



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 9 —

Aufgabe 9.1 Es sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht-leeres Polyeder. Zeigen Sie: P besitzt eine Ecke genau dann, wenn P keine Gerade

$$\ell = \{c + \lambda d : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad c, d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$$

enthält.

Aufgabe 9.2 Schreiben Sie das Polytop

$$\begin{aligned} P &= \text{conv} \{ \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3, 3e_1 \} \\ &= \text{conv} \{ e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_3, \\ &\quad e_1 + e_2 - e_3, -e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3, \\ &\quad e_1 - e_2 - e_3, -e_1 - e_2 - e_3, 3e_1 \} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

als Polyeder, wobei e_i der i -te Standardbasisvektor im \mathbb{R}^3 ist.

Aufgabe 9.3 Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Zeige:

- Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Entweder es existiert $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n e_i$ ist, oder es existiert ein $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $y^T A = 0$ und $y^T \mathbf{1} \neq 0$.
- Es gibt genau dann einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ und $x \geq 0$, wenn es keinen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^T A > 0$ gibt.

Aufgabe 9.4 (Präsenzaufgabe) Zeige die folgenden Aussagen:

- Für $\alpha > 0$ gilt $(\alpha A)^* = \frac{1}{\alpha} A^*$, wobei generell $\beta B = \{\beta b : b \in B\}$ für $\beta \in \mathbb{R}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.
- Falls $A \subseteq B$, dann folgt $A^* \supseteq B^*$.
- Es ist $(B_n^1)^* = B_n^\infty$, wobei $B_n^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$ und $B_n^\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \leq 1\}$ die Einheitskugeln bezüglich der 1-Norm bzw. der Maximumnorm sind.

Abgabe: Bis Freitag, 29. Juni 2018, 8 Uhr.

Aufgaben 9.1, 9.2 und 9.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.