Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 6 —

Aufgabe 6.1

a) In der Vorlesung wurde die Dimension eines nichtleeren affinen Unterraumes A wie folgt definiert (vgl. Teil B, Definition 1.3 (3)): Sei $A = x + U \subseteq \mathbb{R}^n$, mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, dann ist $\dim(A) = \dim(U)$. Zeigen Sie, dass der so entstandene Dimensionsbegriff für affine Unterräume wohldefiniert ist. (D.h. zeigen Sie, dass die Dimension von A nicht von der konkreten Darstellung $A = x + U$ abhängt).

b) Es seien H_1, H_2 *Hyperebenen* im $\mathbb{R}^4$ (d.h. affine Unterräume der Dimension $3 = 4 - 1$). Bestimmen Sie alle möglichen Dimensionen für Schnitte dieser Hyperebenen. Geben Sie zu jeder möglichen Dimension eines Schnittes ein Paar von Hyperebenen und deren Schnitt explizit an.

c) Es seien H_1, H_2 *Hyperebenen* im $\mathbb{R}^n$ (d.h. affine Unterräume der Dimension $n - 1$). Geben Sie eine Liste aller möglichen Dimensionen für Schnitte dieser Hyperebenen an, beweisen Sie, dass ihre Liste vollständig und korrekt ist.

Aufgabe 6.2

a) Sind die folgenden Mengen konvex? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

$$K_1 = \{x = (a,b,c)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3 : a \geq 0,\ b \geq 0,\ a \cdot b \geq c^2\},$$
$$K_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x < 0 \right\},$$
$$K_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x \leq 0 \right\}.$$

b) Seien $X, Y \in \{A, \operatorname{int} A, \bar{A}, \partial A\}$. Welche Implikationen der Form

$$X \text{ konvex} \Longrightarrow Y \text{ konvex}$$

gelten? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 6.3 Betrachten Sie die Menge $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_6\}$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie den Punkt

$$y = \frac{1}{20}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{20}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{1}{20}x_6$$

und verwenden Sie den Beweis des Satzes von Carathéodory, um y als Konvexkombination von affin unabhängigen x_i zu schreiben.

Aufgabe 6.4 (Präsenzaufgabe)

a) Ist die folgende Funktion konvex?

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{S}^n_{\succ 0}$ der positiv definiten $n \times n$ Matrizen konvex ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathcal{S}^n_{\succ 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(A) = -\ln\det A$ konvex ist. (Wird in der Globalübung am 15. Juni besprochen.)

Abgabe: Bis Freitag, 8. Juni 2018, 8 Uhr.
Aufgaben 6.1, 6.2 und 6.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.