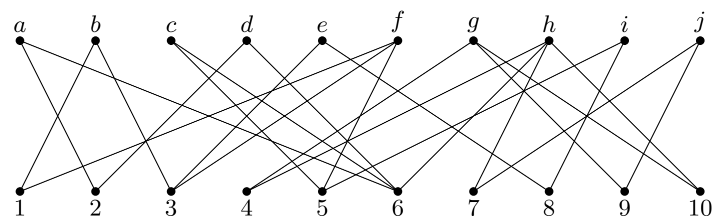
Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 3 —

Aufgabe 3.1 Bestimmen Sie die Matchingzahl $\nu(G)$ und die Knotenüberdeckungszahl $\tau(G)$ von folgendem Graph. Geben Sie ein optimales Matching M mit $|M| = \nu(G)$ und eine zugehörige (unter Verwendung der Konstruktion, die im Beweis von Satz II.3.2 angegeben wurde) optimale Knotenüberdeckung C mit $|C| = \tau(G)$ an:



Aufgabe 3.2 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \cup W$. Definiere

$$\delta = \max_{X \subseteq U}\{|X| - |\Gamma(X)|\},$$

wobei $\Gamma(X) = \{w \in W : \exists x \in X : \{x, w\} \in E\}$ die Menge der Nachbarn von X ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von König, dass $\nu(G) = |U| - \delta$ gilt.

Aufgabe 3.3 Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \cup W$. Sei r die maximale Anzahl der Kanten, die von einem Knoten ausgehen. Zeigen Sie: E ist die Vereinigung von r Matchings.

Anleitung: Arbeiten Sie dazu die folgenden Schritte ab. Nehmen Sie zunächst an, dass von jedem Knoten genau r Kanten ausgehen.

a) Zeigen Sie, dass G ein perfektes Matching besitzt.

b) Zeigen Sie, dass G dann die Vereinigung von r perfekten Matchings ist. Hinweis: Benutzen Sie das in a) gefundene Matching, entfernen Sie es aus G und verwenden Sie ein Induktionsargument.

Nun seien G und r wie in der Aufgabenstellung.

c) Zeigen Sie, dass es einen bipartiten Graph $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ mit Bipartition $\tilde{V} = \tilde{U} \cup \tilde{W}$ gibt, so dass

$$U \subseteq \tilde{U}, \ \ W \subseteq \tilde{W} \ \text{ und } \ E \subseteq \tilde{E}$$

ist und so, dass in $\tilde{G}$ zu jedem Knoten genau r Kanten adjazent sind.

d) Benutzen Sie nun die Teile b) und c), um die in der Aufgabenstellung behauptete Aussage zu beweisen.

Aufgabe 3.4 (Präsenzaufgabe) Sie programmieren eine App, die Taxifahrten vermittelt. Ein Teilproblem ist wie folgt: Vier ihrer Fahrer, halten sich gerade am Appellhofplatz, Neumarkt, Albertus Magnus Platz und an der Messe auf und sollen Fahrten am Dom, der Mauritiuskirche, dem Mediapark und dem Flughafen übernehmen. Dabei soll jeder Taxifahrer genau eine Fahrt übernehmen und die gesamte Anfahrtszeit (in der Tabelle in Minuten angegeben) soll so klein wie möglich sein. Bestimmen Sie eine optimale Zuweisung der Taxifahrer mit Hilfe der ungarischen Methode.

	Dom	Mauritiuskirche	Mediapark	Flughafen
Appellhofplatz	7	10	5	19
Neumarkt	9	8	6	17
Albertus Magnus Platz	13	8	9	18
Messe	11	16	13	15

Abgabe: Bis Freitag, 11. Mai 2018, 8 Uhr.
Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.