Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Lösungsskizze Blatt 13 —

Aufgabe 13.1 (10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* in G, falls für alle $u, v \in U$ stets $\{u, v\} \notin E$ gilt. Das *Unabhängigkeitspolytop* $P_\alpha(G) \subseteq \mathbb{R}^V$ von G ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der unabhängigen Mengen in G.

a) Sei A die Inzidenzmatrix von G. Zeigen Sie:

$$P_\alpha(G) = \left\{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}\right\},$$

wobei $\mathbf{1}$ der Vektor ist, dessen Einträge alle gleich 1 sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in a) nicht stimmt, wenn G nicht bipartit ist.

c) Sei $\alpha(G)$ die Kardinalität der größten unabhängigen Menge in G. Zeigen Sie mit Hilfe des Unabhängigkeitspolytops: Falls jeder Knoten in mindestens einer Kante liegt, gilt

$$\alpha(G) = \min\left\{\mathbf{1}^\mathsf{T} y : y \in \mathbb{Z}^E, y \geq 0, \text{ für alle } v \in V \text{ gilt: } \sum_{e \ni v} y_e \geq 1\right\}.$$

Lösung:

a) $\subseteq$: Sei $\mathcal{U}$ die Menge der unabhängigen Mengen in G. Für eine Konvexkombination $x = \sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U \chi^U$ mit $\sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U = 1$ und $\lambda_U \in [0, 1]$, gilt offensichtlich $x \geq 0$. Sei $e \in E$ und a_e^T die zu e korrespondierende Zeile von A^T. Dann gilt für jedes $U \in \mathcal{U}$

$$a_e^\mathsf{T} \chi^U \leq 1,$$

da U aus jeder Kante höchstens einen Konten enthält. Also ist auch

$$A^\mathsf{T} x = \sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U A^\mathsf{T} \chi^U \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \lambda_U \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

$\supseteq$: Wir können das Polyeder

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}\right\}$$

schreiben als

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^V : Bx \leq b\right\},$$

wobei $B = \begin{pmatrix} A^\mathsf{T} \\ -I \end{pmatrix}$ und $b = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$.

Q ist beschränkt ($x \in Q \Rightarrow 0 \leq x_v \leq 1$ für alle $v \in V$), also ist Q die konvexe Hülle seiner Ecken. Zudem ist die Matrix B vollständig unimodular (Warum?). Also sind alle Ecken von Q ganzzahlig. Ein ganzzahliger Vektor in Q entspricht aber genau einer unabhängigen Menge in G.

b) Sei G ein Kreis der Länge 3 (also ein Dreieck). Dann ist

$$P_\alpha(G) = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\},$$

und

$$A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Somit erfüllt $x = (1/2, 1/2, 1/2)^\mathsf{T}$ die Bedingungen $x \geq 0$ und $A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}$, aber $x \notin P_\alpha(G)$.

c) Da das Maximum einer linearen Funktion über einem Polytop (auch) an einer Ecke angenommen wird, ist

$$\alpha(G) = \max\{\mathbf{1}^\mathsf{T} x : x \in P_\alpha(G)\}.$$

Nach Teil a) wissen wir also, dass

$$\begin{aligned} \alpha(G) = \max\ & \mathbf{1}^\mathsf{T} x \\ & x \geq 0 \\ & A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Bemerke dass $x = \mathbf{0}$ ein zulässiger Vektor ist. Mit $B = \begin{pmatrix}A^\mathsf{T}\\ -I\end{pmatrix}$ und $b = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$ können wir das Programm in primale Standardform bringen und erhalten das duale Programm

$$\begin{aligned} d^* = \min\ & b^\mathsf{T} y \\ & y \in \mathbb{R}^{E+V} \\ & y \geq 0 \\ & B^\mathsf{T} y = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Schreibe $y = \binom{\tilde{y}}{z}$ mit $\tilde{y} \in \mathbb{R}^E$ und $z \in \mathbb{R}^V$. Dann ist $B^\mathsf{T} y = A\tilde{y} - z$, und da $z \geq 0$ nicht in der Zielfunktion vorkommt, erhalten wir

$$\begin{aligned} d^* = \min\ & \mathbf{1}^\mathsf{T} \tilde{y} \\ & \tilde{y} \in \mathbb{R}^E \\ & \tilde{y} \geq 0 \\ & A\tilde{y} \geq \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Bemerke, dass $\tilde{y} = \mathbf{1}$ ein zulässiger Vektor ist. Somit hat sowohl das primale als auch das duale Programm ein endliches Optimum, und nach Korollar 2.4 gibt es jeweils ganzzahlige optimale Lösungen, da die Matrix $\begin{pmatrix}-A\\ -I\end{pmatrix}$ vollständig unimodular ist.

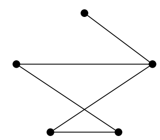
Also können wir $\tilde{y} \in \mathbb{Z}^E$ fordern, ohne den Wert von d^* zu ändern. Mit starker Dualität folgt die Aussage.

Aufgabe 13.2 (10 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen vollständig unimodular sind:

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Lösung:

M_1: Die Matrix ist die Inzidenzmatrix des folgenden Graphen:



Da dieser bipartit ist, ist M_1 vollständig unimoular.

M_2: Die erste Zeile hat keinen Einfluss darauf, ob M_2 vollständig unimodular ist. Es ist

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Die Minoren zu 2×2-Teilmatrizen lauten

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da alle Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$ sind, ist M_2 vollständig unimodular.

M_3: Die erste Spalte hat wieder keinen Einfluss darauf, ob M_3 vollständig unimodular ist. Die übrigen Spalten sind die Inzidenzmatrix eines Kreises der Länge 3. Da dieser Graph nicht bipartit ist, ist M_3 nicht vollständig unimodular.