



Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 12 —

Aufgabe 12.1 (10 Punkte)

a) Dualisieren Sie das folgende lineare Programm:

$$\max \left\{ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - \frac{1}{5}x_4 : 3x_1 + x_2 \geq 1, 3x_2 + 12x_3 \geq 1, x_3 + x_4 \geq 1, 7x_1 + x_4 = 4, x \geq 0 \right\}.$$

b) Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei endliche Mengen mit $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Es gibt eine strikte Trennhyperebene von X und Y .
- (2) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}^n$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit $a^\top x_i - \beta \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $a^\top y_j - \beta \leq -1$ für alle $j = 1, \dots, k$.
- (3) Es gibt keine Vektoren $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}^k$ mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i = \sum_{j=1}^k \mu_j = 1$ und $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^k \mu_j y_j$.
- (4) $\text{conv } X \cap \text{conv } Y = \emptyset$.

Aufgabe 12.2 (10 Punkte) Lösen Sie das Maximierungsproblem $\max\{c^\top x : Ax \leq b\}$ mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin, wobei

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3 (10 Punkte) Gegeben sei ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(x_1, x_2, x_3)^\top \mapsto x_3$, die Projektion auf die letzte Koordinate. Berechnen Sie mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin die Projektion $\pi(P)$.

Aufgabe 12.4 (Präsenzaufgabe) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Eine Funktion $f \in \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ heisst *Zirkulation*, falls das Flusserhaltungsgesetz in jedem Knoten gilt, also für alle $v \in V$ gilt:

$$\sum_{a \in \delta^{\text{in}}(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^{\text{out}}(v)} f(a).$$

Sei $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^A$ eine Kapazitätsfunktion auf den Kanten von D . Finden Sie ein lineares Programm, welches das Maximum von $\sum_{a \in A} f(a)$ berechnet, wobei f eine Zirkulation mit $f \leq c$ ist. Dualisieren Sie dieses Programm.

Abgabe: Bis Dienstag, 18. Juli 2017, 10 Uhr.

Aufgaben 12.1, 12.2 und 12.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.