Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 12 —

Aufgabe 12.1 (10 Punkte)

a) Dualisieren Sie das folgende lineare Programm:

$$\max\left\{-3x_1 - x_2 - 2x_3 - \frac{1}{5}x_4 \;:\; 3x_1 + x_2 \geq 1,\; 3x_2 + 12x_3 \geq 1,\; x_3 + x_4 \geq 1,\; 7x_1 + x_4 = 4,\; x \geq 0\right\}.$$

b) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei endliche Mengen mit $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gibt eine strikte Trennhyperebene von X und Y.

(2) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a^{\mathsf{T}} x_i - \beta \geq 1$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $a^{\mathsf{T}} y_j - \beta \leq -1$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

(3) Es gibt keine Vektoren $\lambda \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}, \mu \in \mathbb{R}^k_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{j=1}^k \mu_j = 1$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^k \mu_j y_j$.

(4) $\operatorname{conv} X \cap \operatorname{conv} Y = \emptyset$.

Lösung:

a) Da $7x_1 + x_4 = 4$ äquivalent zu den zwei Ungleichungen $7x_1 + x_4 \geq 4$ und $7x_1 + x_4 \leq 4$ ist, können wir das Programm schreiben als

$$\max\{c^{\mathsf{T}} x : Ax \leq b\}$$

mit

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \\ -1/5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein hierzu duales Programm lautet dann

$$\begin{aligned} \min\ & b^{\mathsf{T}} y \\ & y \in \mathbb{R}^9 \\ & y \geq 0 \\ & 3y_1 + 7(y_4 - y_5) + y_6 = 3 \\ & y_1 + 3y_2 + y_7 = 1 \\ & 12y_2 + y_3 + y_8 = 2 \\ & y_3 + (y_4 - y_5) + y_9 = 1/5. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $-A^\mathsf{T} y = -c$ geschrieben, um weniger negative Vorzeichen zu haben.

Dieses Programm lässt sich nun noch etwas vereinfachen (was hier nicht gefordert war). So fällt beispielsweise auf, dass $y_6, \dots, y_9$ nur in je einer Gleichung auftreten, und nicht in der Zielfunktion b vorkommen. Darum können wir sie eliminieren, indem wir ihre Nicht-Negativität ausnutzen und die Gleichungen zu Ungleichungen machen.

Ausserdem treten y_4 und y_5 immer als Paar auf, und jede reelle Zahl ist darstellbar als Differenz von nichtnegativen reellen Zahlen (und offensichtlich gilt auch die Umkehrung). Zuletzt bemerken wir noch, dass $\min c^\mathsf{T} x = -\max -c^\mathsf{T} x$ ist. So erhalten wir das lineare Programm

$$\begin{aligned} -\max\ &(1,1,1,4)y \\ &y \in \mathbb{R}^4 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ &3y_1 + 7y_4 \leq 3 \\ &y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ &12y_2 + y_3 \leq 2 \\ &y_3 + y_4 \leq 1/5. \end{aligned}$$

Alternativ: Das Programm lässt sich relativ leicht in duale Standardform bringen. Die Ungleichungen lassen sich durch Einführen von neuen nicht-negativen Variablen zu Gleichungen umformen, und so erhalten wir mit $\max c^\mathsf{T} x = -\min -c^\mathsf{T} x$

$$-\min\{c^\mathsf{T} x : x \geq 0, Ax = b\}$$

mit

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 12 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ein duales Programm hierzu lautet dann hier direkt

$$\begin{aligned} -\max\ &(1,1,1,4)y \\ &y \in \mathbb{R}^4 \\ &3y_1 + 7y_4 \leq 3 \\ &y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ &12y_2 + y_3 \leq 2 \\ &y_3 + y_4 \leq 1/5 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Für die Äquivalenz von (1) und (2) sei $c \neq 0$ und $\delta \in \mathbb{R}$ durch die strikte Trennhyperebene gegeben. Da X, Y endliche Mengen sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $c^\mathsf{T} x_i \geq \delta + \varepsilon$ und $c^\mathsf{T} y_j \leq \delta - \varepsilon$ gilt. Mit $a = \frac{1}{\varepsilon} c$ und $\beta = \frac{1}{\varepsilon}\delta$ haben wir (2) gezeigt. Die Umkehrung ist klar.

Die Äquivalenz von (3) und (4) ist ebenfalls klar, nach Definition der konvexen Hülle.

Es bleibt also die Äquivalenz von (2) und (3) zu zeigen. Sei hierzu X die Matrix, deren i-te Zeile x_i^T ist, und Y entsprechend für die y_j. Dann ist (2) äquivalent zu der Aussage: Es gibt ein $\binom{a}{\beta} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\begin{pmatrix} -X & \mathbf{1} \\ Y & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \binom{a}{\beta} \leq -\mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1}$ jeweils für den Vektor adäquater

Länge mit 1 in jeder Koordinate steht. Nach Farkas Lemma (Variante aus Korrolar 2.4) ist dies äquivalent dazu, dass es kein $y \in \mathbb{R}^{m+k}$ gibt, das $y \geq 0$, $\begin{pmatrix} -X^\top & Y^\top \\ \mathbf{1}^\top & -\mathbf{1}^\top \end{pmatrix} y = 0$ und $-\sum y_i < 0$ erfüllt.

Da Multiplikation mit einer positiven Zahl die aufgeführten Eigenschaften von y nicht ändert, ist diese Aussage äquivalent dazu, dass es kein $y \in \mathbb{R}^{m+k}$ gibt, das $y \geq 0$, $\begin{pmatrix} -X^\top & Y^\top \\ \mathbf{1}^\top & -\mathbf{1}^\top \end{pmatrix} y = 0$ und $\sum y_i = 2$ erfüllt. Definiere nun $\lambda = (y_1, \dots, y_m)^\top$ und $\mu = (y_{m+1}, \dots, y_{m+k})^\top$, dann erhalten wir genau die Aussage (3).

Aufgabe 12.2 (10 Punkte) Lösen Sie das Maximierungsproblem $\max\{c^\top x : Ax \leq b\}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin, wobei

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zunächst erweitern wir das System zu

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun wollen wir λ maximal wählen, so dass es ein $x \in \mathbb{R}^3$ gibt, derart dass $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ das Ungleichungssystem erfüllt. Nachdem wir mit positiven Konstanten multipliziert haben und die Zeilen umsortiert, ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir x_1 eleminieren und erhalten das System

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 0 \\ 3 & -2/3 & 0 \\ -2 & 1/3 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wieder multiplizieren wir mit positiven Konstanten und sortieren die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2/9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir x_2 eleminieren und erhalten das System

$$\begin{pmatrix} -1/18 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \\ -1/6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -5/6 \\ -1/6 \\ 5/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Wieder multiplizieren wir mit positiven Konstanten und sortieren die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 5/3 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir x_3 eleminieren und erhalten (nach Multiplikation mit positiven Konstanten) das System

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \leq \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \\ 14/3 \end{pmatrix}.$$

Das Maximierungsproblem hat also den Wert $-4/3$.

Aufgabe 12.3 (10 Punkte) Gegeben sei ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $(x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \mapsto x_3$, die Projektion auf die letzte Koordinate. Berechnen Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin die Projektion $\pi(P)$.

Lösung: Wir können P direkt entlang der x_1-Achse projezieren und erhalten

$$P' = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun können wir entlang der x_2- beziehungsweise y_1-Achse projezieren und erhalten

$$\pi(P) = \left\{ z \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = [0, 1].$$