



Preview

Chapter VII - Packings on the sphere

$$\tau_2 = 6$$



$$\tau_3 \geq 12$$

Anno MDCXCIV



12

Isaac Newton



13

David Gregory

Richtige Antwort: 12

Erste mathematische Beweis davon:
Schütte, van der Waerden (1953)
mit Hilfe Elementargeometrie

Das Problem der dreizehn Kugeln.

Von

K. SCHÜTTE in Marburg/Lahn und B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Die Frage, wieviel Kugeln gleicher Größe an eine ebenso große Kugel angelegt werden können, ist offenbar gleichbedeutend mit der Frage, wieviel Punkte mit Mindestabstand 1 auf einer Kugel vom Radius 1 Platz haben (Fig. 1).

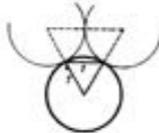


Fig. 1.

Zwölf Kugeln kann man sicher anlegen, nämlich an den Ecken eines Ikosaeders. (Die Kantenlänge desselben ist größer als der Radius der umschriebenen Kugel.) Es ist eine alte Streitfrage zwischen NEWTON und GREGORY, ob sich auch 13 Kugeln anlegen lassen. Im folgenden werden zwei Beweise dafür gegeben, daß dies nicht möglich ist. Es wird nämlich gezeigt, daß die Minimalfigur, auf der 13 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz haben, einen Radius $r > 1$ besitzt.

Die Beweise erfolgen unter Benutzung von Methoden, die zur Auffindung der Minimalfigur für N Punkte mit Mindestabstand 1 entwickelt wurden¹⁾, ²⁾. Hinweise auf Paragraphen und Sätze der unter ³⁾ zitierten Arbeit, deren Begriffsbildungen hier verwendet werden, sind in eckige Klammern gesetzt.

Der allgemeine Ansatz für diese Untersuchung (§§ 1, 2) stammt von beiden Verfassern. Den im § 3 dargestellten Beweis hat VAN DER WAERDEN gefunden, den anderen Beweis (§ 6) mit den dazu benötigten Hilfssätzen (§§ 4, 5) SCHÜTTE.

Die Priorität hat SCHÜTTE. Sein Beweis (§ 6) ist zwar komplizierter, aber es erscheint uns trotzdem erwünscht, ihn mitzuteilen, weil die Hilfssätze, auf denen er beruht, sich für weitere Untersuchungen als nützlich erweisen könnten, so z. B. für die genaue Bestimmung der Minimalfigur für 10, 11 oder 13 Punkte.

§ 1. Der irreduzible Graph.

Satz 1. Ein irreduzibler Graph auf einer Kugel vom Radius $r \leq 1$ enthält keine anderen Polygone als Dreiecke, Vierecke und Fünfecke.

Beweis: Bei $r \leq 1$ ist der zum Abstand 1 gehörende Bogen $\alpha \geq 60^\circ$ (Fig. 2). Folglich gilt für ein Polygon mit n Ecken

$$n \cdot 60^\circ \leq n \cdot \alpha < 360^\circ \quad [§ 6, Satz 6]$$

und somit $n < 6$.

Satz 2. Auf einer Minimalfigur für $N > 12$ hat im Innern eines Fünfecks mit den Seiten a kein Punkt ohne Störung Platz.

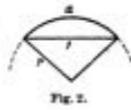


Fig. 2.

¹⁾ W. HARBICHT u. B. L. VAN DER WAERDEN: Lagerung von Punkten auf der Kugel. Math. Ann. 122, 223-234 (1951).

²⁾ K. SCHÜTTE u. B. L. VAN DER WAERDEN: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? Math. Ann. 125, 96-124 (1951).

Beweis: Hätte ein Punkt im Innern Platz, so könnte man diesen heranschieben, so daß ein Sechseck und ein Dreieck oder ein Fünfeck und ein Viereck entstehen würde. Der gesamte Flächeninhalt wäre (nach HARBICHT UND VAN DER WAERDEN) $\geq 5 \Delta$ (Fig. 3), wenn Δ der Inhalt des sphärischen Dreiecks mit den Seiten a ist. Das regelmäßige Fünfeck, das ja maximalen Inhalt besitzt, hat aber bei $N > 12$ einen Inhalt $< 5 \Delta$ (da die Kugel dann notwendig größer ist als für $N = 12$, wo dieser Inhalt gemäß der Ikosaederfigur gleich 5Δ ist).

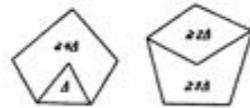


Fig. 3.

Satz 3. Als Minimalfigur für $N = 13$ auf einer Kugel vom Radius $r \leq 1$ kommt nur ein irreduzibler Graph aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken in Betracht.

Beweis: Auf der Minimalfigur tritt mindestens ein irreduzibler Graph auf (§ 5). Dieser enthält nach Satz 1 nur Dreiecke, Vierecke und Fünfecke. Nach Satz 2 (und §§ 6, Satz 7)) können ihm keine Punkte ohne Störung eingefügt werden. Er enthält also bereits alle 13 Punkte.

§ 2. Der Winkelüberschuß.

Nach HARBICHT UND VAN DER WAERDEN ist der Inhalt eines Polygons (mit den Seiten a) mindestens gleich dem Inhalt, der sich ergibt, wenn das Polygon vollständig in Dreiecke zerfällt. Der Inhalt eines n -eckigen Polygons ist also $\geq (n-2) \Delta$. Dann ist die Summe σ der Innenwinkel $\geq (n-2) \cdot 3\alpha$, wenn α den Winkel des sphärischen Dreiecks mit den Seiten a bezeichnet. Die (demnach nicht negative) Differenz

$$w = \sigma - (n-2) \cdot 3\alpha$$

bezeichnen wir als den „Winkelüberschuß“ des betreffenden Polygons.

Der „Gesamt-Winkelüberschuß“ W der Kugel ergibt sich, wenn über alle Polygone summiert wird.

$$W = \Sigma \sigma - \Sigma (n-2) \cdot 3\alpha.$$

Es ist $\Sigma \sigma = N \cdot 2\pi$ und $\Sigma (n-2) = \Sigma n - 2G = 2K - 2G$, wo K die Anzahl der Strecken und G die Anzahl der Polygone bedeutet. Nach dem EULERSCHEN POLYEDERSATZ ist $K - G = N - 2$, also

$$W = N \cdot 2\pi - 2(N-2) \cdot 3\alpha.$$

Inbesondere ist für $N = 13$

$$(1) \quad W = 26\pi - 66\alpha.$$

Das „Quadrat“ (regelmäßige sphärische Viereck) mit dem Winkel β hat den Winkelüberschuß $Q = 4\beta - 6\alpha$. Im Falle $r \leq 1$ ist $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$, (§ 7, (2)) und daher (nach §§ 11, (11))

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1} \leq -\frac{1}{3} \leq -\cos \alpha,$$

$$(2) \quad \alpha + \beta \geq \pi,$$

folglich

$$(3) \quad Q \geq 4\pi - 10\alpha.$$

Für den Winkelüberschuß eines Fünfecks aus einem Graphen gemäß Satz 3 läßt sich eine untere Schranke w_5 angeben. Da der Graph irreduzibel ist, sind alle inneren Winkel $< \pi$, also alle Polygone konvex. Das konvexe Fünfeck kleinsten Inhalts besitzt zwei (nicht benachbarte) gestreckte Winkel, d. h. es wird von einem gleichschenkligen Dreieck mit den Schenkeln 2α und der Grundlinie a gebildet (§ 13, Beweis von Satz 12). Bei $r = 1$ zerfällt das gleichschenklige Dreieck in ein gleichseitiges Dreieck und in ein regelmäßiges Viereck (Fig. 4), da in diesem Falle $\alpha + \beta = \pi$ ist. Die Summe der Innenwinkel ist dann $\sigma = 2\pi + \alpha + 2\beta$. In dem allgemeineren Falle $r \leq 1$ hat das gleichschenklige Dreieck einen Scheitelwinkel $\geq \alpha$ und einen Basiswinkel $\geq \beta$. Dann ist $\sigma \geq 2\pi + \alpha + 2\beta \geq 4\pi - \alpha$, und für die untere Schranke $w_5 = \sigma - 9\alpha$ des Fünfeck-Winkelüberschusses gilt

$$(4) \quad w_5 \geq 4\pi - 10\alpha.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt:

Satz 4. Falls die Minimalfigur für $N = 13$ einen Radius $r \leq 1$ besitzt, enthält der Minimalgraph höchstens ein Quadrat und höchstens ein Fünfeck, auch nicht ein Quadrat und ein Fünfeck zugleich.

Beweis: Bei $r \leq 1$ ist, wie aus $\cos \alpha \leq \frac{1}{3}$ hervorgeht, $\alpha > 70,5^\circ$. Dann gilt nach (1) und (3)

$$Q - \frac{1}{2}W \geq (4\pi - 10\alpha) - (13\pi - 33\alpha) = 23\alpha - 9\pi > 1621,5^\circ - 1620^\circ > 0,$$

also $2Q > W$ und nach (4) ebenso $2w_5 > W$. Durch zwei Quadrate, zwei Fünfecke oder ein Quadrat und ein Fünfeck wäre also bereits der Gesamt-Winkelüberschuß W der Kugel überschritten.

§ 3. Erster Beweis für $r > 1$ bei $N = 13$.

Angenommen, die Minimalfigur für $N = 13$ habe einen Radius $r \leq 1$. Nach Satz 3 wird dann die Minimalfigur von einem irreduziblen Graphen aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken gebildet. Es soll gezeigt werden, daß ein solcher Graph nicht existiert.

I. Fall. Der Graph enthält nur Dreiecke und Vierecke.

Wir bezeichnen alle Dreieckswinkel α und diejenigen Viereckswinkel, die kleiner als der Quadratwinkel β sind, als „kleine Winkel“. Alle Viereckswinkel, die größer als β sind, nennen wir „große“. Von einem Quadrat sollen ganz willkürlich zwei Winkel zu den kleinen, die anderen beiden zu den großen Winkeln gerechnet werden. Dann enthält jedes Viereck zwei kleine und zwei große Winkel. Für jeden kleinen Winkel α gilt

$$(5) \quad \alpha \leq \kappa \leq \beta$$

und für jeden großen Winkel γ

$$(6) \quad \beta \leq \gamma < 2\alpha.$$

Der gesamte Winkelüberschuß aller Vierecke um einen Punkt P herum kann kleiner gemacht werden, indem immer ein Winkel verkleinert und ein anderer vergrößert wird, so lange bis alle Winkel bis auf einen den nach (5)



Fig. 4.

und (6) kleinst- oder wir so vor: Solange man sie vergrößern wird, bis der Winkel gleich α (Fall B).

Im Fall A ändern ihre Vierecke verkleinert werden bis auf einen gleich α und der letzte gleich α und zwei Quadrate geworden sind bis auf einen übrigen bis auf einen Fall B, ist aber nicht nur möglich für $r = 1$ zwei Winkel $= \beta$ um

Nun sei w_P der Winkelüberschuß eines kleinen Vierecks mit Winkel $2\pi - \alpha$

Summiert man (1) über alle Vierecke, so erhält man $13w_P$.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Das ist aber ein Ergebnis. Für $r = 1$ ist $w_P = 2\pi - \alpha$. Für $r < 1$ ist es noch größer.

Seitdem viele Alternativbeweise: Leech (1956)

Anstreicher (2004), Musin (2006), Maehara (2007),

Bachoc, V. (2008)

Alle sind ziemlich rechenintensiv.

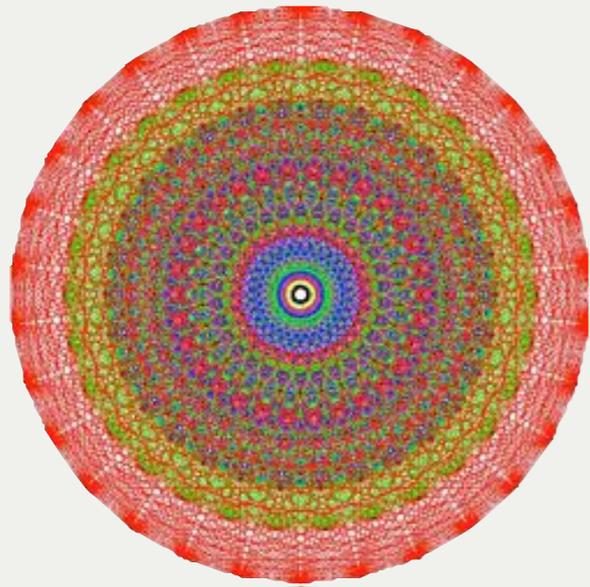
145.5146532 u^8v^8 + 988.2590039 u^8v^7 + 363.0801883 u^8v^6 - 672.8504875 u^8v^5 - 225.3291719 u^8v^4 +
 191.5409281 u^8v^3 + 59.48900200 u^8v^2 - 19.01121967 u^8v - 6.236063758 u^8 + 988.2590039 u^7v^8 +
 2884.321650 u^7v^7t + 2098.660249 u^7v^7 + 3568.090777 u^7v^6t + 18.16433328 u^7v^6 + 344.9966795 u^7v^5t -
 1553.436106 u^7v^5 - 1392.615104 u^7v^4t - 147.6093630 u^7v^4 - 437.8480785 u^7v^3t + 446.8628584 u^7v^3 +
 123.8174512 u^7v^2t + 71.67183278 u^7v^2 + 62.08524794 u^7vt - 49.22376389 u^7v - 6.539547051 u^7t -
 6.216856357 u^7 + 363.0801883 u^6v^8 + 3568.090777 u^6v^7t + 18.16433328 u^6v^7 - 1165.053624 $u^6v^6t^2$ +
 5312.362070 u^6v^6t - 1024.256466 u^6v^6 - 71.15855319 $u^6v^5t^2$ + 196.7871602 u^6v^5t - 471.6846248 u^6v^5 +
 110.7356966 $u^6v^4t^2$ - 2163.927390 u^6v^4t + 464.1969368 u^6v^4 - 78.18545046 $u^6v^3t^2$ -
 505.3867129 u^6v^3t + 203.1645374 u^6v^3 + 41.35985267 $u^6v^2t^2$ + 199.8129603 u^6v^2t - 54.08669500 u^6v^2 -
 - 17.33067199 u^6v^2 + 77.24220247 u^6vt - 21.52580028 u^6v + 16.53555569 u^6t^2 - 10.78477271 u^6t +
 0.8926140522 u^6 - 672.8504875 u^5v^8 + 344.9966795 u^5v^7t - 1553.436106 u^5v^7 - 71.15855319 $u^5v^6t^2$ +
 196.7871602 u^5v^6t - 471.6846248 u^5v^6 + 1168.212790 $u^5v^5t^3$ + 134.9381447 $u^5v^5t^2$ -
 599.4393672 u^5v^5t + 752.0835370 u^5v^5 + 386.8314957 $u^5v^4t^3$ + 37.58791494 $u^5v^4t^2$ -
 219.0874465 u^5v^4t + 274.0310180 u^5v^4 - 377.6693697 $u^5v^3t^3$ - 116.2455138 $u^5v^3t^2$ +
 135.0094523 u^5v^3t - 132.6882963 u^5v^3 - 29.72556641 $u^5v^2t^3$ - 35.53845637 $u^5v^2t^2$ +
 37.13287924 u^5v^2t - 50.62106262 u^5v^2 - 55.38456003 u^5vt^3 - 6.687980644 u^5vt^2 + 13.24127784 u^5vt +
 16.77621554 u^5v + 47.57727922 u^5t^3 + 37.98428531 u^5t^2 - 14.54446445 u^5t - 3.453914175 u^5 -
 225.3291719 u^4v^8 + 192.6152064 u^4v^7t - 147.6093630 u^4v^7 + 110.7356966 $u^4v^6t^2$ + 263.927390 u^4v^6t +
 + 464.1969368 u^4v^6 + 386.8314957 $u^4v^5t^3$ + 37.58791494 $u^4v^5t^2$ - 219.0874465 u^4v^5t +
 274.0310180 u^4v^5 - 73.36820000 $u^4v^4t^4$ + 392.6271541 $u^4v^4t^3$ + 222.2882726 $u^4v^4t^2$ +
 735.4659250 u^4v^4t - 207.3205267 u^4v^4 + 83.02988588 $u^4v^3t^4$ - 118.0842510 $u^4v^3t^3$ -
 77.09075609 $u^4v^3t^2$ + 244.0885057 u^4v^3t - 88.19709904 u^4v^3 - 37.62483034 $u^4v^2t^4$ -
 113.7068820 $u^4v^2t^3$ - 8.326854722 $u^4v^2t^2$ - 45.23470569 u^4v^2t + 12.09797900 u^4v^2 -
 77.65166209 u^4vt^4 - 55.08896234 u^4vt^3 + 31.85022557 u^4vt^2 - 17.02325455 u^4vt + 10.36532594 u^4v +
 28.47777799 u^4t^4 + 46.28598839 u^4t^3 - 2.917811290 u^4t^2 - 7.358099446 u^4t - 1.944166441 u^4 +
 191.5409281 u^3v^8 + 192.6152064 u^3v^7t - 147.6093630 u^3v^7 + 110.7356966 $u^3v^6t^2$ + 263.927390 u^3v^6t +
 + 464.1969368 u^3v^6 + 386.8314957 $u^3v^5t^3$ + 37.58791494 $u^3v^5t^2$ - 219.0874465 u^3v^5t +
 274.0310180 u^3v^5 - 73.36820000 $u^3v^4t^4$ + 392.6271541 $u^3v^4t^3$ + 222.2882726 $u^3v^4t^2$ +
 735.4659250 u^3v^4t - 207.3205267 u^3v^4 + 83.02988588 $u^3v^3t^4$ - 118.0842510 $u^3v^3t^3$ -
 77.09075609 $u^3v^3t^2$ + 244.0885057 u^3v^3t - 88.19709904 u^3v^3 - 37.62483034 $u^3v^2t^4$ -
 113.7068820 $u^3v^2t^3$ - 8.326854722 $u^3v^2t^2$ - 45.23470569 u^3v^2t + 12.09797900 u^3v^2 -
 77.65166209 u^3vt^4 - 55.08896234 u^3vt^3 + 31.85022557 u^3vt^2 - 17.02325455 u^3vt + 10.36532594 u^3v +
 28.47777799 u^3t^4 + 46.28598839 u^3t^3 - 2.917811290 u^3t^2 - 7.358099446 u^3t - 1.944166441 u^3 +
 191.5409281 u^2v^8 + 192.6152064 u^2v^7t - 147.6093630 u^2v^7 + 110.7356966 $u^2v^6t^2$ + 263.927390 u^2v^6t +
 + 464.1969368 u^2v^6 + 386.8314957 $u^2v^5t^3$ + 37.58791494 $u^2v^5t^2$ - 219.0874465 u^2v^5t +
 274.0310180 u^2v^5 - 73.36820000 $u^2v^4t^4$ + 392.6271541 $u^2v^4t^3$ + 222.2882726 $u^2v^4t^2$ +
 735.4659250 u^2v^4t - 207.3205267 u^2v^4 + 83.02988588 $u^2v^3t^4$ - 118.0842510 $u^2v^3t^3$ -
 77.09075609 $u^2v^3t^2$ + 244.0885057 u^2v^3t - 88.19709904 u^2v^3 - 37.62483034 $u^2v^2t^4$ -
 113.7068820 $u^2v^2t^3$ - 8.326854722 $u^2v^2t^2$ - 45.23470569 u^2v^2t + 12.09797900 u^2v^2 -
 77.65166209 u^2vt^4 - 55.08896234 u^2vt^3 + 31.85022557 u^2vt^2 - 17.02325455 u^2vt + 10.36532594 u^2v +
 28.47777799 u^2t^4 + 46.28598839 u^2t^3 - 2.917811290 u^2t^2 - 7.358099446 u^2t - 1.944166441 u^2 +
 191.5409281 u^1v^8 + 192.6152064 u^1v^7t - 147.6093630 u^1v^7 + 110.7356966 $u^1v^6t^2$ + 263.927390 u^1v^6t +
 + 464.1969368 u^1v^6 + 386.8314957 $u^1v^5t^3$ + 37.58791494 $u^1v^5t^2$ - 219.0874465 u^1v^5t +
 274.0310180 u^1v^5 - 73.36820000 $u^1v^4t^4$ + 392.6271541 $u^1v^4t^3$ + 222.2882726 $u^1v^4t^2$ +
 735.4659250 u^1v^4t - 207.3205267 u^1v^4 + 83.02988588 $u^1v^3t^4$ - 118.0842510 $u^1v^3t^3$ -
 77.09075609 $u^1v^3t^2$ + 244.0885057 u^1v^3t - 88.19709904 u^1v^3 - 37.62483034 $u^1v^2t^4$ -
 113.7068820 $u^1v^2t^3$ - 8.326854722 $u^1v^2t^2$ - 45.23470569 u^1v^2t + 12.09797900 u^1v^2 -
 77.65166209 u^1vt^4 - 55.08896234 u^1vt^3 + 31.85022557 u^1vt^2 - 17.02325455 u^1vt + 10.36532594 u^1v +
 28.47777799 u^1t^4 + 46.28598839 u^1t^3 - 2.917811290 u^1t^2 - 7.358099446 u^1t - 1.944166441 u^1 +
 191.5409281 v^8 + 192.6152064 v^7t - 147.6093630 v^7 + 110.7356966 v^6t^2 + 263.927390 v^6t +
 + 464.1969368 v^6 + 386.8314957 v^5t^3 + 37.58791494 v^5t^2 - 219.0874465 v^5t +
 274.0310180 v^5 - 73.36820000 v^4t^4 + 392.6271541 v^4t^3 + 222.2882726 v^4t^2 +
 735.4659250 v^4t - 207.3205267 v^4 + 83.02988588 v^3t^4 - 118.0842510 v^3t^3 -
 77.09075609 v^3t^2 + 244.0885057 v^3t - 88.19709904 v^3 - 37.62483034 v^2t^4 -
 113.7068820 v^2t^3 - 8.326854722 v^2t^2 - 45.23470569 v^2t + 12.09797900 v^2 -
 77.65166209 vt^4 - 55.08896234 vt^3 + 31.85022557 vt^2 - 17.02325455 vt + 10.36532594 v +
 28.47777799 t^4 + 46.28598839 t^3 - 2.917811290 t^2 - 7.358099446 t - 1.944166441

+ 0.7941054727 uv^3t + 5.569355446 uv^3 + 0.3706844433 uv^2t^6 - 1.226131739 uv^2t^5 +
 + 4.448344730 uv^2t^3 - 12.516511111 uv^2t^2 + 2.559716007 uv^2t + 0.2868981952 uv^2 +
 - 3.865608217 uv^2 - 18.70371050 uv^2t^5 + 14.88704132 uv^2t^4 + 23.94378706 uv^2t^3 +
 - 4.333409705 uv^2t - 1.954761337 uv - 0.1528426696 ut^7 + 0.07806634840 ut^6 -
 2.244106275 ut^4 + 1.817221500 ut^3 + 2.535123200 ut^2 - 0.5798954908 ut - 0.3852239752 u -
 3.539547051 v^7t - 6.216856357 v^7 + 16.53555569 v^6t^2 - 10.78477271 v^6t + 0.8926140522 v^6 -
 3.3798428531 v^5t^2 - 14.54446445 v^5t - 3.453914175 v^5 + 28.47777799 v^4t^4 +
 - 2.917811290 v^4t^2 - 7.358099446 v^4t - 1.944166441 v^4 + 7.486743724 v^3t^5 +
 - 17.88091824 v^3t^3 - 20.64369889 v^3t^2 + 5.781887281 v^3t + 2.801486009 v^3 -
 - 2.282422116 v^2t^5 - 2.376206451 v^2t^4 - 5.756516944 v^2t^3 + 2.285069305 v^2t^2 +
 - 0.1807740107 v^2 - 0.1528426696 vt^7 + 0.07806634840 vt^6 - 1.066251935 vt^5 -
 1.817221500 vt^3 + 2.535123200 vt^2 - 0.5798954908 vt - 0.3852239752 v -
 + 0.6067608795 t^6 + 2.504492501 t^5 + 6.632189667 t^4 + 3.925884209 t^3 - 1.191716995 t^2 -
 168270210

BV (2008): Das folgende Polynom ist ein Zertifikat für $\tau_3 = 12$

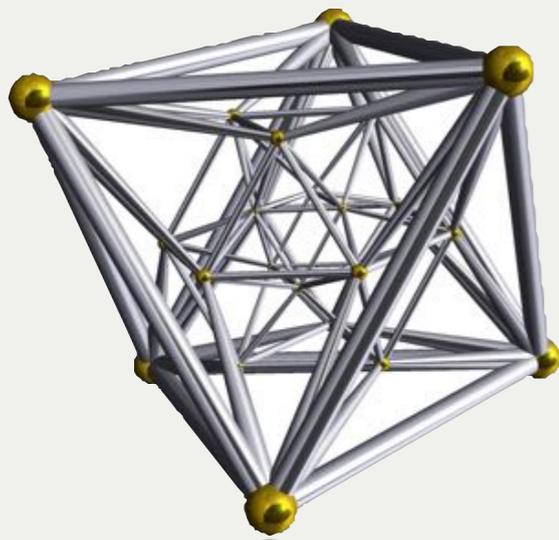
- ★ Gefunden mit semidefiniter Programmierung
- ★ Übrige Rechnungen sind relativ einfach

Bekannte Kusszahlen



$$\tau_8 = 240$$
$$\tau_{24} = 196560$$

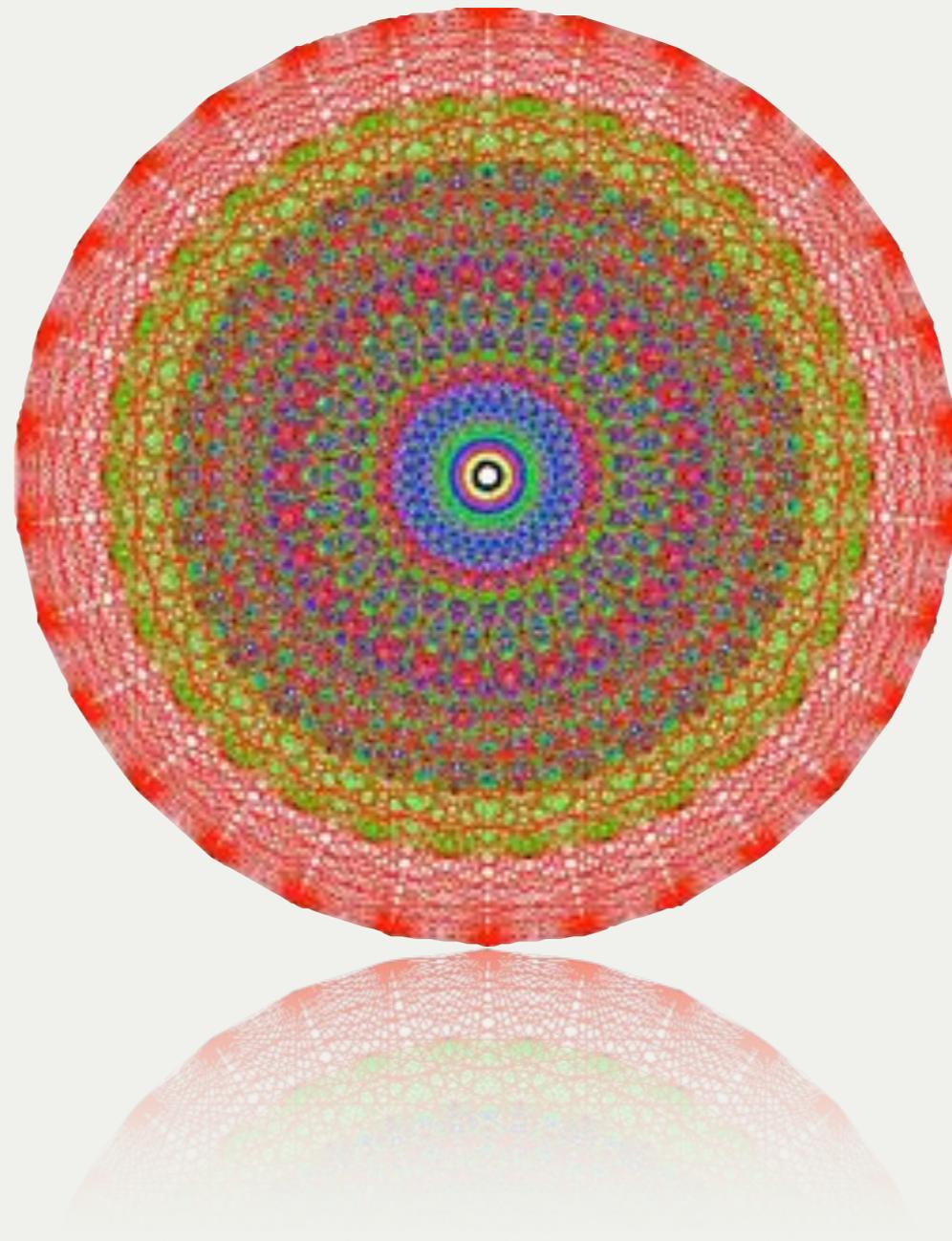
Odlyzko, Sloane und Levenshtein (1979)
mit linearer Programmierung
(relativ leicht, sehr elegant)



$$\tau_4 = 24$$

Musin (2008)
mit linearer Programmierung und Tricks
(nicht so leicht)

The kissing number in 8 dimensions

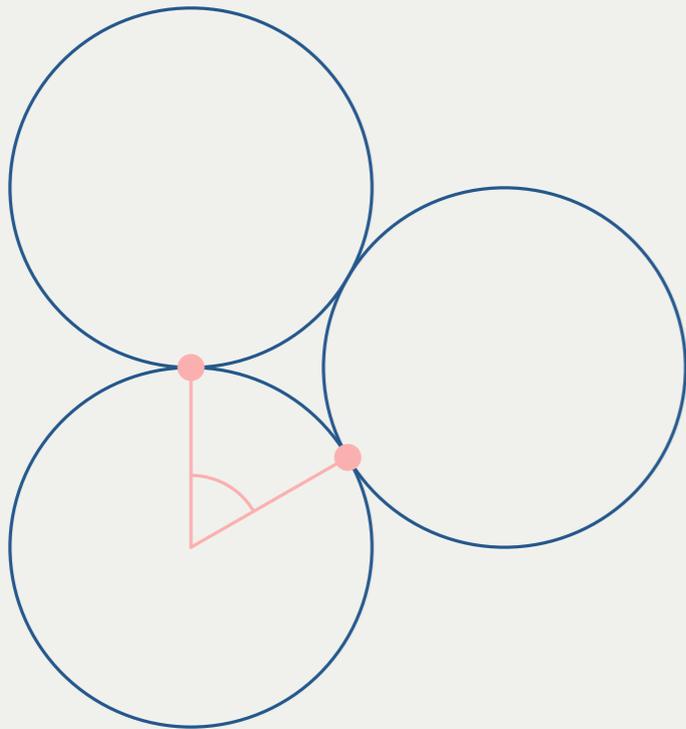


Packungsgraph

$$G(n, (t, 1)) = (V, E)$$

$$V = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top x = 1\}$$

$$\{x, y\} \in E \iff x^\top y \in (t, 1)$$



unabhängige Mengen in $G(n, (t, 1))$
= mögliche Berührungspunkte

$$\text{Also: } \tau_n = \alpha(G(n, (t, 1)))$$

with $t = 1/2$

Berechnen von α ist i.A. schwierig

Die ϑ -Funktion . . .

- ★ wurde 1979 von Lovász in der berühmten Arbeit
“On the Shannon capacity of a graph” eingeführt

Strategie: Verallgemeinere ϑ auf unendliche Graphen

- ★ kann durch eine Hierarchie von größer werdenden SDPs,
die gegen α konvergieren, verbessert werden.
(Lovász-Schrijver 1991, Lasserre 2001)

Das Original: für $|V| < \infty$

$$\begin{aligned} \vartheta'(G) = \min \quad & t \\ & Y \in \mathcal{S}_{\succeq 0}^V \\ & Y_{x,x} = t - 1 \text{ für } x \in V \\ & Y_{x,y} \leq -1 \text{ für } \{x, y\} \notin E \end{aligned}$$

Verallgemeinerung: für $|V| = \infty$

$$\begin{aligned} \vartheta'(G) = \inf \quad & t \\ & Y \in \mathcal{C}(V \times V)_{\succeq 0} \\ & Y(x, x) = t - 1 \text{ für } x \in V \\ & Y(x, y) \leq -1 \text{ für } \{x, y\} \notin E \end{aligned}$$

positiv semidefinite, stetige Hilbert-Schmidt Kerne

$$\alpha(G) \leq \vartheta'(G) = \inf \quad t$$

$$Y \in \mathcal{C}(V \times V)_{\geq 0}$$

$$Y(x, x) = t - 1 \text{ für } x \in V$$

$$Y(x, y) \leq -1 \text{ für } \{x, y\} \notin E$$

Sei $C \subseteq V$ unabhängig

und Y, t eine zulässige Lösung von $\vartheta'(G)$

$$0 \leq \sum_{x \in C} \sum_{y \in C} Y(x, y)$$

$$= \underbrace{\sum_{x \in C} Y(x, x)}_{=|C|(t-1)} + \underbrace{\sum_{x \neq y} Y(x, y)}_{\leq (-1)(|C|^2 - |C|)}$$

$$\leq |C|(t-1) - (|C|^2 - |C|) \quad \implies |C| \leq t$$

Frage: Wie berechnet man $\vartheta'(G)$?

Antwort: Verwende Symmetrie von G !

$\text{Aut}(G(n, (t, 1)))$: orthogonale Gruppe $O(n)$

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = I_n\}$$

Falls $Y \in \mathcal{C}(S^{n-1} \times S^{n-1})_{\succeq 0}$ zulässig, dann auch \bar{Y} :

$$\bar{Y}(x, y) = \int_{A \in O(n)} Y(Ax, Ay) d\mu(A).$$

Also: Können uns auf $O(n)$ -invariante Kerne beschränken.

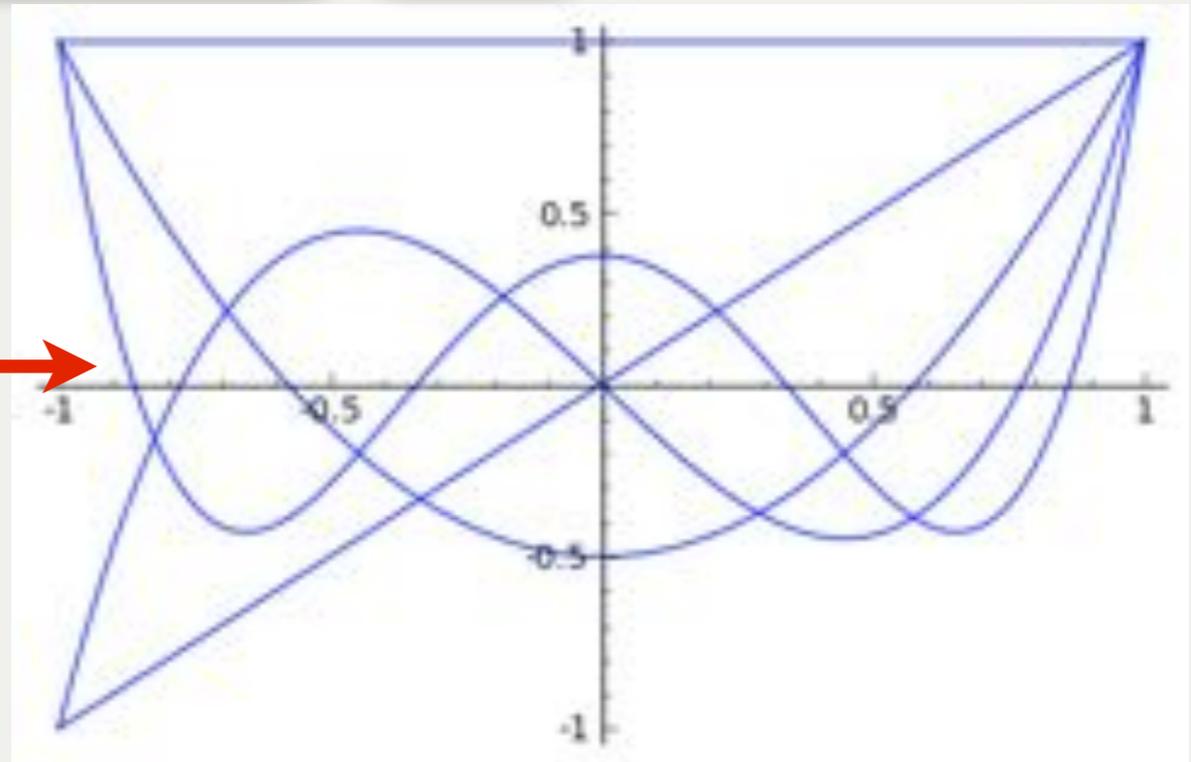
$$\forall A \in O(n) \forall x, y \in S^{n-1} : Y(Ax, Ay) = Y(x, y)$$

Theorem von Schoenberg (1942)

$Y \in \mathcal{C}(S^{n-1} \times S^{n-1})$ ist $O(n)$ -invariant g.d.w.

$$Y(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k^{((n-3)/2, (n-3)/2)}(x^T y) \quad f_k \geq 0$$

Jacobi Polynome



ϑ' als semi-infinites lineares Programm

$$\begin{aligned}\vartheta'(G(n, (t, 1))) = \inf \quad & t \\ & f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, \dots \\ & \sum_{k=0}^{\infty} f_k P^{((n-3)/2, (n-3)/2)}(1) = t - 1 \\ & \sum_{k=0}^{\infty} f_k P^{((n-3)/2, (n-3)/2)}(u) \leq -1 \text{ für } u \in [-1, t]\end{aligned}$$

$$\vartheta'(G(8, (1/2, 1))) = 240 = \tau_8$$

$$\vartheta'(G(24, (1/2, 1))) = 196560 = \tau_{24}$$

ABER

$$\vartheta'(G(3, (1/2, 1))) > 13$$

$$\vartheta'(G(4, (1/2, 1))) > 24$$

Normalisierte Jacobi Polynome mit (α, α) , $\alpha = (n - 3)/2$

$$P_0^n(t) = P_0^{(\alpha, \alpha)}(t) = 1,$$

$$P_1^n(t) = P_1^{(\alpha, \alpha)}(t) = t,$$

$$P_2^n(t) = P_2^{(\alpha, \alpha)}(t) = \frac{n}{n-1}t^2 - \frac{1}{n-1}.$$

```
sage: x = PolynomialRing(QQ, 'x').gen()
sage: n = 4
sage: a = (n-3)/2
sage: for k in range(0,5):
sage:     print(jacobi_P(k,a,a,x)/jacobi_P(k,a,a,1))
```

1

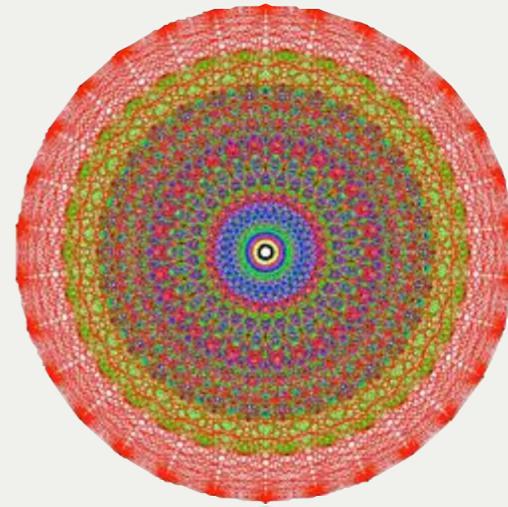
x

$4/3*x^2 - 1/3$

$2*x^3 - x$

$16/5*x^4 - 12/5*x^2 + 1/5$

$$\tau_8 \geq 240$$



240 Punkte auf S^7 :

alle möglichen Permutationen und Vorzeichenwechsel von

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T \binom{8}{2} 2^2 = 112$$

alle geraden Vorzeichenwechsel von

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}} \right)^T 2^7 = 128$$

auftretende Skalarprodukte: $-1, -1/2, 0, 1/2, 1$

$$\tau_8 \leq 240$$

“Glücklicher” Ansatz

$$F(t) = -1 + \beta(t+1) \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Eigenschaften von F :

$$F(-1) = F(-1/2) = F(0) = F(1/2) = -1$$

$$F(u) \leq -1 \text{ für } u \in [-1, 1/2]$$

$$\text{Mit } \beta = \frac{320}{3}: F(1) = t - 1 = 240 - 1 = 239$$

$$\text{Überprüfe: } F(u) = \sum_{k=0}^6 f_k P_k^8(u) \text{ mit } f_k \geq 0$$

$$\implies Y(x, y) = F(x^\top y) \text{ zulässig für } \vartheta'$$

$$\implies \tau_8 \leq \vartheta'(G(8, (1/2, 1))) \leq 240$$