Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 11 —

Aufgabe 11.1 (10 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Dann ist $C^\times$ genau dann beschränkt, wenn $0 \in \operatorname{int} C$.

b) Sei
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^\mathsf{T} x \leq 1, \ldots, a_m^\mathsf{T} x \leq 1\}$$
ein Polyeder mit $0 \in \operatorname{int} P$. Dann ist
$$P^\times = \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Aufgabe 11.2 (10 Punkte) Schreiben Sie das Polytop

$$P = \operatorname{conv}\{-e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3, -e_1 - e_2 + e_3, \\ -e_1 - e_2 - e_3, e_1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit Hilfe der Polaren als Polyeder, wobei e_i der i-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 11.3 (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:
Es gibt genau dann einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\mathsf{T} A > 0$ gibt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Vektoren $x \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Aufgabe 11.4 (Präsenzaufgabe) Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ ein beschränktes Polyeder. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass P genau dann leer ist, wenn

$$P^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b + \varepsilon \cdot \mathbf{1}\}$$

leer ist (wobei $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$).

Abgabe: Bis Dienstag, 11. Juli 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 11.1, 11.2 und 11.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.