Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Prof. Dr. F. Vallentin
Dr. M. Zimmermann
J. Rolfes M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2018

— Aufgabenblatt 10 —

Aufgabe 10.1 Geben Sie die duale Standardform der folgenden linearen Optimierungsprobleme an:

a) $\max\{3x_1 - 2x_2 \; : \; x_1 + x_2 \leq 3,\ 2x_1 - x_2 \leq 2,\ x \geq 0\}$;

b) $\max\{2x_1 - x_3 \; : \; 2x_1 - x_3 \leq 1,\ -x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0,\ 3x_2 \leq 1,\ 3x_1 - x_3 \geq 3,\ 3x_2 + x_3 \leq 4\}$;

c) $\max\{3x_1 - 2x_2 + \frac{1}{7}x_3 - x_4 \; : \; 3x_2 + 4x_3 \geq 1,\ -x_3 + x_4 \geq 1,\ 5x_1 + 2x_2 \geq 2,\ -2x_1 + 3x_4 = 3,\ x \geq 0\}$;

Aufgabe 10.2 Überprüfen Sie die folgenden Ungleichungssysteme der Form

$$Ax \leq b$$

darauf, ob das durch Sie definierte Polyeder leer oder nicht leer ist. Verwenden Sie dazu das Eliminationsverfahren von Fourier und Motzkin.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.3 Wir betrachten folgende Situation. Wir nehmen an, dass Alice (A) und Bob (B) ein Spiel der folgenden Form spielen: Beide Spieler wählen verdeckt einen der ihnen erlaubten Züge aus, dabei habe Alice m Züge zur Auswahl und Bob n Züge zur Auswahl. Zu jeder Wahl eines Zuges $i \in \{1, \ldots, m\}$ von Alice und jeder Wahl eines Zuges $j \in \{1, \ldots, n\}$ von Bob gibt es ein vorher festgelegtes Resultat: Alice bekommt a_{ij} Punkte, während Bob $-a_{ij}$ Punkte erhält.
Eine Strategie für einen Spieler sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den möglichen Zügen, d.h. für Alice ein Vektor $q_A \in \mathbb{R}^m$, so dass alle Einträge mindestens 0 und maximal 1 sind und so, dass die Summe über alle Einträge genau gleich 1 ist. Analog erhält man für Bob ein $q_B \in \mathbb{R}^n$.

(A) Alice ist pessimistisch: Sie hat Angst, dass Bob immer den optimalen Gegenzug findet, sie sucht daher eine Strategie q_A, bei welcher die minimale Auszahlung maximiert wird.

(B) Bob gönnt Alice keinen großen Gewinn, daher möchte er eine Strategie q_B finden, bei der der maximale Gewinn von Alice minimiert wird.

Ihre Aufgaben Sind:

a) Modellieren Sie Probleme (A) und (B) als lineare Optimierungsprobleme.

b) Zeigen Sie, dass sowohl eine Strategie im Sinne von (A), als auch eine Strategie im Sinne von (B) bei optimalem Gegenspiel zum selben Endergebnis führen.

c) Finden Sie konkret das Ergebnis des Spiels welches durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, unter der Annahme, dass beide Spieler eine optimale Strategie verwenden.

Aufgabe 10.4 (Präsenzaufgabe) Schreiben Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\max\{2x_1 + 1x_2 : 2x_1 - 2x_2 \geq 0, 3x_2 \geq 0, 12x_1 + 6x_2 \leq 4, 3x_1 + 3x_2 \leq 3\}$$

in primaler Standardform und lösen Sie es mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Fourier und Motzkin.

Abgabe: Bis Freitag, 06. Juli 2018, 8 Uhr.
Aufgaben 10.1, 10.2 und 10.3 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.