Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2017

— Aufgabenblatt 13 —

Aufgabe 13.1 (10 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* in G, falls für alle $u, v \in U$ stets $\{u, v\} \notin E$ gilt. Das *Unabhängigkeitspolytop* $P_\alpha(G) \subseteq \mathbb{R}^V$ von G ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der unabhängigen Mengen in G.

a) Sei A die Inzidenzmatrix von G. Zeigen Sie:

$$P_\alpha(G) = \left\{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}\right\},$$

wobei $\mathbf{1}$ der Vektor ist, dessen Einträge alle gleich 1 sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in a) nicht stimmt, wenn G nicht bipartit ist.

c) Sei $\alpha(G)$ die Kardinalität der größten unabhängigen Menge in G. Zeigen Sie mit Hilfe des Unabhängigkeitspolytops:

$$\alpha(G) = \min \left\{ \mathbf{1}^\mathsf{T} y : y \in \mathbb{Z}^E, \text{ für alle } v \in V \text{ gilt: } \sum_{e \ni v} y_e \geq 1 \right\}.$$

Aufgabe 13.2 (10 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen vollständig unimodular sind:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Bis Dienstag, 25. Juli 2017, 10 Uhr.
Aufgaben 13.1 und 13.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie Übungsgruppennummer auf die Abgabe schreiben.