Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

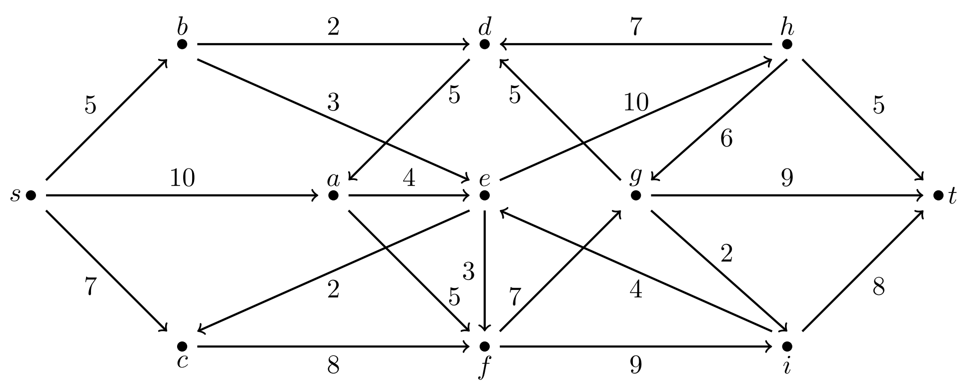
Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1 Es sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit Quelle $s \in V$ und Senke $t \in V$. Desweiteren sei $c \in \mathbb{R}^A_{\geq 0}$ eine Kapazitätsfunktion und $f \in \mathbb{R}^A$ sei ein s-t-Fluss, der durch c beschränkt ist. Angenommen im Residualgraph D_f gibt es einen Weg P von s nach t. Zeigen Sie, dass die charakterische Funktion χ^P dieses Weges das Flusserhaltungsgesetz in allen Knoten $v \in V \setminus \{s, t\}$ erfüllt.

Aufgabe 5.2 Berechnen Sie in dem nachfolgenden Graph einen maximalen Fluß und einen minimalen Schnitt, jeweils bzgl. der an den Kanten kenntlich gemachten Kapazitäten. Verwenden Sie dazu den Algorithmus von Ford und Fulkerson.



Aufgabe 5.3 Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson nicht notwendigerweise nach endlich vielen Schritten terminiert, wenn man irrationale Kapazitäten zulässt.

Anleitung: Konstruieren Sie folgenden Graph: Knotenmenge $V = \{s, x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, t\}$ mit den ausgezeichneten Kanten $A_i = (x_i, y_i)$, den Kanten $(x_i, y_j), (y_i, x_j), (y_i, y_j)$ für $i \neq j$, sowie den Quell- und Senken-Kanten $(s, x_i), (y_i, t)$ $(i, j \in \{1, \ldots, 4\})$.
Betrachten Sie den goldenen Schnitt $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, dieser erfüllt $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Benutzen Sie die Kapazitätsfunktion c, die wie folgt auf den Kanten definiert ist:

$$c(A_1) = 1,\ c(A_2) = \sigma,\ c(A_3) = \sigma^2,\ c(A_4) = \sigma^2,$$

sowie $c(a) = \frac{1}{1-\sigma}$ für alle weiteren Kanten a.

1. Schritt: Verwenden Sie in der ersten Iteration des Algorithmus den Weg von s nacht t, der die folgenden Knoten abgeht

$$s, x_1, y_1, t.$$

2. Schritt: Verwenden Sie in der zweiten Iteration des Algorithmus den Weg von s nach t, der die folgenden Knoten abgeht

$$s, x_2, y_2, x_3, y_3, t.$$

3. Schritt: Verwenden Sie in der dritten Iteration des Algorithmus den Weg von s nach t, der die folgenden Knoten abgeht

$$s, x_2, y_2, y_1, x_1, y_3, x_3, y_4, t.$$

4. Schritt: Beenden Sie den Beweis durch ein Induktionsargument. Für den Induktionsschritt passen Sie Schritte 2 und 3 an: Finden Sie dazu die richtigen Wege, indem Sie die ausgezeichneten Kanten nach ihren Restkapazitäten sortieren.

Aufgabe 5.4 (Präsenzaufgabe)

(a) Modellieren Sie das Problem der Berechnung der Matchingzahl in einem bipartiten Graphen mit Hilfe des maximalen Flussproblems. Beweisen Sie das Matchingtheorem von König unter Verwendung der Aussage des Max- Flow-Min-Cut-Theorems.

(b) Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph und $s, t \in V$. Zeigen Sie: Die maximale Anzahl von kantendisjunkten Wegen von s nach t in D ist gleich der minimalen Kardinalität eines s-t-Schnittes.

Abgabe: Bis Freitag, 1. Juni 2018, 8 Uhr.
Aufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.