Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 4 —

Aufgabe 4.1 Sei M eine endliche Menge und seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Teilmengen von X, die nicht notwendigerweise alle verschieden sind. Bezeichne eine Folge $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_i \in A_i$ und $x_i \neq x_j$, für alle $i \neq j$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, als *Vertretersystem* für $A_1, \ldots, A_n$.

Verwenden Sie den Satz von Hall (Korollar II.3.3), um zu überprüfen, ob die folgenden Menge ein Vertretersystem besitzen:

(a) $\{3, 4, 5\}, \{2, 5, 6\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 6\}$

(b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{1, 3, 4, 7\}, \{1, 3, 7\}$.

Aufgabe 4.2 Es sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \cup W$. Sei $X \in R^{U \times W}$ eine Matrix mit Koeffizienten im Polynomring R in den Unbekannten $\{x_{u,w} : u \in U,\ w \in W\}$, wobei die Einträge von X durch die (linearen) Monome

$$X_{u,w} = \begin{cases} x_{u,w} & \text{falls } \{u, w\} \in E, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben seien. Zeigen Sie:

$$G \text{ besitzt ein perfektes Matching} \iff \det X \neq 0.$$

Aufgabe 4.3 Sie planen ein "erfolgreiches Flugunternehmen", welches Ferienflüge vom Köln-Bonner Flughafen aus anbietet, aufzubauen: Air Cologne. Glücklicherweise sind vor kurzem einige Konkurrenzunternehmen pleitegegangen: Air Düsseldorf, Air Leverkusen und Air Gladbach. Sie können günstig Flugrouten von diesen drei Firmen erwerben, unterliegen aber zunächst folgenden Einschränkungen:

- Sie dürfen zu jeder Tageszeit (morgens, mittags, abends) nur einen Flug von Köln aus starten.
- Jeder Flughafen in den Ferienorten gestattet Ihnen nur eine Landung am Tag.

Die untenstehenden Tabellen listen die verfügbaren Flugrouten aller drei Airlines auf, sowie die durchschnittlichen Jahresgewinne auf diesen Routen.
Modellelieren Sie das Problem so, dass eine optimale Auswahl von Flugrouten einem maximalen gewichtetem Matching in einem bipartiten Graph entspricht. Finden Sie dann ein solches durch Anwendung der ungarischen Methode.

	Air Düsseldorf		**Air Leverkusen**		**Air Gladbach**	
Zeit	Ziel	Gewinn	Ziel	Gewinn	Ziel	Gewinn
morgens	IBZ	5	HER	4	PMI	4
mittags	LCA	3	PMI	6	IBZ	5
abends	PMI	6	LCA	2	HER	2

Aufgabe 4.4 (Präsenzaufgabe) Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $V = U \cup W$. Sei $r \in \mathbb{N}$ maximal mit der Eigenschaft, dass von jedem Knoten mindestens r Kanten ausgehen. Zeigen Sie: E ist die Vereinigung von r disjunkten Kantenüberdeckungen. Dabei ist eine Kantenüberdeckung eine Teilmenge $F \subseteq E$ mit der Eigenschaft: Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es eine Kante $e \in F$ mit $v \in e$.

Hinweise:
1. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Kantenüberdeckungen und (perfekten) Matchings?
2. Zerlegen Sie G in geeignete Untergraphen $G_1, \ldots, G_k$, so dass in G_i für jeden Knoten gilt, dass die maximale Anzahl an ausgehenden Kanten maximal r ist. Dies geht sogar so, dass bis auf möglicherweise in einem dieser Untergraphen, in allen anderen an jedem Knoten genau r Kanten ausgehen.

Abgabe: Bis Freitag, 18. Mai 2018, 8 Uhr.
Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.