Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 10 —

Aufgabe 10.1 (10 Punkte) Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge und $P = \operatorname{conv} X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeigen Sie: $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von P, wenn $x \notin$ conv$(X \setminus \{x\})$.

Lösung: "$\Rightarrow$": Sei $x \in P$ eine Ecke von P.Nach Satz 1.8 der Vorlesung besitzt das Polytop P als beschränktes Polyeder die Darstellung $P = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Ay \leq b\}$. Dann existiert nach Satz 1.3 ein Teilsystem $A_x, \ b_x$ so, dass $A_x x = b_x$ gilt und die Matrix $A_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang hat.
Angenommen $x \in \operatorname{conv}(X \setminus \{x\})$, dann wäre x darstellbar als Konvexkombination $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i$ so, dass $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$ und $y_i \in X \setminus \{x\}$. Andererseits gilt:

$$b_x = A_x(\sum_{i=1}^N \lambda_i y_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_x y_i \overset{y_i \in P}{\leq} \sum_{i=1}^N \lambda_i b_x = b_x \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i(b_x - A_x y_i) = 0.$$

Da $\lambda_i > 0$ und $b_x - A_x y_i \geq 0$, muss $A_x y_i = b_x$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gelten. Da A_x invertierbar ist, folgt $y_i = A_x^{-1} b_x = x$ für beliebiges i und damit der Widerspruch.
"$\Leftarrow$": Sei $x \notin \operatorname{conv}(X \setminus \{x\})$. Da X eine endliche Menge ist, können wir $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ schreiben. Da $x \in P$, gilt $x \in X$, und ohne Einschränkung sei $x = x_m$.
Falls $X = \{x\}$, sind wir fertig. Sonst gibt es nach Satz 5.3.5 und Korollar 5.3.6 ein $c \neq 0$ und ein $\delta \in \mathbb{R}$, so dass $c^{\mathsf{T}} x > \delta$ ist und $c^{\mathsf{T}} y < \delta$ für alle $y \in \operatorname{conv}(X \setminus \{x\})$. Also ist insbesondere $c^{\mathsf{T}} x > c^{\mathsf{T}} y$ für alle $y \in X \setminus \{x\}$.
Sei nun $z \in P$ und $z \neq x$. Dann ist $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geq 0$, es gibt mindestens ein $j < m$ mit $\lambda_j \neq 0$, und $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Somit gilt

$$c^{\mathsf{T}} z = \sum_{i=1}^m \lambda_i c^{\mathsf{T}} x_i < \sum_{i=1}^m \lambda_i c^{\mathsf{T}} x_m = c^{\mathsf{T}} x. \tag{1}$$

Seien nun $y, z \in P$ und $\alpha \in (0,1)$ so, dass $x = \alpha y + (1-\alpha)z$. Da $c^{\mathsf{T}} x = \alpha c^{\mathsf{T}} y + (1-\alpha) c^{\mathsf{T}} z$, folgt mit (1) sofort $x = y = z$.

Alternativ: Sei $x \notin \operatorname{conv}(X \setminus \{x\})$. Da X eine endliche Menge ist, können wir $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ schreiben. Da $x \in P$, gilt $x \in X$, und ohne Einschränkung sei $x = x_m$.
Seien $y, z \in P$ und sei $\alpha \in (0,1)$ so, dass $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ gilt. Es folgt:

$$x_m = x = \alpha y + (1-\alpha) z \overset{y,z \in P}{=} \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^m \mu_i x_i \overset{\nu_i = \alpha\lambda_i + (1-\alpha)\mu_i}{=} \sum_{i=1}^m \nu_i x_i.$$

Aus der äquivalenten Gleichung $(1-\nu_m)x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \nu_i x_i$ folgt nun $\nu_m = 1$, da sonst aus $x = x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\nu_i}{1-\nu_m} x_i$ folgen würde, dass $x \in \operatorname{conv}(X \setminus \{x\})$. Mit $\nu_m = 1$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\nu_m = 1 &\Rightarrow \nu_k = 0 \text{ für } k < m \\
&\Rightarrow \alpha\lambda_k + (1-\alpha)\mu_k = 0 \text{ für } k < m \\
&\Rightarrow \lambda_k = \mu_k = 0 \text{ für } k < m \\
&\Rightarrow y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = x_m = \sum_{i=1}^m \mu_i x_i = z.
\end{aligned}$$

Da $x = x_m$ war wissen wir nun, dass x ein Extrempunkt des Polytops P ist und somit eine Ecke.

Aufgabe 10.2 (10 Punkte) Bestimme die Ecken der folgenden Polyeder:

a) $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \le b\}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

b) $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y \le 1, 2x - z \le -1, -x + y - z \le 0,$
$x - y - 2z \le -3\}$.

Lösung:

a) Zur Bestimmung der Ecken betrachten wir alle 4×4-Untermatrizen von A und versuchen, das durch sie und die entsprechenden Einträge von b bestimmte Gleichungssystem zu lösen. Hat die Untermatrix vollen Rang, hat das System eine eindeutige Lösung. Erfüllt diese auch die ausgelassene Ungleichung, so ist sie eine Ecke.

   Alle 4×4-Untermatrizen von A haben vollen Rang. Bei Auslassen der ersten, der dritten und der fünften Zeile erhalten wir Ecken. Diese sind:

$$\begin{pmatrix} -11/3 \\ 2 \\ 1/3 \\ -5/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -24/5 \\ 2 \\ 13/5 \\ -7/5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt alle Ungleichungen mit Gleichheit. Da die Matrix, die P definiert, Rang 3 hat, ist v die einzige Ecke von P.

Aufgabe 10.3 (Präsenzaufgabe) Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge.

a) Es sei $c \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Das Maximum $\max\{c^\top x : x \in C\}$ wird in einem Extrempunkt von C angenommen.

b) Bestimmen Sie alle Extrempunkte des Polyeders:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung:

a) Da C kompakt ist und die Abbildung $x \mapsto c^\top x$ stetig ist, wird das Maximum an einem Punkt $p \in C$ angenommen.

   Da $C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$ ist, gibt es ein $N > 0$ und $x_1, \ldots, x_N \in \operatorname{ext}(C)$, sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_N > 0$ mit $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, so dass $p = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$.
   Dann ist

$$c^\top p = \sum_{i=1}^N \alpha_i c^\top x_i \le \sum_{i=1}^N \alpha_i c^\top p = c^\top p,$$

   und somit $c^\top x_i = c^\top p$ für alle x_i, da $\alpha_i > 0$ war.

b) Wir bezeichnen die Matrix, die P beschreibt, mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, wobei $a_i^\top$ die i-te Zeile von A ist. Wir verwenden die folgende Charakterisierung der Extrempunkte eines Polyeders: Ein Punkt $z \in P$ ist genau dann ein Extrempunkt, wenn der Rang der Matrix A_z gleich 3 ist (Dabei ist die Matrix A_z die Matrix, die aus A entsteht, wenn wir alle Zeilen $a_i^\top$ mit $a_i^\top z < b_i$ löschen.). Wir lösen die vier linearen Gleichungssysteme, die entstehen, wenn wir jeweils eine Zeile der Matrix A löschen.

Löschen der 1. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{nicht lösbar}$$

Löschen der 2. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow z_2 = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Löschen der 3. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

Löschen der 4. Zeile:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$a_2^\top z_2 = -6 \leq 1,\ a_3^\top z_3 = -5 \leq 2,\ a_4^\top z_4 = -3 \leq 4,$$

also sind z_2, z_3, z_4 die Extrempunkte von P, da $z_i \in P$ und weil rang $A_{z_i} = 3$, mit $i = 2, 3, 4$.

Aufgabe 10.4 (Präsenzaufgabe) Sei B_n die Einheitskugel bezüglich der euklidischen Norm.

a) Zeigen Sie, dass B_n konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Extrempunkt von B_n ist.

Lösung:

a) Seien $x, y \in B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und $\alpha \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in B_n$. Es gilt:

$$\|z\| = \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

b) Offensichtlich gilt $e_1 \in B_n$. Angenommen wir können e_1 schreiben als

$$e_1 = \alpha x + (1-\alpha)y$$

mit $x, y \in B_n$ und $\alpha \in (0, 1)$. Nach Definition eines Extrempunkts müssen wir zeigen, dass dann $x = y = e_1$ gilt.

Wie oben haben wir

$$1 = \|e_1\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq 1, \text{ also } \|x\| = \|y\| = 1.$$

Wir zeigen, dass $x_1 = 1$ und $y_1 = 1$ gelten muss. Damit ist klar, dass $x = y = e_1$. Da $x, y \in B_n$, muss $x_1, y_1 \leq 1$ gelten. Wäre $x_1 < 1$ oder $y_1 < 1$, so hätten wir:

$$1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 < \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ein Widerspruch!