



Universität zu Köln  
Mathematisches Institut  
Prof. Dr. F. Vallentin  
Dr. M. Zimmermann  
J. Rolfes M.Sc.

## Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

### — Aufgabenblatt 8 —

#### Aufgabe 8.1

- a) Konstruieren Sie eine kompakte konvexe Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  und einen Punkt  $z \in C$  so, dass  $z$  ein Extrempunkt von  $C$  aber kein freiliegender Punkt von  $C$  ist. Dabei heißt  $z$  *freiliegender Punkt von  $C$* , wenn es eine Stützhyperebene  $H$  von  $C$  gibt, so dass  $H \cap C = \{z\}$  gilt.
- b) Konstruieren Sie eine kompakte konvexe Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  so, dass  $\text{ext } C$  nicht abgeschlossen ist.

**Aufgabe 8.2** Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge. Zeigen Sie:  $x \in \text{conv}(A)$  ist genau dann ein Extrempunkt von  $\text{conv}(A)$ , wenn  $x \in A$  und  $x \notin \text{conv}(A \setminus \{x\})$ .

**Aufgabe 8.3** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge, und sei  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

$$\max\{f(x) : x \in C\} = \max\{f(x) : x \in \text{ext } C\}.$$

**Aufgabe 8.4** (Präsenzaufgabe) Gegeben sei das Polyeder  $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \leq b\}$  definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Ecken von  $P$ .

**Abgabe:** Bis Freitag, 22. Juni 2018, 8 Uhr.

Aufgaben 8.1, 8.2 und 8.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.