Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 11 —

Aufgabe 11.1 (10 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann ist $C^\times$ genau dann beschränkt, wenn $0 \in \operatorname{int} C$.

b) Sei
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^\mathsf{T} x \leq 1, \dots, a_m^\mathsf{T} x \leq 1\}$$
ein Polyeder mit $0 \in \operatorname{int} P$. Dann ist
$$P^\times = \operatorname{conv}\{0, a_1, \dots, a_m\}.$$

Lösung:

a) **Notwendig** ("$\Leftarrow$"): Nach Voraussetzung gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $B(0, \varepsilon) \subseteq C$ ist. Für $v \in S^{n-1}$ wissen wir, dass für $M > 0$ genau dann $Mv \in C^\times$ ist, wenn $Mv^\mathsf{T} x \leq 1$ für alle $x \in C$ gilt.

Also ist $Mv \notin C^\times$ für $M > \frac{1}{\varepsilon}$, da $\varepsilon v \in C$ ist. Somit ist $C^\times$ beschränkt.

Hinreichend ("$\Rightarrow$"): Per Kontraposition.

Falls C leer ist, ist $C^\times = \mathbb{R}^n$ unbeschränkt. Sei im Folgenden also $C \neq \emptyset$ und $0 \notin \operatorname{int} C$.

Falls $0 \in \partial C$ ist, gibt es nach Korollar 5.3.8 eine Stützhyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^\mathsf{T} x = \delta\}$ von C mit $0 \in H$, also ist $\delta = 0$. Da $C \subseteq H^-$, ist dann $Mc \in C^\times$ für alle $M > 0$ und $C^\times$ ist nicht beschränkt.

Falls $0 \notin \overline{C}$ gibt es nach Satz 5.3.5 eine Trennhyperebene H von $\{0\}$ und C. Sei H' parallel zu H mit $0 \in H'$, dann greift wieder das gleiche Argument wie oben.

b) Sei $Q = \operatorname{conv}\{0, a_1, \dots, a_m\}$. Da $0x \leq 1$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist nach Lemma 6.1.7(4) $Q^\times = P$. Da $0 \in Q$, ist nach Aufgabe 9.3(b) $(Q^\times)^\times = Q$, zusammen also $Q = (Q^\times)^\times = P^\times$.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte) Schreiben Sie das Polytop
$$P = \operatorname{conv}\{-e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3, -e_1 - e_2 + e_3,$$
$$-e_1 - e_2 - e_3, e_1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
mit Hilfe der Polaren als Polyeder, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: Nach Lemma 6.1.7(4) ist
$$P^\times = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
und da $0 \in \operatorname{int} P$ ist, ist $P^\times$ nach Aufgabe 11.1(a) beschränkt und somit ein Polytop.

Zum Bestimmen der Ecken von $P^{\times}$ betrachten wir alle quadratischen Teilmatrizen der obigen Matrix. Beobachte zunächst, dass der Vektor $(-1,0,0)^{\mathsf{T}}$ alle Ungleichungen erfüllt und alle bis auf die erste mit Gleichheit. Außerdem hat die Teilmatrix, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, Rang 3. Also haben wir eine Ecke gefunden und müssen nur noch die sechs quadratischen Teilmatrizen betrachten, die die erste Zeile enthalten.
Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

haben keinen vollen Rang. Die übrigen vier Matrizen liefern uns tatsächlich Ecken, so dass wir insgesamt

$$P^{\times} = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

erhalten. Da $0 \in P$ und P abgeschlossen ist, ist nach Aufgabe 9.3(b) $(P^{\times})^{\times} = P$, und somit ist wiederum mit Lemma 6.1.7(4)

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 11.3 (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:
Es gibt genau dann einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^{\mathsf{T}} A > 0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Vektoren $x \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass es genau dann einen Vektor $x \geq 0$ mit $Ax = 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gibt, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^{\mathsf{T}} A > 0$ gibt.
Betrachte hierfür die $(m+1) \times n$ - Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} & A & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Lemma von Farkas ist die Existenz eines $x \geq 0$ mit $A'x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ äquivalent dazu, dass es keinen Vektor $\binom{y}{y_0} \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $(y^{\mathsf{T}}, y_0)A' \geq 0$ und $y_0 < 0$ gibt. Das ist äquivalent dazu, dass es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^{\mathsf{T}} A > 0$ gibt.
Nun müssen wir noch zeigen, dass die Existenz eines $x \geq 0$ mit $Ax = 0$ und $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ gleichbedeutend ist mit der Existenz eines $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$. $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ impliziert offensichtlich $x \neq 0$. Ist $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$, so können wir $x' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} x$ definieren. Dann gilt $x' \geq 0$ sowie $Ax' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot Ax = 0$. Zudem ist $\sum_{i=1}^n x'_i = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} \sum_{i=1}^n x_i = 1$.