\times$ abgeschlossen.

b) "$\supseteq$": Für $x \in K$ gilt nach Definition $x^\mathsf{T} y \leq 1$ für alle $y \in K^\times$. Damit erfüllt x genau die Bedingung für $(K^\times)^\times$, und es gilt $K \subseteq (K^\times)^\times$. Da $(K^\times)^\times$ abgeschlossen ist (siehe (a)), ist

$$\overline{K} = \bigcap_{B \supseteq K, B \text{ abgeschlossen}} B \subseteq (K^\times)^\times.$$

"$\subseteq$": Angenommen $x \notin \overline{K}$. Da $\overline{K}$ abgeschlossen, konvex und nicht leer ist, gibt es nach Satz 3.5 und Korollar 3.6 eine strikte Trennhyperebene H von x und $\overline{K}$, d.h. es gibt ein $c \neq 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $c^\mathsf{T} y < \lambda$ für alle $y \in \overline{K}$ und $c^\mathsf{T} x > \lambda$. Da $0 \in \overline{K}$ ist, folgt $\lambda > 0$.

Definiere $b = \frac{1}{\lambda} c$, dann ist $b^\mathsf{T} y = \frac{1}{\lambda} c^\mathsf{T} y < 1$ für alle $y \in \overline{K}$, und also $b \in K^\times$. Da außerdem $b^\mathsf{T} x = \frac{1}{\lambda} c^\mathsf{T} x > 1$ ist, gilt $x \notin (K^\times)^\times$.