



Zur Erweiterungskomplexität von Charakterpolytopen

Stefan Krupp

06. 04. 2017

Masterarbeit im Studiengang Wirtschaftsmathematik

Betreuer: Prof. Dr. Frank Vallentin

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Universität zu Köln

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	2
2. Fourieranalyse auf endlichen Gruppen	3
3. Charakterpolytope und semidefinite Lifts	5
4. Lineare Lifts	14
5. Betrachtung der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	30
5.1. Ein semidefiniter Lift für $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$	36
5.2. Ein semidefiniter Lift für $\mathcal{S} = \{-d, \dots, d\}$	40
5.3. Lineare Lifts für $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	47
6. Betrachtung der Diedergruppe D_{2n}	49
6.1. Der Fall n ungerade	50
6.2. Der Fall n gerade	60
7. Zusammenfassung der Resultate	68
Literatur	70
Eidesstattliche Erklärung	71

1. EINLEITUNG

Das Finden gewisser Optimalwerte ist eine Problemstellung, die in den verschiedensten Fachgebieten relevant ist. Beispielsweise stelle man sich vor, dass ein Unternehmen bestrebt ist einen Produktions- oder Personalplan zu erstellen, der einerseits den Gewinn maximiert (beziehungsweise die Kosten minimiert), andererseits jedoch Restriktionen unterworfen ist wie zum Beispiel der Kapazität von Maschinen und Mitarbeitern oder Rohstoffengpässen. Solche Probleme sind effizient lösbar, wenn die Nebenbedingungen sowie die Zielfunktion linear sind. Eine Verallgemeinerung solcher linearen Optimierungsprobleme sind semidefinite Optimierungsprobleme, bei denen nach einer optimalen Matrix gesucht wird, die positiv semidefinit ist. Semidefinite Optimierung wird beispielsweise dazu verwendet, Annäherungen an Lösungen nichtlinearer Optimierungsprobleme zu ermitteln. Letztere sind nur schwer lösbar und haben ebenfalls mannigfaltige Anwendungen.

Da die zulässige Lösungsmenge (beschränkter) linearer Programme Polytope bilden, ist auch deren Erforschung relevant. Stellt man beispielsweise fest, dass das Polytop P , über dem ein Optimierungsproblem zu lösen ist, viele Facetten hat, so werden auch viele Ungleichungen benötigt, um es zu beschreiben. Dies wiederum führt dazu, dass eine entsprechende Optimierung aufwendig ist. Kennt man dagegen ein zweites Polytop Q in einer gegebenenfalls höheren Dimension mit einer geringen Anzahl an Facetten, sodass sich Q auf P projizieren lässt, so lässt sich die Optimierung beschleunigen. Man optimiert lediglich über das Polytop Q mit wenig Facetten und projiziert die Optimallösung anschließend auf P . Das Finden eines bestmöglichen Q motiviert die Definition der linearen Erweiterungskomplexität. Handelt es sich bei Q dagegen um die zulässige Lösungsmenge eines semidefiniten Programms, so spricht man von semidefiniter Erweiterungskomplexität.

Nachdem in Kapitel 2 einige Grundlagen zur Fourieranalyse eingeführt werden, wird Kapitel 3 näher auf die semidefinite Erweiterungskomplexität von Charakterpolytopen eingehen. Wie der Name bereits suggeriert, handelt es sich bei einem Charakterpolytop um ein Polytop, dessen Ecken von den Charakteren einer Gruppe abhängen. Genauer geht es in Kapitel 3 darum eine Theorie zu entwickeln, um obere Schranken an die semidefinite Erweiterungskomplexität zu finden. Dieses Kapitel ist eine Verallgemeinerung der Resultate aus [4], in dem nur abelsche Gruppen betrachtet werden. Kapitel 4 wird dagegen ein Vorgehen zum Finden unterer Schranken an die lineare Erweiterungskomplexität thematisieren. Hierbei stehen nachbarschaftliche Polytope im Vordergrund. Die Resultate hierzu stammen aus [5]. Anschließend werden die Resultate aus Kapitel 3 und 4 in Kapitel 5 für die Gruppe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und in Kapitel 6 für die Gruppe D_{2n} angewandt.

2. FOURIERANALYSE AUF ENDLICHEN GRUPPEN

Wie bereits zuvor angesprochen hängen Charakterpolytope von den Charakteren einer (endlichen) Gruppe ab. Daher ist ein Grundverständnis über Fourieranalyse auf solchen Gruppen notwendig. Dieses Kapitel ist daher eine kurze Einführung in diese Thematik. Weiterreichende Literatur hierzu sind unter Anderem [2] und [10].

Definition 2.1. (unitäre Darstellung)

Sei G eine endliche Gruppe.

- 1) Eine unitäre Darstellung (kurz: Darstellung) von G ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi: G \rightarrow U(d_\pi)$, wobei $U(d_\pi)$ die Menge der unitären $(d_\pi \times d_\pi)$ -Matrizen ist. d_π heißt Grad von π .
- 2) Sei M ein Unterraum von \mathbb{C}^{d_π} . Eine Darstellung π heißt M -invariant, falls $\pi(x)m \in M$ für alle $x \in G, m \in M$ gilt.
- 3) Eine Darstellung π heißt irreduzibel, falls $\{0\}$ und \mathbb{C}^{d_π} die einzigen π -invarianten Unterräume sind.
- 4) Zwei Darstellungen π, π' heißen äquivalent, falls es eine Matrix $T \in U(d_\pi)$ gibt, sodass $T\pi(x) = \pi'(x)T$ für alle $x \in G$ gilt.

Hat G genau k Äquivalenzklassen, dann gibt es k irreduzible, paarweise nicht äquivalente Darstellungen, aber nicht mehr. Mit \hat{G} wird eine Menge von solchen k irreduziblen, paarweise nicht äquivalenten Darstellungen bezeichnet. Aus Definition 2.1. wird schnell klar, dass jedes $\pi \in \hat{G}$ durch $\bar{\pi}$ ersetzt werden kann.

Zu bemerken ist außerdem, dass in abelschen Gruppen jedes Gruppenelement eine eigene Konjugationsklasse bildet.

Definition 2.2. (Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^d und $\mathbb{C}^{d \times d}$)

Das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathbb{C}^d ist für alle $x, y \in \mathbb{C}^d$ gegeben durch:

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \bar{y}^T x = \sum_{i=1}^d x_i \bar{y}_i.$$

Auf $\mathbb{C}^{d \times d}$ sei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für $A, B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ gegeben durch:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^* A) = \sum_{i,j=1}^d A_{i,j} \overline{B_{i,j}}.$$

Die Matrixelemente von Darstellungen aus \hat{G} lassen sich als Funktionen von G nach \mathbb{C} auffassen. Alternativ kann man $\pi_{i,j}$ auch als Vektor in \mathbb{C}^G betrachten, indem man $\pi_{i,j} = (\pi(x)_{i,j})_{x \in G}$ setzt. Diese Vektoren bilden nach dem Lemma von Schur eine Orthogonalbasis von \mathbb{C}^G bezüglich des Standardskalarprodukts:

$$\begin{aligned} \langle \pi_{i,j}, \pi'_{k,l} \rangle &= 0, & \forall i, j \in [d_\pi], k, l \in [d_{\pi'}], \pi \neq \pi', \\ \langle \pi_{i,j}, \pi_{k,l} \rangle &= \frac{|G|}{d_\pi} \delta_{i,k} \delta_{j,l}, & \forall i, j, k, l \in [d_\pi]. \end{aligned}$$

Daraus folgt außerdem, dass die Anzahl der Matrixelemente in \hat{G} mit der Kardinalität von G übereinstimmt, also $\sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2 = |G|$.

Wie bereits festgestellt haben abelsche Gruppen $|G|$ irreduzible, nicht äquivalente Darstellungen. Daher muss in diesem Fall stets $d_\pi = 1$ gelten.

Definition 2.3. (Fouriertransformation)

Sei G eine endliche Gruppe und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Die (diskrete) Fouriertransformierte von f ist für $\pi \in \hat{G}$ gegeben durch:

$$\hat{f}(\pi) = \sum_{x \in G} f(x) \pi(x) \in \mathbb{C}^{d_\pi \times d_\pi}.$$

Nach der Fourier-Inversion kann man f durch seine Fouriertransformierte ausdrücken:

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \hat{f}(\pi), \pi(x) \rangle.$$

Ferner besagt die Parsevalsche Gleichung, dass das Skalarprodukt zweier Funktionen $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch das Skalarprodukt ihrer Fouriertransformierten beschrieben werden kann:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \hat{f}(\pi), \hat{g}(\pi) \rangle.$$

Definition 2.4. (Faltung & Involution)

Sei G eine endliche Gruppe und $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen.

- 1) Die Involution $f^*: G \rightarrow \mathbb{C}$ von f ist definiert als

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}.$$

- 2) Die Faltung $f * g: G \rightarrow \mathbb{C}$ von f und g ist definiert als

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x).$$

Für die Fouriertransformation von Faltung und Involution sind weiterhin die folgenden Gleichungen bekannt:

$$\widehat{f^*}(\pi) = \hat{f}(\pi)^* = \overline{\hat{f}(\pi)}^T, \quad \widehat{f * g}(\pi) = \hat{f}(\pi) \hat{g}(\pi).$$

Definition 2.5. (Charakter)

Sei π eine Darstellung einer endlichen Gruppe G . Die Funktion $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\chi(x) = \text{Tr}(\pi(x)) = \sum_{i=1}^{d_\pi} \pi(x)_{i,i}$$

heißt (Gruppen-)Charakter bezüglich π .

Manchmal wird die Menge der Charaktere bezüglich der Darstellungen $\pi \in \hat{G}$ ebenfalls mit \hat{G} bezeichnet. Welche Definition von \hat{G} gemeint ist wird aus dem Kontext offensichtlich sein. Ferner wird χ_π den Charakter bezüglich der Darstellung π bezeichnen.

Charaktere sind sogenannte Klassenfunktionen. Das heißt, sie sind auf Konjugationsklassen konstant. Des Weiteren halten auch die Charaktere in \hat{G} eine Orthogonalitätsbeziehung ein:

$$\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle = \begin{cases} |G|, & \text{falls } \pi = \pi'. \\ 0, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Da es genau so viele Charaktere wie Konjugationsklassen gibt, ist \hat{G} als Menge von Charakteren eine Basis für den Unterraum, der aus allen Klassenfunktionen besteht.

3. CHARAKTERPOLYTOPE UND SEMIDEFINITE LIFTS

Mit den Grundlagen die in Kapitel 2 erläutert wurden kann man sich nun dem Ziel dieser Arbeit zuwenden: Der Untersuchung von Charakterpolytopen hinsichtlich deren Erweiterungskomplexitäten. In [4] wird dieselbe Thematik speziell für Charakterpolytope bezüglich abelscher Gruppen betrachtet, weshalb dieses Kapitel daran angelehnt ist.

Definition 3.1. (Semidefiniter Lift)

Sei $P \subset \mathbb{C}^d$ ein Polytop, \mathbb{H}^k die Menge der hermiteschen, komplexen $(k \times k)$ -Matrizen und \mathbb{H}_+^k der Kegel der positiv semidefiniten, komplexen $(k \times k)$ -Matrizen. P hat einen positiv semidefiniten Lift (kurz: PSD-Lift) der Größe k , wenn es eine affine Abbildung $\psi: \mathbb{H}^k \rightarrow \mathbb{C}^d$ und einen affinen Unterraum L von \mathbb{H}^k gibt, sodass:

$$P = \psi(\mathbb{H}_+^k \cap L).$$

Das kleinste k sodass P einen PSD-Lift der Größe k hat, heißt semidefinite Erweiterungskomplexität von P , bezeichnet mit $\text{xc}_{\text{PSD}}(P)$.

Jede affine Abbildung ist eine lineare Transformation mit anschließender Translation. Das bedeutet, eine Abbildung $\psi: \mathbb{H}^k \rightarrow \mathbb{C}^d$ ist genau dann affin, wenn es eine Matrix $A_\psi \in \mathbb{C}^{d \times k}$ und einen Vektor b_ψ gibt, sodass für jedes $X \in \mathbb{H}^k$ gilt:

$$\psi(X) = A_\psi X + b_\psi.$$

Im weiteren Verlauf (insbesondere in diesem Kapitel) ergibt es sich gelegentlich, dass ψ eine lineare Abbildung ist. Setzt man jedoch $b_\psi = 0$, so wird klar, dass jede lineare Abbildung auch affin ist und somit zur Konstruktion semidefiniter Lifts verwendet werden kann.

Definition 3.2. (Charakterpolytop)

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{S} \subseteq G$. Das Charakterpolytop $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ ist definiert durch:

$$\mathcal{P}(G, \mathcal{S}) = \text{conv} \left\{ \left(\frac{1}{d_\pi} \chi_\pi(x) \right)_{x \in \mathcal{S}} : \pi \in \widehat{G} \right\}.$$

Um ein obere Schranke an die semidefinite Erweiterungskomplexität eines solchen Charakterpolytops zu finden genügt es bereits einen PSD-Lift mit möglichst kleiner Größe zu konstruieren. Hierzu wird sich eine alternative Darstellung von $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$, die eine Momentenmatrix verwendet, als nützlich erweisen.

Definition 3.3. (Momentenmatrix)

Sei G eine endliche Gruppe und $\ell \in \mathbb{C}^G$. Die Matrix

$$M(\ell) = (\ell_{x^{-1}y})_{x,y \in G}$$

heißt *Momentenmatrix*. Für $\ell \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}}$ mit $\mathcal{T} \subseteq G$ lässt sich die eingeschränkte Momentenmatrix definieren durch:

$$M_{\mathcal{T}}(\ell) = (\ell_{x^{-1}y})_{x,y \in \mathcal{T}}.$$

Definition 3.4. (Positiver Typ)

Sei G eine endliche Gruppe und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. Man sagt f hat *positiven Typ*, falls für alle $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{x \in G} g * g^*(x) f(x) \geq 0,$$

wobei g^* die Involution von g und $g * g^*(x)$ die Faltung von g und g^* ist.

Nach Definition von Faltung und Involution hat eine komplexwertige Funktion f positiven Typ, falls für alle Funktionen g gilt:

$$0 \leq \sum_{x,y \in G} g(y) \overline{g(x^{-1}y)} f(x) = \sum_{y,z \in G} g(y) \overline{g(z)} f(yz^{-1}).$$

Dabei wurde $z := x^{-1}y$ gesetzt. Mit $g^*(x) := \overline{g(x^{-1})}$ und indem man $y' = y^{-1}$, $z' = z^{-1}$ setzt, erhält man:

$$0 \leq \sum_{y',z' \in G} \overline{g^*(y')} g^*(z') f(y'^{-1}z') = \overline{g^*}^T M(f) g^*.$$

Da diese Ungleichung für alle Funktionen g und somit auch für alle g^* gilt und man zudem jede Funktion in der Form g^* darstellen kann, ist die Tatsache, dass eine Funktion f positiven Typ hat äquivalent dazu, dass die Momentenmatrix $M(f)$ positiv semidefinit ist.

Das folgende Theorem zeigt, dass jedes Charakterpolytop einen semidefiniten Lift der Größe $|G|$ hat. Der Beweis dieses Theorems bedient sich eines Resultats aus [2].

Theorem 3.5. (Bochner's Theorem)

Sei G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e und $\mathcal{S} \subseteq G$. Es gilt:

$$\mathcal{P}(G, \mathcal{S}) = \left\{ (\ell_x)_{x \in \mathcal{S}} : \exists k \in \mathbb{C}^G, \ell_x = k_x \text{ für } x \in \mathcal{S}, k_e = 1, \right. \\ \left. M(k) \succeq 0, k \text{ ist eine Klassenfunktion} \right\}.$$

Beweis:

Es genügt die Aussage für $\mathcal{S} = G$ zu beweisen. Für alle weiteren $\mathcal{S} \subset G$ folgt das Theorem dann, indem man stets alle Einträge zu Indizes aus $G \setminus \mathcal{S}$ abschneidet. Da es sich bei ℓ nun um einen Vektor in \mathbb{C}^G handelt, wird dieser im folgenden als komplexwertige Funktion mit $\ell(x) = \ell_x$ aufgefasst.

Nach der zuvor getroffenen Anmerkung erfüllt jedes ℓ aus der Menge auf der rechten Seite in der Behauptung die folgenden Eigenschaften:

- a) $\ell(e) = 1$.
- b) ℓ hat positiven Typ.
- c) ℓ ist eine Klassenfunktion.

Zunächst wird nun gezeigt, dass Punkt b) äquivalent dazu ist, dass $\hat{\ell}(\pi) \succeq 0$ für jede Darstellung $\pi \in \hat{G}$ gilt. Dazu gelte zunächst $\hat{\ell}(\pi) \succeq 0$ und es sei $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig. Da die Matrix $\hat{g}(\pi)\hat{g}(\pi)^*$ für jede Wahl von g positiv semidefinit ist, folgt:

$$0 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \hat{g}(\pi)\hat{g}(\pi)^*, \hat{\ell}(\pi) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \widehat{g * g^*}(\pi), \hat{\ell}(\pi) \rangle \\ \stackrel{\text{Parseval}}{=} \sum_{x \in G} g * g^*(x) \overline{\ell(x)}.$$

Nach der Definition von Faltung und Involution lassen sich diese mit der Komplexkonjugation vertauschen. Durch Komplexkonjugation des letzten Terms erhält man somit:

$$0 \leq \sum_{x \in G} \bar{g} * \bar{g}^*(x) \ell(x),$$

für alle g und daher auch für alle $\bar{g}: G \rightarrow \mathbb{C}$. Es folgt also, dass ℓ positiven Typ hat.

Umgekehrt habe ℓ nun positiven Typ und sei $\pi \in \hat{G}$. Sei $A \in S_{\succeq 0}^{d_\pi}$ eine positiv semidefinite Matrix. Dann hat A eine Cholesky-Zerlegung $A = BB^*$. Definiere $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$g(x) = \frac{d_\pi}{|G|} \langle B, \pi(x) \rangle.$$

Dann gilt für jedes $\pi' \in \hat{G}$ und alle $i, j \in d_{\pi'}$:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\pi')_{i,j} &= \sum_{x \in G} \frac{d}{|G|} \langle B, \pi(x) \rangle \pi'(x)_{i,j} = \frac{d}{|G|} \sum_{x \in G} \sum_{k,l=1}^{d_\pi} B_{k,l} \overline{\pi(x)_{k,l}} \pi'(x)_{i,j} \\ &= \frac{d}{|G|} \sum_{k,l=1}^{d_\pi} B_{k,l} \langle \pi'_{i,j}, \pi_{k,l} \rangle. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Schur ist der letzte Term gleich $B_{i,j}$ falls $\pi = \pi'$ ist oder anderenfalls gleich 0. Insbesondere gilt somit $\hat{g}(\pi) = B$ und $\hat{g}(\pi') = 0$ für jede Darstellung $\pi' \in \hat{G} \setminus \{\pi\}$. Somit folgt $\hat{g}(\pi)\hat{g}(\pi)^* = BB^* = A$ und $\hat{g}(\pi')\hat{g}(\pi')^* = 0$. Nun lässt sich ähnlich wie zuvor argumentieren.

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{x \in G} g * g^*(x) \overline{\ell(x)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \widehat{g * g^*}(\pi), \hat{\ell}(\pi) \rangle \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi \langle \hat{g}(\pi)\hat{g}(\pi)^*, \hat{\ell}(\pi) \rangle \\ &= \frac{d_\pi}{|G|} \langle A, \hat{\ell}(\pi) \rangle. \end{aligned}$$

Da A beliebig gewählt wurde, folgt also $\langle A, \hat{\ell}(\pi) \rangle \geq 0$ für alle Matrizen $A \in S_{\geq 0}^{d_\pi}$. Aufgrund der Selbstdualität des Kegels $S_{\geq 0}^{d_\pi}$ muss daher $\hat{\ell}(\pi)$ positiv semidefinit sein. Ferner gilt $\hat{\ell}(\pi) \succeq 0$ sogar für alle Darstellungen $\pi \in \hat{G}$, da π ebenfalls beliebig gewählt wurde.

Nun ist gezeigt, dass Eigenschaft b) äquivalent dazu ist, dass $\hat{\ell}(\pi) \succeq 0$ für jedes $\pi \in \hat{G}$ gilt. Weil die Charaktere einer Gruppe eine Basis des Unterraums $\{f \in \mathbb{C}^G : f \text{ ist eine Klassenfunktion}\}$ bilden und weil ℓ selbst auch eine Klassenfunktion ist, gibt es somit für jedes $\pi \in \hat{G}$ einen Koeffizienten α_π mit:

$$\ell = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi \chi_\pi = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi d_\pi \frac{\chi_\pi}{d_\pi}.$$

Wegen $\ell(e) = 1$ und $\chi_\pi(e) = \text{Tr}(\pi(e)) = \text{Tr}(\text{Id}_{d_\pi}) = d_\pi$ gilt:

$$1 = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi d_\pi.$$

Weiter folgt für alle Darstellungen $\pi \in \hat{G}$ und $i, j \in [d_\pi]$:

$$\begin{aligned} (1) \quad \left(\hat{\ell}(\pi) \right)_{i,j} &= \sum_{x \in G} \ell(x) \pi(x)_{i,j} = \langle \ell, \overline{\pi_{i,j}} \rangle = \sum_{\pi' \in \hat{G}} \alpha_{\pi'} \langle \chi_{\pi'}, \overline{\pi_{i,j}} \rangle \\ &= \sum_{\pi' \in \hat{G}} \alpha_{\pi'} \sum_{k \in d_{\pi'}} \langle \pi'_{k,k}, \overline{\pi_{i,j}} \rangle. \end{aligned}$$

Nun beachtet man, dass man in \hat{G} die Darstellung π durch $\bar{\pi}$ ersetzen kann. Dann folgt mit dem Lemma von Schur, dass im letzten Term alle Summanden gleich 0 sind, für die $\pi' \neq \pi$ oder $(k, k) \neq (i, j)$ gilt. Somit:

$$(2) \quad \left(\hat{\ell}(\pi)\right)_{i,j} = \alpha_\pi \frac{|G|}{d_\pi} \delta_{i,j} \geq 0.$$

Also ist $\hat{\ell}(\pi)$ eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente nichtnegativ sind, weil $\hat{\ell}(\pi) \succeq 0$ gilt. Da die Zahlen $|G|, d_\pi \geq 0$ erfüllen, folgt also, dass ebenfalls $\alpha_\pi \geq 0$ für jedes $\pi \in \hat{G}$ gilt. Somit ist gezeigt, dass $\ell \in \mathcal{P}(G, G)$ gilt. Umgekehrt wähle man nun $\ell \in \mathcal{P}(G, G)$. Dann gibt es erneut Koeffizienten $\alpha_\pi \geq 0$ mit:

$$\ell(x) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi \frac{\chi_\pi(x)}{d_\pi}.$$

ℓ ist auf Konjugationsklassen konstant, da dies für jeden Charakter gilt. Außerdem ist:

$$\ell(e) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi \frac{d_\pi}{d_\pi} = \sum_{\pi \in \hat{G}} \alpha_\pi = 1.$$

Außerdem gilt erneut (1) und (2) (wobei man α_π durch α_π/d_π ersetzt), weil ℓ wieder eine Linearkombination von Charakteren ist. Daher gilt wieder $\hat{\ell}(\pi) = \alpha_\pi |G|/d_\pi^2 \text{Id}_{d_\pi}$ und dies ist insbesondere positiv semidefinit, weil jede der Zahlen $\alpha_\pi, |G|, d_\pi$ nichtnegativ ist. Also erfüllt jedes $\ell \in \mathcal{P}(G, G)$ die Eigenschaften a), b), c). Dies zeigt, dass die Inklusion " \subseteq " ebenfalls erfüllt ist. □

Theorem 3.5. konstruiert einen PSD-Lift für $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$, der unabhängig von \mathcal{S} ist. Nun sollte man die Teilmenge \mathcal{S} stärker in die Betrachtung miteinbeziehen, um möglicherweise den vorhandenen PSD-Lift zu verbessern.

Definition 3.6. (Fourier-Support)

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{S} \subseteq G$. Dann nennt man eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq G$ einen Fourier-Support von \mathcal{S} , falls die folgenden zwei Kriterien erfüllt sind.

- 1) Jede Konjugationsklasse, die einen Repräsentanten in \mathcal{S} hat, hat einen Repräsentanten in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$.
- 2) Für jede Klassenfunktion $k \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}}$ folgt aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$, dass die Matrix $Y \in (\mathbb{C} \cup \{\star\})^{G \times G}$, definiert durch

$$Y_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y. \\ k_r, & \text{falls es } z \in G \text{ gibt mit } z^{-1}(x^{-1}y)z = r \in \mathcal{S}. \\ \star, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigt werden kann.

Enthält die Menge \mathcal{S} mehrere Gruppenelemente aus einer Konjugationsklasse, dann resultiert dies darin, dass jeder Vektor aus dem Charakterpolytop in den zugehörigen Einträgen konstant ist. Das heißt also, liegen $x, y \in \mathcal{S}$ in der gleichen Konjugationsklasse, so gilt:

$$\ell_x = \ell_y, \text{ für alle } \ell \in \mathcal{P}(G, \mathcal{S}).$$

In diesem Fall ist das Charakterpolytop also nicht volldimensional, sondern weist eine Prismastruktur auf. Betrachtet man eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, sodass jede Konjugationsklasse K mit $K \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ genau einen Repräsentanten in \mathcal{S}' hat, so lässt sich $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ durch folgende lineare Abbildung in $\mathcal{P}(G, \mathcal{S}')$ überführen:

$$\mathcal{P}(G, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{P}(G, \mathcal{S}') : (\ell_x)_{x \in \mathcal{S}} \longmapsto (\ell_x)_{x \in \mathcal{S}'}.$$

Umgekehrt lässt sich auch $\mathcal{P}(G, \mathcal{S}')$ in $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ überführen, indem man entsprechende Einträge dupliziert. Da hier Lifts von Charakterpolytopen von Interesse sind, ergibt es also Sinn, sich auf Teilmengen \mathcal{S} zu beschränken, die je Konjugationsklasse höchstens ein Element enthalten.

Ferner wird für das folgende Theorem angenommen, dass \mathcal{S} abgeschlossen unter Inversenbildung ist. Das heißt, für jedes Element $x \in \mathcal{S}$ ist auch das inverse Element x^{-1} in \mathcal{S} enthalten. Sollten x und x^{-1} in derselben Konjugationsklasse liegen, so genügt es bereits, wenn nur das Element x in \mathcal{S} enthalten ist, um eine oben beschriebene Prismastruktur zu vermeiden.

Theorem 3.7.

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{S} \subseteq G$ abgeschlossen unter Inversenbildung, sodass $|K \cap \mathcal{S}| \leq 1$ für jede Konjugationsklasse $K \subseteq G$ gilt. Sei \mathcal{T} ein Fourier-Support von \mathcal{S} . Dann gilt:

$$\mathcal{P}(G, \mathcal{S}) = \left\{ (\ell_x)_{x \in \mathcal{S}} : \exists k \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}}, \ell_x = k_x \text{ für } x \in \mathcal{S}, k_e = 1, \right. \\ \left. M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0, k \text{ ist eine Klassenfunktion} \right\}.$$

Beweis:

Zunächst wird gezeigt, dass die Menge auf der linken Seite der Gleichung in der auf der rechten Seite enthalten ist. Hierzu lässt sich Theorem 3.5. benutzen, um zu erkennen, dass jedes Element aus der Menge auf der linken Seite die Form $(\ell_x)_{x \in \mathcal{S}}$ hat, sodass es ein $k' \in \mathbb{C}^G$ gibt, das die folgenden vier Eigenschaften erfüllt:

- a) $\ell_x = k'_x$ für $x \in \mathcal{S}$.
- b) $k'_e = 1$.
- c) $M(k') \succeq 0$.
- d) k' ist eine Klassenfunktion.

Zu zeigen ist, dass es ein $k \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}}$ gibt, das ebenfalls a), b) und d), jedoch statt c) die Eigenschaft $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$ erfüllt. Setzt man $k_x := k'_x$ für alle $x \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$, so sind die Eigenschaften a), b) und d) für k klar erfüllt. Zusätzlich ist $M_{\mathcal{T}}(k)$ eine Hauptuntermatrix von $M(k')$ und diese ist nach c) positiv semidefinit. Folglich ist auch $M_{\mathcal{T}}(k)$ positiv semidefinit.

Die Beweisstrategie für die umgekehrte Inklusion ist die Konstruktion einer Momentenmatrix, aus der schließlich k' hervorgeht. Dazu sei Y eine Matrix mit $Y_{x,x} = 1$ für alle $x \in G$ und $Y_{x,y} = k_r$, falls die Konjugationsklasse, die $x^{-1}y$ enthält, einen Repräsentanten $r \in \mathcal{S}$ hat. Alle weiteren Einträge von Y sind nicht gegeben. Weil \mathcal{T} ein Fourier-Support von \mathcal{S} ist, können einerseits Repräsentanten von \mathcal{S} so gewählt werden, dass diese auch in $\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$ enthalten sind. Somit sind die bekannten Einträge der Matrix Y wohldefiniert. Andererseits folgt aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$, dass Y zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigt werden kann. Nun wird aus Y eine Matrix $Z \in \mathbb{C}^{G \times G}$ konstruiert, die eine Momentenmatrix ist, wie sich später herausstellt.

$$Z_{x,y} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} Y_{s^{-1}xr, s^{-1}yr}$$

Das nächste Argument ist wesentlich für den weiteren Beweis. Unter anderem impliziert es, dass Z tatsächlich eine Momentenmatrix ist. Für $t, u \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} (3) \quad Z_{txu, tyu} &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} Y_{s^{-1}txur, s^{-1}tyur} \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{r',s' \in G} Y_{s'^{-1}xr', s'^{-1}yr'} = Z_{x,y}. \end{aligned}$$

Dabei wurden die Substitutionen $s' := t^{-1}s$ und $r' := ur$ vorgenommen. Definiert man nun $k'_x = Z_{e,x}$ für $x \in G$, so lässt sich die Momentenstruktur von Z nachweisen:

$$Z_{x,y} \stackrel{(3)}{=} Z_{x^{-1}x, x^{-1}y} = Z_{e, x^{-1}y} = k_{x^{-1}y}.$$

Nun bleibt zu prüfen, dass k' die Eigenschaften a) - d) erfüllt. Um a) zu zeigen, wird ein $x \in \mathcal{S}$ gewählt. Für alle Gruppenelemente $r, s \in G$ gilt dann $(s^{-1}r)^{-1}s^{-1}xr = r^{-1}xr$. Da $r^{-1}xr$ in derselben Konjugationsklasse wie x liegt und x selber in \mathcal{S} liegt, sind die Matrixeinträge $Y_{s^{-1}r, s^{-1}xr}$ bekannt. Zudem ist dieser Eintrag identisch zu k_x . Dies folgt aus der Konstruktion von Y . Es gilt also:

$$k'_x = Z_{e,x} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} Y_{s^{-1}r, s^{-1}xr} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} k_x = \frac{1}{|G|^2} |G|^2 k_x = k_x.$$

Eigenschaft b) folgt leicht aus der Tatsache, dass die Matrix Y nur Einsen als Hautdiagonalelemente enthält.

$$k'_e = Z_{e,e} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} Y_{s^{-1}r, s^{-1}r} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{r,s \in G} 1 = 1$$

Betrachtet man für feste $r, s \in G$ die Matrix $(\tilde{Y})_{x,y} := Y_{s^{-1}xr, s^{-1}yr}$, so fällt auf, dass diese aus der Matrix Y entsteht, indem man Zeilen und Spalten gleichermaßen permutiert. Da Y positiv semidefinit ist, ist somit auch \tilde{Y} positiv semidefinit. Es folgt, dass Z als Summe positiv semidefiniter Matrizen, multipliziert mit einem nichtnegativen Skalar, selbst ebenfalls positiv semidefinit ist. Da bereits gezeigt wurde, dass es sich bei Z um die Momentenmatrix $M(k')$ handelt, folgt die Eigenschaft c).

Für die Eigenschaft d) ist zu zeigen, dass $k'_x = k'_{r^{-1}xr}$ für alle Elemente $x, r \in G$ gilt. Dies ist mit (3) leicht zu zeigen:

$$k'_x = Z_{e,x} \stackrel{(3)}{=} Z_{r^{-1}r, r^{-1}xr} = Z_{e, r^{-1}xr} = k'_{r^{-1}xr}.$$

□

Theorem 3.7. liefert eine Darstellung von $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ mittels einer Menge von hermiteschen, positiv semidefiniten $(|\mathcal{T}| \times |\mathcal{T}|)$ -Matrizen. Die Anforderungen, dass es sich dabei um Momentenmatrizen handelt, dass k eine Klassenfunktion ist und dass $k_e = 1$ gilt, lassen sich in Form von linearen Matrixgleichungen ausdrücken. Außerdem lässt sich der Vektor ℓ linear aus der Matrix $M_{\mathcal{T}}(k)$ extrahieren:

$$\ell_x = k_x = (M_{\mathcal{T}}(k))_{e,x}, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Somit liefert Theorem 3.7. einen PSD-Lift der Größe $|\mathcal{T}|$. Insbesondere folgt also:

$$\text{xc}_{\text{PSD}}(\mathcal{P}(G, \mathcal{S})) \leq |\mathcal{T}|.$$

Bisher wurden Charakterpolytope als konvexe Mengen in $\mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ untersucht. Für den Fall, dass man an reellen Polytopen interessiert ist, lässt sich ein reelles Pendant für Charakterpolytope definieren. Dazu partitioniert man die Gruppe G in drei Teilmengen G_{-1} , G_0 und G_1 , sodass G_0 alle selbstinversen Elemente enthält. Die übrigen Elemente liegen als inverse Paare x, x^{-1} vor. Für jedes Element $x \in G_1$ liegt das zugehörige inverse Element x^{-1} in G_{-1} . Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, da man für jedes der inversen Paare x, x^{-1} frei entscheiden kann, welches Element in G_1 und welches in G_{-1} liegt. Ebenso lässt sich die unter Inversenbildung abgeschlossene Teilmenge \mathcal{S} partitionieren:

$$\mathcal{S}_i := G_i \cap \mathcal{S}, \quad i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Sei nun χ der Charakter zu der irreduziblen Darstellung $\pi \in \hat{G}$. Dann gilt für jedes $x \in G$:

$$\chi(x^{-1}) = \text{Tr}(\pi(x^{-1})) = \text{Tr}(\overline{\pi(x)^T}) = \overline{\text{Tr}(\pi(x))} = \overline{\chi(x)}.$$

Das bedeutet, wenn ℓ in $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ liegt, so sind alle Einträge zu Elementen aus \mathcal{S}_0 reell und die Einträge zu Elementen aus \mathcal{S}_{-1} und \mathcal{S}_1 bilden komplex konjugierte Paare. Daher ist die Linearität der folgenden Abbildung sichergestellt:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}: \mathbb{C}^{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{S}|}, \quad \ell \mapsto ((\ell_x)_{x \in \mathcal{S}_0}, (\text{Re}[\ell_x], \text{Im}[\ell_x])_{x \in \mathcal{S}_1}).$$

Es ist hier zu bemerken, dass die Abbildung $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ von der Partition von G abhängt. Eine Veränderung der Partition von G führt dazu, dass für einige $x \in G$ die Rollen von $\chi(x)$ und $\overline{\chi(x)}$ vertauscht werden. Dies bedeutet für die Abbildung $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$, dass Einträge der Form $\text{Im}[\ell_x]$ mit umgekehrtem Vorzeichen vorliegen. Allerdings können die Abbildungen $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ zu verschiedenen Partitionen linear ineinander überführt werden. Man betrachte dazu bloß eine Abbildung, die einen Vektor auf sich selbst mit umgekehrten Vorzeichen in einigen Komponenten abbildet. Eine solche Abbildung ist in der Tat linear.

Definition 3.8. (Reelles Charakterpolytop)

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{S} \subseteq G$ abgeschlossen unter Inversenbildung. Das reelle Charakterpolytop $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}(G, \mathcal{S})$ ist gegeben durch

$$\mathcal{P}^{\mathbb{R}}(G, \mathcal{S}) = \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\mathcal{P}(G, \mathcal{S})).$$

Da die Abbildung $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ linear ist, lässt sie sich mit Hilfe einer Transformationsmatrix B darstellen. Zudem ist die Komposition der Abbildung $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ mit einer affinen Abbildung $\psi: x \mapsto A_{\psi}x + b_{\psi}$ wieder affin, denn:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}}(\psi(x)) = \mathcal{R}_{\mathcal{S}}(A_{\psi}x + b_{\psi}) = BA_{\psi}x + Bb_{\psi}.$$

Weil $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}(G, \mathcal{S})$ das Bild von $\mathcal{P}(G, \mathcal{S})$ unter $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ ist, liefert jeder semidefinite Lift eines (komplexen) Charakterpolytops somit ebenfalls einen semidefiniten Lift des zugehörigen reellen Charakterpolytops.

4. LINEARE LIFTS

Die Untersuchung semidefiniter Lifts im vorherigen Kapitel liefert eine Methode zur Konstruktion von Lifts mit kleiner Größe. In diesem Kapitel wird jedoch keine Konstruktion guter linearer Lifts angegeben. Ganz im Gegenteil wird sich für eine gewisse Klasse von Polytopen (den sogenannten nachbarschaftlichen Polytopen) herausstellen, dass jeder lineare Lift dieser Polytope eine bestimmte Mindestgröße einhalten muss. Ein Bezug zu Charakterpolytopen ist vorhanden, wird aber erst später ausgeführt werden. Die Resultate dieses Kapitels stammen aus [5].

Definition 4.1. (Linearer Lift)

Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein Polytop. Man sagt P hat einen linearen Lift, wenn es ein Polytop $Q \subset \mathbb{R}^e$ und eine affine Abbildung $\psi: \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt, sodass $P = \psi(Q)$ gilt. Der lineare Lift hat Größe k , falls in der Darstellung von Q k Ungleichungen auftauchen. Das kleinste k sodass P einen linearen Lift der Größe k hat, heißt lineare Erweiterungskomplexität von P , bezeichnet mit $\text{x}_{\text{LP}}(P)$.

Überträgt man Definition 3.1. vom semidefiniten Fall direkt auf den linearen Fall, so ist ein affiner Unterraum L von $\mathbb{R}_{\geq 0}^e$ zu finden, sodass gilt:

$$P = \psi(\mathbb{R}_{\geq 0}^e \cap L).$$

Weil P ein Polytop ist, ist es insbesondere beschränkt und somit ist auch $Q := \mathbb{R}_{\geq 0}^e \cap L$ ein Polytop. Die Anforderung, dass Q in L enthalten ist, lässt sich durch lineare Gleichungen ausdrücken. Daher wird Q durch e Ungleichungen beschrieben. Somit ist die Definition der Größe linearer Lifts verträglich mit Definition 3.1.

Definition 4.2. (Schlupfdarstellung)

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d: Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

- (1) Für $x \in \mathbb{R}^d$ nennt man $b - Ax$ den zugehörigen Schlupfvektor.
- (2) Die Abbildung $\sigma: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch $\sigma(x) = b - Ax$ heißt Schlupfabildung.
- (3) Das Polytop $\tilde{P} := \sigma(P)$ heißt Schlupfdarstellung von P .

Da σ eine affine Abbildung ist, ist $\sigma(P)$ ein Polytop. Genauer gesagt ist $\sigma(P) = \text{conv}\{b - Av_i: i \in [n]\}$, wobei v_1, \dots, v_n die Ecken von P sind. Zu bemerken ist außerdem, dass die Schlupfabildung und somit auch \tilde{P} von der Darstellung $Ax \leq b$ abhängt. Allerdings liegt \tilde{P} immer in $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$, denn jede Ecke von \tilde{P} hat die Form $\sigma(v_i) = b - Av_i \geq 0$.

Definition 4.3. (Schlupferzeugende Menge)

Sei $T := \{t_1, \dots, t_r\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ eine Menge nichtnegativer Vektoren und $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop. T heißt schlupferzeugende Menge von P , wenn es für jedes $x \in \tilde{P}$ Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$ gibt, mit:

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i t_i.$$

Äquivalent hierzu kann man sagen, dass T eine schlupferzeugende Menge von P ist, falls \tilde{P} in der konischen Hülle von T enthalten ist.

Das nächste Ziel ist das Herstellen einer Verbindung zwischen schlupferzeugenden Mengen und linearen Lifts. Hierfür ist eine Folge einiger aufeinander aufbauender Lemmata nötig. Diese Folge wird mit einer Variante des Lemmas von Farkas begonnen, die unter Anderem in [11] zu finden ist.

Lemma 4.4.

Sei A eine reelle Matrix und b ein reeller Vektor, sodass das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ eine Lösung x_0 hat. Dann gilt:

$$\begin{aligned} c^T x \leq \delta, \text{ für alle Lösungen } x \text{ von } Ax \leq b. \\ \iff \text{Es gibt } y \geq 0 \text{ mit } y^T A = c^T \text{ und } y^T b \leq \delta. \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst sei $y \geq 0$ mit den Eigenschaften $y^T A = c^T$ und $y^T b \leq \delta$. Dann gilt für jedes x , das $Ax \leq b$ erfüllt:

$$Ax \leq b \implies y^T Ax \leq y^T b \implies c^T x \leq y^T b \leq \delta.$$

Für die entgegengesetzte Folgerung sei $c^T x \leq \delta$ für alle Lösungen von $Ax \leq b$. Zwecks Widerspruch sei angenommen, dass es kein $y \geq 0$ gibt mit $y^T A = c^T$ und $y^T b \leq \delta$. Dies ist äquivalent dazu, dass das folgende Gleichungssystem keine nichtnegative Lösung hat:

$$(y^T \quad \lambda) \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (c^T \quad \delta).$$

Mit dem Lemma von Farkas folgt nun die Existenz eines Vektor $(z^T \quad \mu)$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } (c^T \quad \delta) \begin{pmatrix} z \\ \mu \end{pmatrix} < 0.$$

Aus der ersten Eigenschaft folgt insbesondere $\mu \geq 0$. Zunächst wird der Fall $\mu = 0$ betrachtet. Damit folgt also:

$$Az \geq 0 \text{ und } c^T z < 0.$$

Mit x_0 aus der Voraussetzung und für eine genügend große reelle Zahl α gilt:

$$\begin{aligned} A(x_0 - \alpha z) &= Ax_0 - \alpha Az \leq b \text{ und} \\ c^T(x_0 - \alpha z) &= c^T x_0 - \alpha c^T z > \delta. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass jede Lösung von $Ax \leq b$ auch $c^T x \leq \delta$ erfüllt. Nun wird der Fall $\mu \geq 0$ behandelt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} Az + \mu b &\geq 0 \text{ und } c^T z + \mu \delta < 0 \\ \iff A \begin{pmatrix} -z \\ \mu \end{pmatrix} &\leq b \text{ und } c^T \begin{pmatrix} -z \\ \mu \end{pmatrix} > \delta. \end{aligned}$$

Dies ist erneut ein Widerspruch. Es folgt somit die Behauptung. \square

Lemma 4.5.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$. Gilt die Ungleichung $c^T x \leq \delta$ für alle $x \in P$, dann ist diese Ungleichung eine nichtnegative Kombination der Zeilen von $Ax \leq b$.

Beweis:

Wegen $\dim(P) \geq 1$ ist $P \neq \emptyset$. Insbesondere hat das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ eine Lösung. Somit folgt aus Lemma 4.4. die Existenz eines $y \geq 0$, sodass $y^T A = c^T$ und $y^T b \leq \delta$ gilt. Das Polytop P besteht nicht nur aus einem Punkt, da seine Dimension ≥ 1 ist. Daher gibt es einen Index i mit:

$$\min\{A_{i,\star}^T x : x \in P\} < \max\{A_{i,\star}^T x : x \in P\} = b_i.$$

Dabei bezeichnet $A_{i,\star}$ die i -te Zeile der Matrix A . Man definiere nun $b'_i := \min\{A_{i,\star}^T x : x \in P\}$. Insbesondere gilt also für jedes $x \in P$:

$$b'_i \leq A_{i,\star}^T x \iff -A_{i,\star}^T x \leq -b'_i.$$

Nach der Wahl von b'_i gibt es außerdem keine Zahl $\tilde{\delta}$, sodass $-A_{i,\star}^T x \leq -\tilde{\delta} < -b'_i$ für alle $x \in P$ gilt.

Durch erneutes Anwenden von Lemma 4.4. gibt es nun ein $y' \geq 0$ mit $y'^T A = -A_{i,\star}^T$ und $y'^T b \leq -b'_i$. Man erhält für jedes $x \in P$ die folgende Ungleichungskette:

$$-A_{i,\star}^T x = y'^T Ax \leq y'^T b \leq -b'_i.$$

Wie bereits wegen der Wahl von b'_i festgestellt, kann keine der Ungleichungen für alle $x \in P$ strikt sein. Somit folgt $y'^T b = -b'_i$. Anders gesagt ist die Ungleichung $-A_{i,\star}^T x \leq -b'_i$ eine nichtnegative Kombination der Zeilen von $Ax \leq b$. Durch hinzuaddieren der Ungleichung $A_{i,\star}^T x \leq b_i$ erhält man:

$$0 \leq b_i - b'_i.$$

Die rechte Seite ist nicht Null, denn:

$$b'_i = \min\{A_{i,\star}^T x : x \in P\} < \max\{A_{i,\star}^T x : x \in P\} = b_i.$$

Somit kann man mit dem Faktor $(\delta - y^T b)/(b_i - b'_i) \geq 0$ skalieren und anschließend die Ungleichung $c^T x = y^T Ax \leq y^T b$ addieren. Man erhält schließlich die Ungleichung $c^T x \leq \delta$ als nichtnegative Kombination der Zeilen von $Ax \leq b$.

□

Lemma 4.6.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$. Wenn P f Facetten hat, dann hat P (mit der Darstellung $Ax \leq b$) eine schlupferzeugende Menge der Größe f .

Beweis:

Sei m die Anzahl der Ungleichungen in $Ax \leq b$ und r die Anzahl der nicht redundanten Ungleichungen. Ohne Verlust der Allgemeinheit seien die ersten r Zeilen nicht redundant. Damit gilt:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d : A_{[r],\star} x \leq b_{[r]}\},$$

wobei $A_{[r],\star} x \leq b_{[r]}$ die ersten r Zeilen von $Ax \leq b$ sind. Ferner erfüllt jedes $x \in P$ die $m - r$ letzten Ungleichungen. Nach Lemma 4.5. ist somit jede dieser Ungleichungen eine nichtnegative Linearkombination der ersten r Ungleichungen. Formal ausgedrückt existieren für $i \in \{r + 1, \dots, m\}$ und $k \in [r]$ Koeffizienten $t_{k,i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für die i -te Ungleichung $A_{i,\star} x \leq b$ gilt:

$$(4) \quad A_{i,\star} = \sum_{k=1}^r A_{k,\star} t_{k,i} \quad \text{und} \quad b_i = \sum_{k=1}^r b_k t_{k,i}.$$

Setzt man für $i \in [r]$:

$$t_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{falls } k \in [r] \setminus \{i\} \end{cases}$$

so ist (4) für alle $i \in [m]$ erfüllt. Man kann die Koeffizienten somit zu Vektoren $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ zusammenfassen. Es ist nun zu zeigen, dass jeder Schlupfvektor $b - Ax \in \tilde{P}$ als nichtnegative Linearkombination der Vektoren t_1, \dots, t_r dargestellt werden kann. Man betrachte dazu für $x \in P$ die Kombination

$$\sum_{k=1}^r (b_k - A_{k,\star} x) t_k.$$

Für die i -te Komponente dieser Kombination gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r (b_k - A_{k,\star}x)t_{k,i} &= \sum_{k=1}^r b_k t_{k,i} - \left(\sum_{k=1}^r A_{k,\star}t_{k,i} \right) x \stackrel{(4)}{=} b_i - A_{i,\star}x \\ &= (b - Ax)_i. \end{aligned}$$

Falls es Ungleichungen in $Ax \leq b$ gibt, die für alle $x \in P$ mit Gleichheit erfüllt sind, so sind die zugehörigen Koeffizienten $b_k - A_{k,\star}x$ stets Null. In dem Fall können die zugehörigen Vektoren t_k ignoriert werden, da sie in keiner Linearkombination auftauchen. Übrig bleibt also eine schlupferzeugende Menge, die für jede nicht redundante Ungleichung, die nicht immer mit Gleichheit erfüllt ist, einen Vektor enthält. Somit enthält sie genau f Elemente. □

Lemma 4.7.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop. Es gilt:

$$\tilde{P} = \text{aff}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m.$$

Beweis:

Per Definition haben alle Elemente in \tilde{P} die Form $b - Ax$ mit $Ax \leq b$. Demnach ist jeder Vektor aus \tilde{P} nichtnegativ. Außerdem ist $\text{aff}(\tilde{P})$ der kleinste affine Raum, der \tilde{P} enthält. Somit ist $\tilde{P} \subseteq \text{aff}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Für die umgekehrte Inklusion betrachte man den Vektorraum

$$\text{Im}(-A) = \{-Ax : x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Entsprechend ist $\text{Im}(-A) + b$ als verschobener Vektorraum ein affiner Raum. Ferner erfüllt dieser die folgenden Gleichheiten:

$$\begin{aligned} (\text{Im}(-A) + b) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m &= \{b - Ax : x \in \mathbb{R}^d, b - Ax \geq 0\} \\ &= \{\sigma(x) : x \in P\} = \tilde{P}. \end{aligned}$$

Also ist $\text{Im}(-A) + b$ ein affiner Raum, der \tilde{P} enthält. Da $\text{aff}(\tilde{P})$ der kleinste affine Raum ist, der \tilde{P} enthält, gilt somit die Inklusion $\text{aff}(\tilde{P}) \subseteq \text{Im}(-A) + b$. Es folgt:

$$\text{aff}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m \subseteq (\text{Im}(-A) + b) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m = \tilde{P}.$$

Insgesamt folgt somit die Mengengleichheit. □

Theorem 4.8.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$. Die minimale Größe einer schlupferzeugenden Menge in Abhängigkeit einer beliebigen Darstellung von P beträgt $x_{\text{CLP}}(P)$.

Beweis:

Zunächst ist zu zeigen, dass jede schlupferzeugende Menge der Größe r einen linearen Lift der Größe r liefert. Sei dazu $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ eine schlupferzeugende Menge,

$$Q := \left\{ \lambda: \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r, \sum_{i=1}^r \lambda_i t_i \in \text{aff}(\tilde{P}) \right\}$$

und $\psi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$\psi: \lambda \mapsto \sum_{i=1}^r \lambda_i t_i.$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \psi(Q) &= \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i t_i: \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}^r, \sum_{i=1}^r \lambda_i t_i \in \text{aff}(\tilde{P}) \right\} \\ &= \text{aff}(\tilde{P}) \cap \text{cone}\{t_1, \dots, t_r\}. \end{aligned}$$

Bedenkt man, dass t_1, \dots, t_r nichtnegative Vektoren sind, so ist klar, dass $\text{cone}\{t_1, \dots, t_r\}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ ist. Es folgt, also:

$$\begin{aligned} \psi(Q) &= \text{aff}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m \cap \text{cone}\{t_1, \dots, t_r\} \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.7.}}{=} \tilde{P} \cap \text{cone}\{t_1, \dots, t_r\} = \tilde{P}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt, weil T eine schlupferzeugende Menge ist und \tilde{P} somit in der konischen Hülle von T enthalten ist. Das heißt also, dass Q zusammen mit ψ einen linearen Lift liefert. Durch die Ungleichungen $\lambda \geq 0$ hat dieser lineare Lift eine Größe von mindestens r . Es bleibt zu zeigen, dass die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^r \lambda_i t_i \in \text{aff}(\tilde{P})$ durch Gleichungen beschrieben werden kann. Hierzu sei $V \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Vektorraum und $v \in \mathbb{R}^m$, sodass $\text{aff}(\tilde{P}) = V + v$. $\{w_1, \dots, w_k\}$ sei eine Orthonormalbasis von V . Nach dem Basisergänzungssatz lässt sich diese zu einer Orthonormalbasis $\{w_1, \dots, w_m\}$ von \mathbb{R}^m erweitern. Anders ausgedrückt gilt:

$$\begin{aligned} V + v &= (\text{span}\{w_{k+1}, \dots, w_m\})^\perp + v \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m: w_i^T x = 0, \forall i = k+1, \dots, m\} + v \\ &\stackrel{y:=x+v}{=} \{y \in \mathbb{R}^m: w_i^T y = w_i^T v, \forall i = k+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Somit lässt sich die Nebenbedingung umformulieren zu:

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j w_i^T t_j = w_i^T v, \forall i = k+1, \dots, m.$$

Der lineare Lift hat also tatsächlich Größe r .

Nun ist zu zeigen, dass jeder lineare Lift der Größe r auch eine schlupferzeugende Menge der Größe r liefert. Dazu sei der Lift durch $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ und die Abbildung ψ' gegeben. Dann ist $\sigma(\psi'(Q)) = \sigma(P) = \tilde{P}$. Da σ und ψ' affine Abbildungen sind, gibt es Matrizen $A_\sigma, A_{\psi'}$ und Vektoren $b_\sigma, b_{\psi'}$, sodass:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= A_\sigma x + b_\sigma, \quad \psi'(x) = A_{\psi'} x + b_{\psi'} \\ \implies \sigma \circ \psi'(x) &= A_\sigma A_{\psi'} x + A_\sigma b_{\psi'} + b_\sigma.\end{aligned}$$

Somit ist $\sigma \circ \psi'$ ebenfalls eine affine Abbildung. Es folgt, dass Q einen linearen Lift von \tilde{P} zusammen mit der Abbildung $\psi := \sigma \circ \psi'$ liefert. Wegen der Affinität von ψ gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times e}$ und $g \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\psi(y) := g - Cy.$$

Da $\psi(Q) = \tilde{P} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, gilt $g - Cy \geq 0$ für jedes y aus Q . Folglich ist die Ungleichung $Cy \leq g$ für alle $y \in Q$ erfüllt. Das heißt Q hat eine Darstellung der folgenden Form:

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^e : \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese Darstellung von Q kann erneut verwendet werden um die Schlupfdarstellung von Q zu betrachten. Hierzu sei τ die zugehörige Schlupfabildung. Ist ρ die Abbildung, die einen Vektor auf seine ersten m Koordinaten abbildet, so ist $\psi = \rho \circ \tau$, denn:

$$(5) \quad \rho \circ \tau(y) = \rho \left(\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} y \right) = g - Cy = \psi(y).$$

Da Q nach Voraussetzung einen linearen Lift der Größe r liefert, enthält die Darstellung von Q genau r Ungleichungen. Da sich die Behauptung auf Lifts minimaler Größe bezieht, kann man davon ausgehen, dass keine überflüssigen Ungleichungen in der Darstellung von Q vorliegen. Das heißt, dass Q genau r Facetten hat. Nach Lemma 4.6. hat Q eine schlupferzeugende Menge $\{t_1, \dots, t_r\}$. Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass $\{\rho(t_1), \dots, \rho(t_r)\}$ eine schlupferzeugende Menge von P ist. Dazu sei $x \in P$ und der entsprechende Schlupfvektor $\sigma(x) \in \tilde{P}$. Wegen $\psi(Q) = \tilde{P}$ gibt es ein $y \in Q$ mit $\psi(y) = \sigma(x)$. Weil $\{t_1, \dots, t_r\}$ eine schlupferzeugende Menge von Q ist, lässt sich jedes Element aus \tilde{Q} (wie zum Beispiel $\tau(y)$) als nichtnegative Kombination der t_i darstellen. Also gibt es nichtnegative Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit:

$$\tau(y) = \sum_{k=1}^r \lambda_k t_k.$$

Es ist offensichtlich dass ρ linear ist. Zusammen mit (5) ergibt sich:

$$\sigma(x) = \psi(y) = \rho \circ \tau(y) = \rho \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k t_k \right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \rho(t_k).$$

Zuletzt bleibt zu bemerken, dass t_1, \dots, t_r als Elemente einer schlupferzeugenden Menge nichtnegativ sind. Folglich sind auch $\rho(t_1), \dots, \rho(t_r)$ nichtnegativ. Insgesamt bilden diese also eine schlupferzeugende Menge von P der Größe r .

□

Im Beweis von Theorem 4.8. taucht nirgends die Darstellung $Ax \leq b$ von P auf. Insbesondere bedeutet dies, dass die minimale Größe einer schlupferzeugenden Menge bezüglich jeder beliebigen Darstellung von P mit $\text{x}_{\text{CLP}}(P)$ übereinstimmt.

Gemäß dieses Resultats genügt es schlupferzeugende Mengen zu untersuchen, um Aussagen über die lineare Erweiterungskomplexität treffen zu können. Solche schlupferzeugende Mengen lassen sich wiederum mittels sogenannter Schlupfmatrizen charakterisieren.

Definition 4.9. (Schlupfmatrix)

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$. Seien v_1, \dots, v_n die Ecken von P . Die Schlupfmatrix von P ist eine Matrix $S \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times n}$. Für $j \in [n]$ ist ihre j -te Spalte $S_{\star, j}$ definiert durch:

$$S_{\star, j} = b - Av_j.$$

Wie bereits nach Definition 4.2. angemerkt, haben die Ecken von \tilde{P} die Form $b - Av_i$. Das heißt also, dass \tilde{P} die konvexe Hülle der Spalten von S ist.

Lemma 4.10.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop und S die zugehörige schlupferzeugende Matrix. Es gilt:

$$S = TU \text{ mit } T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times r}, U \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times n}$$

\iff Die Spalten von T sind eine schlupferzeugende Menge von P .

Beweis:

Zunächst sei $S = TU$. Dann gilt für $i \in [m], j \in [n]$:

$$S_{i, j} = \sum_{k=1}^r T_{i, k} U_{k, j}.$$

Betrachtet man Spalten anstelle einzelner Einträge, so folgt:

$$S_{\star, j} = \sum_{k=1}^r T_{\star, k} U_{k, j}.$$

Wie zuvor bemerkt ist \tilde{P} die konvexe Hülle der Spalten von S . Also gibt es für jedes $x \in \tilde{P}$ nichtnegative Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $\sum_j \lambda_j = 1$

und:

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j S_{\star,j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{k=1}^r T_{\star,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j U_{k,j} \right) T_{\star,k}.$$

Wegen $U_{k,j}, \lambda_j \geq 0$ kann also jedes $x \in \tilde{P}$ als nichtnegative Linearkombination der Spalten von T dargestellt werden. Da die Spalten von T ebenfalls nichtnegativ sind, bilden diese also eine schlupferzeugende Menge von P .

Umgekehrt seien die Spalten von T nun eine schlupferzeugende Menge von P . Die Spalten von S haben die Form $b - Av_j \in \tilde{P}$ mit $v_j \in P$. Insbesondere lassen sich die Spalten von S als nichtnegative Linearkombination der Spalten von T ausdrücken. Es gibt also $\mu_{1,j}, \dots, \mu_{r,j} \geq 0$, sodass:

$$S_{\star,j} = \sum_{k=1}^r T_{\star,k} \mu_{k,j}.$$

Definiert man die Matrix U durch $U_{k,j} := \mu_{k,j} \geq 0$, so folgt:

$$S_{\star,j} = \sum_{k=1}^r T_{\star,k} U_{k,j},$$

beziehungsweise anders ausgedrückt: $S = TU$, wobei T, U nichtnegative Matrizen sind. □

Lemma 4.10. liefert nun eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der linearen Erweiterungskomplexität. Dazu ist ein möglichst kleines r zu finden, sodass sich die Schlupfmatrix in das Produkt zweier nichtnegativer Matrizen $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times r}$ und $U \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times n}$ zerlegen lässt. Das kleinstmögliche r nennt man auch den nichtnegativen Rang von S . Diesen exakt zu bestimmen ist jedoch schwierig. Bereits die Frage ob der nichtnegative Rang dem üblichen Rang entspricht ist NP-schwer (siehe [12]). Daher wird nun nach einer Technik gesucht, die den nichtnegativen Rang nach unten abschätzt.

Definition 4.11. (Rechtecküberdeckung)

Sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times m}$ eine Matrix.

- (1) Der Support von M ist die Menge der Indizes, deren zugehöriger Eintrag nicht Null ist.

$$\text{supp}(M) := \{(i, j) \in [n] \times [m] : M_{i,j} > 0\}.$$

- (2) Eine Menge der Form $I \times J$ mit $I \subseteq [n]$ und $J \subseteq [m]$ heißt Rechteck, falls $I \times J \subseteq \text{supp}(M)$.

- (3) Eine Rechtecküberdeckung von M ist eine Menge von Rechtecken $\{R_1, \dots, R_k\}$, sodass:

$$\bigcup_{i=1}^k R_i = \text{supp}(M).$$

- (4) Die minimale Kardinalität einer Rechtecküberdeckung von M wird mit $\text{rc}(M)$ bezeichnet.

Zu der Definition ist zu bemerken, dass jedes Rechteck in einer Rechtecküberdeckung in dem Support von M enthalten sein muss. Außerdem sollte man sich vor Augen halten, dass ein Rechteck nicht immer im intuitiven Sinne wie ein Rechteck aussieht, da I und J nicht zwingend aus aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen müssen. Erst wenn man alle Zeilen die nicht durch I indiziert und alle Spalten die nicht durch J indiziert werden ignoriert, erhält man ein Rechteck wie man es sich intuitiv vorstellt.

Theorem 4.12.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$ und $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die zugehörige Schlupfmatrix. Es gilt:

$$\text{rc}(S) \leq \text{x}_{\text{CLP}}(P).$$

Beweis:

Nach Theorem 4.8. gibt es eine schlupferzeugende Menge von P mit Kardinalität $\text{x}_{\text{CLP}}(P)$. Weiter folgt mit Lemma 4.10., dass es Matrizen $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times r}$ und $U \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{r \times n}$ gibt, mit $r = \text{x}_{\text{CLP}}(P)$ und $S = TU$. Zu zeigen ist, dass S eine Rechtecküberdeckung mit r Rechtecken hat. Hierzu beobachtet man, dass für alle $i \in [m]$, $j \in [n]$ gilt:

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^r T_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^r (T_{\star,k} U_{k,\star})_{i,j}.$$

Es folgt also $S = \sum_k T_{\star,k} U_{k,\star}$. Weil T und U nichtnegative Matrizen sind, bildet der Support der Matrix $T_{\star,k} U_{k,\star}$ ein Rechteck. Genau genommen ist:

$$\text{supp}(T_{\star,k} U_{k,\star}) = \{(i, j) : T_{i,k}, U_{k,j} > 0\} = \text{supp}(T_{\star,k}) \times \text{supp}(U_{k,\star}).$$

Unter erneuter Beachtung der Tatsache, dass T und U nichtnegative Matrizen sind, folgt:

$$\text{supp}(S) = \bigcup_{k=1}^r \text{supp}(T_{\star,k} U_{k,\star}).$$

Dies liefert eine Rechtecküberdeckung mit r Rechtecken. Somit ist $\text{rc}(S) \leq r = \text{x}_{\text{CLP}}(P)$. □

Theorem 4.12. liefert eine Abschätzung der linearen Erweiterungskomplexität, sofern man die Zahl $\text{rc}(S)$ oder eine untere Schranke an $\text{rc}(S)$ kennt. Die Relevanz von Rechtecküberdeckungen an dieser Stelle rechtfertigt das folgende Lemma.

Lemma 4.13.

Sei $M = \mathbb{R}^{n \times m}$ eine Matrix. Das Hinzufügen einer Spalte (oder Zeile), deren Support die Vereinigung der Supports bereits bestehender Spalten (oder Zeilen) ist, verändert $\text{rc}(M)$ nicht.

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $M_{\star, j_1}, \dots, M_{\star, j_k} \in \mathbb{R}^n$ Spalten von M , sodass:

$$\text{supp}(x) = \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(M_{\star, j_i}).$$

Es ist klar, dass jede Rechtecküberdeckung der Matrix $(M \ x)$ mindestens $\text{rc}(M)$ Rechtecke benötigt, da bereits die Teilmatrix M diese Anzahl an Rechtecken für eine Überdeckung benötigt. Es bleibt also zu zeigen, dass es eine Rechtecküberdeckung von $(M \ x)$ mit genau $\text{rc}(M)$ Rechtecken gibt. Hierzu sei $\{R_1, \dots, R_{\text{rc}(M)}\}$ eine Rechtecküberdeckung von M . Für $i \in [\text{rc}(M)]$ betrachte man $R_i = I_i \times J_i$ und setze:

$$R'_i = \begin{cases} I_i \times (J_i \cup \{m+1\}), & \text{falls } |\{j_1, \dots, j_k\} \cap J_i| \geq 1. \\ I_i \times J_i, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Nach wie vor wird so die Teilmatrix M überdeckt. Da der Support der letzten Spalte x die Vereinigung der Supports der Spalten mit den Indizes j_1, \dots, j_k ist, wird diese ebenfalls durch die Rechtecke $R'_1, \dots, R'_{\text{rc}(M)}$ überdeckt. Dies folgt aus der Konstruktion von R'_i . Somit hat $(M \ x)$ ebenfalls eine Rechtecküberdeckung der Größe $\text{rc}(M)$. Der Beweis lässt sich analog durchführen, wenn man x als Zeilenvektor zu M hinzufügt. \square

Definition 4.14. (Nichtinzidenzmatrix)

Sei P ein Polytop und $M \in \{0, 1\}^{\mathcal{F} \times \mathcal{G}}$, wobei \mathcal{F} und \mathcal{G} Mengen von Seiten von P sind. Dabei seien alle Facetten von P in \mathcal{F} und alle Ecken von P in \mathcal{G} enthalten. Dann heißt M Nichtinzidenzmatrix von P , falls für alle $f \in \mathcal{F}$ und $g \in \mathcal{G}$ gilt:

$$M_{f,g} = \begin{cases} 0, & \text{falls } g \subseteq f. \\ 1, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Nach Theorem 4.12. liefern die Schlupfmatrizen von P (bezüglich verschiedener Darstellungen) über ihre minimale Rechtecküberdeckung eine untere Schranke an $\text{xc}_{\text{LP}}(P)$. Für eine Rechtecküberdeckung ist jedoch nur relevant, welche Einträge nicht Null sind und nicht wie genau die Einträge aussehen. Zur Vereinfachung kann man also alle Nichtnulleinträge von Schlupfmatrizen zu Eins setzen ohne etwas an den Rechtecküberdeckungen zu ändern.

Das nächste Lemma zeigt, dass zur Betrachtung von Rechtecküberdeckungen Nichtinzidenzmatrizen und Schlupfmatrizen äquivalent zueinander sind.

Lemma 4.15.

Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$. Setzt man alle Nichtnulleinträge der Schlupfmatrizen von P zu Eins, so gilt bis auf Hinzufügen und Entfernen von Zeilen und Spalten wie in Lemma 4.13.:

$$\begin{aligned} & \{S : S \text{ ist Schlupfmatrix von } P\} \\ & = \{M : M \text{ ist Nichtinzidenzmatrix von } P\}. \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst betrachte man eine Schlupfmatrix S und eine Nichtinzidenzmatrix M und nehme an, dass deren Zeilen jeweils von den Facetten und deren Spalten jeweils von den Ecken von P indiziert werden. Im Falle der Schlupfmatrix bedeutet dies, dass jede Zeile der zugehörige Darstellung $Ax \leq b$ eine Facette induziert. Dann wird schnell klar, dass S und M übereinstimmen, denn für jede Facette f , die durch die Ungleichung $A_{i,*}x \leq b_i$ beschrieben wird und für jede Ecke v gilt:

$$\begin{aligned} S_{f,v} = 1 & \iff b_i - A_{i,*}v > 0 \\ & \iff v \notin f \iff M_{f,v} = 1. \end{aligned}$$

Im Weiteren soll nun gezeigt werden, dass die Annahme, dass Zeilen durch Facetten und Spalten durch Ecken indiziert werden, stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit getroffen werden kann. Es werden daher die folgenden Fälle betrachtet.

- a) S enthält eine Zeile, sodass die zugehörige Zeile in der Darstellung $Ax \leq b$ keine Facette induziert.
- b) M enthält eine Zeile, die durch eine Seite indiziert wird, die keine Facette ist.
- c) M enthält eine Spalte, die durch eine Seite indiziert wird, die keine Ecke ist.

Hierbei ist zu bemerken, dass die Spalten von Schlupfmatrizen immer nach Definition durch Ecken indiziert werden.

Zunächst betrachte man den Fall a). Sei $c^T x \leq \delta$ eine Zeile der Darstellung $Ax \leq b$, die keine Facette von P induziert. Das heißt, dass alle Facetten und somit P selbst durch andere Zeilen beschrieben werden. Somit ist die Ungleichung $c^T x \leq \delta$ für alle $x \in P$ erfüllt. Nach Lemma 4.5. ist die Zeile $c^T x \leq \delta$ dann eine nichtnegative Linearkombination der übrigen Zeilen. Entsprechend ist der Schlupf $\delta - c^T x$ eine nichtnegative Linearkombination des Schlupfs der übrigen Zeilen. Der Einfachheit halber seien die ersten k Zeilen von $Ax \leq b$ die, deren Koeffizienten in der Linearkombination nicht null sind. Bedenkt man, dass jeder Schlupf nichtnegativ ist und auch die Kombination der Zeilen nur nichtnegative Koeffizienten benutzt, folgt für jede Ecke v von P , dass $\delta - c^T v > 0$ genau dann gilt, wenn es ein $i \in [k]$ gibt, mit $b_i - A_{i,\star} v > 0$. Daher ist der Support der Zeile $\delta - c^T v$ die Vereinigung der Supports von $b_i - A_{i,\star} v$. Gemäß Lemma 4.13. kann die Zeile $\delta - c^T v$ also entfernt werden.

Betrachte als nächstes Fall b). Sei $M_{f,\star}$ eine Zeile, die durch die Seite f indiziert wird, wobei f keine Facette ist. Dann gibt es Facetten f_1, \dots, f_k von P , mit der Eigenschaft:

$$f = \bigcap_{i=1}^k f_i.$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} M_{f,g} = 1 &\iff g \not\subseteq f \\ &\iff \exists i \in [k]: g \not\subseteq f_i \\ &\iff \exists i \in [k]: M_{f_i,g} = 1. \end{aligned}$$

Es folgt also, dass der Support der Zeile $M_{f,\star}$ die Vereinigung der Supports der Zeilen $M_{f_i,\star}$ ist. Erneut kann die Zeile $M_{f,\star}$ gemäß Lemma 4.13. ignoriert werden.

Fall c) lässt sich ähnlich wie Fall b) behandeln. Sei $M_{\star,g}$ eine Spalte, die durch die Seite g indiziert wird, wobei g keine Ecke ist. Seien g_1, \dots, g_k alle Ecken, die in g enthalten sind. Dann folgt:

$$\begin{aligned} M_{f,g} = 1 &\iff g \not\subseteq f \\ &\iff \exists i \in [k]: g_i \not\subseteq f \\ &\iff \exists i \in [k]: M_{f,g_i} = 1. \end{aligned}$$

Wieder ist der Support der Spalte $M_{\star,g}$ die Vereinigung der Supports der Spalten M_{\star,g_i} und kann gemäß Lemma 4.13. ignoriert werden. Es folgt die Behauptung. □

Der Beweis von Lemma 4.15. liefert nicht nur die Aussage, dass Schlupfmatrizen und Nichtinzidenzmatrizen bei der Ermittlung minimaler Rechtecküberdeckungen äquivalent sind. Er zeigt sogar, dass man sich

stets auf Schlupfmatrizen und Nichtinzidenzmatrizen beschränken kann, deren Zeilen durch Facetten und deren Spalten durch Ecken indiziert werden. Die Seitenstruktur des Polytops P und somit insbesondere seine Facetten und Ecken sind unabhängig von der Darstellung $Ax \leq b$. Zusammen mit der Aussage von Lemma 4.15. bedeutet das also, dass die Kardinalität einer minimalen Rechtecküberdeckung für alle Schlupfmatrizen und Nichtinzidenzmatrizen von P übereinstimmt. Aus diesem Grund kann die minimale Rechtecküberdeckung auch treffender mit $\text{rc}_{\text{LP}}(P)$ anstelle von $\text{rc}_{\text{LP}}(S)$ bezeichnet werden.

Im Weiteren wird das Problem der Rechtecküberdeckung speziell für nachbarschaftliche Polytope untersucht, um deren lineare Erweiterungskomplexität abschätzen zu können.

Definition 4.16. (Nachbarschaftlichkeit)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop und V die Menge der Ecken von P . Für $k \in [d]$ heißt P k -nachbarschaftlich, falls für jede Teilmenge $U \subseteq V$ mit $|U| = k$ gilt, dass $\text{conv}(U)$ eine Seite von P ist.

P heißt nachbarschaftlich, falls P $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -nachbarschaftlich ist.

Theorem 4.17.

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein nachbarschaftliches Polytop. Weiter sei V die Menge der Ecken von P mit $n := |V|$. Dann gilt:

$$\text{x}_{\text{CLP}}(P) = \Omega \left(\min \left\{ n, \frac{(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

Beweis:

Um die folgenden Argumentationen etwas übersichtlicher zu gestalten, sei $k = \lfloor d/2 \rfloor$. Aus der Nachbarschaftlichkeit von P folgt, dass jede k -elementige Teilmenge von V eine Seite induziert. Sei \mathcal{F} die Menge dieser Seiten. Man betrachte nun eine Nichtinzidenzmatrix von P , die für jede Facette und für jede Seite aus \mathcal{F} je eine Zeile hat. Die Spalten seien mit den Ecken von P indiziert. Des Weiteren sei M die Teilmatrix, die man erhält, wenn man sich auf die Zeilen zu Seiten aus \mathcal{F} beschränkt. Da jede Rechtecküberdeckung der Nichtinzidenzmatrix auch eine Rechtecküberdeckung von M liefert, ist $\text{rc}(M)$ nach Lemma 4.15. und 4.13. eine untere Schranke an $\text{rc}(P)$ und somit nach Theorem 4.12. auch an $\text{x}_{\text{LP}}(M)$. Es genügt also zu zeigen, dass jede Rechtecküberdeckung von M entsprechend viele Rechtecke benötigt.

Sei $R = I \times J$ ein inklusionsmaximales Rechteck von M , also $J \subseteq V$. Wegen der Maximalität von R gehören alle solche Seiten aus \mathcal{F} zu I , die nur Ecken aus $V \setminus J$ enthalten. Wie man sieht, genügt es die Spaltenindizes J anzugeben, um ein inklusionsmaximales Rechteck eindeutig zu definieren. Da man an dieser Stelle an minimalen Rechtecküberdeckungen interessiert ist, kann man im Weiteren ohne Verlust der

Allgemeinheit annehmen, dass Rechtecke inklusionsmaximal sind. Somit ist eine Rechtecküberdeckung von M gegeben durch eine Menge $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_t\} \subseteq 2^V$, sodass gilt:

$$(6) \quad \forall F \in \mathcal{F}, v \in V \setminus V(F) \exists \ell \in [t]: v \in J_\ell \text{ und } V(F) \subseteq V \setminus J_\ell.$$

Dabei bezeichnet $V(F)$ die Menge der Ecken von F . Die Eigenschaft (6) besagt, dass jeder Eintrag $M_{F,v}$, der Eins ist, durch ein Rechteck J_ℓ überdeckt ist. Man betrachte nun eine minimale Rechtecküberdeckung, gegeben durch $\mathcal{J} = \{J_1, \dots, J_t\}$. Sei $v \in V$ und

$$\mathcal{J}(v) := \{J_\ell: v \in J_\ell, \ell \in [t]\}.$$

Betrachte zunächst den Fall, dass $\{v\} \in \mathcal{J}(v)$ ist. Das heißt, es gibt ein Rechteck, das alle Einseinträge in der Spalte zu v , aber keine weiteren Einseinträge von M überdeckt. Entsprechend kann der Spaltenindex v aus allen weiteren Rechtecken entfernt werden, ohne die Eigenschaft einer Rechtecküberdeckung zu verletzen. Es folgt dann $\{\{v\}\} = \mathcal{J}(v)$. Alle v , die diese Eigenschaft haben, werden nun zusammengefasst:

$$X := \{v \in V: \{v\} \in \mathcal{J}\} \text{ und } s := |X|.$$

Es genügt nun die Anzahl der Rechtecke abzuschätzen, die die Spalten zu Ecken aus $V \setminus X$ überdecken. Alle weiteren Spalten werden durch s Rechtecke überdeckt. Ist $V \setminus X$ leer, so ist $V = X$ und die zugehörige Rechtecküberdeckung von M hat ein Rechteck für jede Spalte. In diesem Fall ist $\text{rc}(M) = n$. Da diese Überdeckung stets möglich ist, ist $\text{rc}(M) \leq n$ eine triviale Schranke.

Ist dagegen $V \setminus X$ nicht leer, so findet man $v \in V \setminus X$. Da v nicht in X enthalten ist, ist die Menge $\{v\}$ nicht in \mathcal{J} enthalten. Daher bestehen alle Mengen aus $\mathcal{J}(v)$ aus mindestens zwei Elementen (v und eine weitere Ecke). Insbesondere sind alle Mengen aus $\mathcal{J}(v)$ in $V \setminus X$ enthalten. Es folgt $|V \setminus X| \geq k + 1$, denn sonst ließe sich eine Seite $F \in \mathcal{F}$ konstruieren, indem man die Ecken aus $V \setminus (X \cup \{v\})$ zusammen mit weiteren beliebigen Ecken $\neq v$ wählt, bis k Ecken ausgewählt wurden. Jedes J , das dann v enthält, liegt in $\mathcal{J}(v)$ und enthält damit auch eine Ecke von F . Dies widerspricht (6). Da nun also $|V \setminus X| \geq k + 1$ gilt, findet man verschiedene Ecken $v_1, \dots, v_{k+1} \in V \setminus X$.

Ignoriert man in \mathcal{J} nun alle Mengen der Form $\{v\}$, so gilt für jedes $\ell \in [k + 1]$, dass es mindestens $k + 2 - \ell$ Mengen in \mathcal{J} gibt, die v_ℓ enthalten, aber keine der Ecken $v_1, \dots, v_{\ell-1}$. Anderenfalls gäbe es höchstens $k + 1 - \ell$ solcher Mengen, aus denen man je ein Element $\neq v_\ell$ wählen kann. Zusammen mit den Elementen $v_1, \dots, v_{\ell-1}$ (und evtl. weiteren Ecken, bis man k Ecken gewählt hat) definieren diese eine Seite $F \in \mathcal{F}$. Da jedes $J \in \mathcal{J}$, das v_ℓ enthält, auch eine Ecke von F enthält, widerspräche dies (6). Insgesamt erhält man also die folgende untere Schranke an die Anzahl der Mengen in \mathcal{J} und somit auch an die Anzahl

der Rechtecke in einer minimalen Rechtecküberdeckung:

$$s + \sum_{\ell=1}^{k+1} k + 2 - \ell = s + \sum_{j=1}^{k+1} j = s + \frac{(k+1)(k+2)}{2} \geq \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dabei zählt der Summand s die Mengen der Form $\{v\}$ und das ℓ -te Summenglied die Mengen, die v_ℓ enthalten, $v_1, \dots, v_{\ell-1}$ aber nicht. Beachtet man wie bereits im Fall $V \setminus X = \emptyset$ geschildert, dass $\text{rc}(M) \leq n$ stets gilt, folgt die Behauptung. □

Betrachtet man speziell nachbarschaftliche Polytope, die $n = \Theta(d^2)$ erfüllen, dann liefert Theorem 4.17. eine untere Schranke von $\Omega(n)$ an die lineare Erweiterungskomplexität.

5. BETRACHTUNG DER ZYKLISCHEN GRUPPE $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Kapitel 3 liefert in dem Sinne theoretische Resultate, als dass die Gruppe G und die Teilmenge \mathcal{S} allgemein gehalten wurden. Nun ist es an der Zeit diese Theorie anzuwenden, indem spezifische Wahlen getroffen werden. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass G eine zyklische Gruppe ist, also $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit einem $N \geq 3$. Siehe hierzu auch [4]. Diese Gruppe ist abelsch, weshalb jedes Gruppenelement eine eigene Konjugationsklasse bildet. Um das Charakterpolytop aufstellen zu können, ist festzustellen, wie die Charaktere der Gruppe aussehen. Diese sind wohl bekannt und gegeben durch:

$$\chi_a(x) = e^{\frac{2i\pi ax}{N}}, \text{ für } a \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Die Herausforderung besteht nun darin, einen möglichst kleinen Fourier-Support zu finden. Dazu sei zunächst in Erinnerung gerufen, dass Theorem 3.7. eine unter Inversenbildung abgeschlossene Menge \mathcal{S} fordert. Dies ermöglicht es den Cayley-Graph $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ zu betrachten.

Definition 5.1. (Cayley-Graph)

Sei G eine Gruppe und $\mathcal{S} \subseteq G$ unter Inversenbildung abgeschlossen. Der Cayley-Graph $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ ist ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge G , in dem zwei Gruppenelemente x, y genau dann adjazent sind, wenn $x^{-1}y \in \mathcal{S}$ ist.

Um einen Fourier-Support \mathcal{T} zu finden ist noch eine weitere graphentheoretische Definition, sowie ein darauf aufbauendes Theorem nötig.

Definition 5.2. (chordale Überdeckung)

Sei $H = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- (1) Eine Kante $\{v_i, v_j\} \in E$ heißt Sehne eines Kreises $C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ wenn die Knoten v_i und v_j in C nicht aufeinander folgen.
- (2) H heißt chordal, wenn jeder Kreis der Länge ≥ 4 in H eine Sehne hat.
- (3) Ist H ein chordaler Obergraph eines Graphen $H' = (V, E')$, also $E' \subseteq E$, so heißt H chordale Überdeckung von H' .

Chordale Graphen kann man sich als triangulierte Graphen vorstellen. Ist ein Kreis in einem chordalen Graphen kein Dreieck, so hat er eine Sehne. Durch diese Sehne wird der Kreis in zwei kleinere Kreise zerlegt, die wiederum entweder Dreiecke sind oder Sehnen haben. Dies führt dazu, dass jeder Kreis in einem chordalen Graphen in Dreiecke zerlegt ist. Für das folgende Theorem wird auf [7] verwiesen.

Theorem 5.3. (Matrixvervollständigung)

Sei $H = (V, E)$ ein chordaler Graph und $Y \in (\mathbb{C} \cup \{\star\})^{V \times V}$ eine Matrix. Ferner seien nur solche Einträge $Y_{v,w}$ gegeben, für die $v = w$ oder $v, w \in E$ gilt. Die unbekanntenen Einträge werden mit \star gekennzeichnet.

Dann lässt sich Y genau dann zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigen, wenn für jede inklusionsmaximale Clique \mathcal{C} von H die Matrix $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ positiv semidefinit ist. Dabei ist $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ die Hauptuntermatrix von Y , die man durch Betrachtung aller Zeilen und Spalten erhält, die durch Knoten aus \mathcal{C} indiziert werden.

Um Theorem 5.3. beweisen zu können, werden noch 2 Lemmata benötigt. Die erste Aussage gilt für alle Graphen, die keinen minimalen Kreis der Länge 4 enthalten. Insbesondere gilt diese Aussage also auch für chordale Graphen, da alle Kreise der Länge mindestens 4 in chordalen Graphen per Definition nicht minimal sind. In [7] wird sogar die Äquivalenz bewiesen, wohingegen hier eine Implikation ausreichend ist.

Lemma 5.4. *Sei $H = (V, E)$ ein Graph, der keinen minimalen Kreis der Länge 4 enthält und seien $u, v \in V$ mit $\{u, v\} \notin E$. Dann hat der Graph $H + \{u, v\} = (V, E \cup \{u, v\})$ genau eine inklusionsmaximale Clique, die u und v enthält.*

Beweis:

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ verschiedene Cliques in $H + \{u, v\}$, die beide sowohl u als auch v enthalten. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ ebenfalls eine Clique ist. Dann folgt, dass $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ nicht inklusionsmaximal sind und die Behauptung folgt als Kontraposition. Man wähle nun $z \in \mathcal{C}, z' \in \mathcal{C}'$ und zeige, dass die Kante $\{z, z'\}$ in $H + \{u, v\}$ enthalten ist. Der Fall $|\{z, z'\} \cap \{u, v\}| \geq 1$ ist trivial, denn dann liegen z, z' beide in \mathcal{C} oder beide in \mathcal{C}' . Insbesondere enthält $H + \{u, v\}$ die Kante $\{z, z'\}$. Also kann man nun annehmen, dass z, z' beide verschieden zu u, v sind. Somit ist z, u, z', v, z ein Kreis in $H + \{u, v\}$ der Länge 4. Da dieser Kreis die Kante $\{u, v\}$ nicht benutzt, ist dies auch ein Kreis in H . Nach Voraussetzung hat H keinen minimalen Kreis der Länge 4. Daher muss $\{u, v\}$ oder $\{z, z'\}$ eine Kante in H sein. Da u, v so gewählt sind, dass sie in H nicht adjazent sind, folgt $\{z, z'\} \in E$. Es folgt also weiter, dass $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ eine Clique ist.

□

Lemma 5.5. *Sei $H = (V, E)$ ein chordaler Graph, der nicht vollständig ist. Dann gibt es $u, v \in V$ mit $\{u, v\} \notin E$, sodass $H + \{u, v\}$ ebenfalls chordal ist.*

Beweis:

Da H nicht vollständig ist, gibt es zwei Knoten $u', v' \in V$, die nicht adjazent sind. Daher gilt $\text{dist}(u', v') \geq 2$. Auf einem kürzesten Weg von u' nach v' findet man dann zwei Knoten u und v mit $\text{dist}(u, v) = 2$. Der Knoten auf diesem kürzesten Weg, der zwischen u und v liegt, wird nun mit w bezeichnet. Sei C ein minimaler Kreis in $H + \{u, v\}$. Es ist zu zeigen, dass die Länge von C dann nicht ≥ 4 ist. Hierzu wird eine

Fallunterscheidung vorgenommen.

1. Fall: $u \notin C$ oder $v \notin C$.

Dann kommt die Kante $\{u, v\}$ nicht in C vor. Somit ist C auch ein minimaler Kreis in H . Wegen der Chordalität von H hat C dann eine Länge kleiner als 4.

2. Fall: $u, v \in C$ und $w \in C$.

Der minimale Kreis, der u, v und w enthält ist $C = v, w, u, v$. Dieser hat Länge 3, also kleiner als 4.

3. Fall: $u, v \in C$ und $w \notin C$.

Falls der Kreis C die Kante $\{u, v\}$ nicht enthält, so lässt sich C durch Verwendung der Kante $\{u, v\}$ abkürzen. Da C als minimal angenommen wurde, kann man also davon ausgehen, dass die Kante $\{u, v\}$ in C enthalten ist. Ersetzt man die Kante $\{u, v\}$ durch die Kantenfolge $\{u, w\}, \{w, v\}$, so erhält man einen Kreis C' in H . Man unterscheidet nun erneut 3 Fälle, die in Abbildung 1 dargestellt sind. Seien v_1, \dots, v_r alle Knoten in $C' \setminus \{u, v, w\}$. Ist w mit keinem der Knoten v_1, \dots, v_r benachbart, so ist C' in H ebenfalls minimal. Wegen der Chordalität von H hat C' eine Länge von < 4 , also $C' = u, v, w, u$. Da der Kreis C in dem Fall nur aus einer Kante (der Kante $\{u, v\}$) bestehen würde, also eigentlich kein Kreis ist, tritt dieser Fall nicht ein.

Ist w mit genau einem Knoten der Form v_i benachbart, so findet man den Kreis $w, v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, u, w$. Da w nur zu einem einzigen Knoten dieser Form benachbart ist und C minimal war, ist auch dieser Kreis in H minimal, hat also eine Länge von höchstens 3. Somit hat dieser Kreis die Form w, v_i, u, w und insbesondere ist $i = 1$. Dasselbe Argument für den minimalen Kreis $w, v_i, v_{i+1}, \dots, v_r, v, w$ liefert $i = r$. Es folgt, dass der Kreis C die Form $C = u, v, v_1, u$ und die Länge 3 hat.

Sei w nun mit $k \geq 2$ Knoten der Form v_i benachbart. Weil H chordal ist, muss der Kreis C' aus kleineren Kreisen der Größe 3 bestehen. Weil der Kreis C außerdem als minimal angenommen wurde, haben die Knoten v_1, \dots, v_r, u, v keine Kanten untereinander. Es folgt, dass w mit allen Ecken v_1, \dots, v_r und natürlich auch mit u, v benachbart sein muss. Nun betrachte man das Paar $\{u, v_2\}$ (wobei in C u mit v_1 und v_1 mit v_2 benachbart ist). Da die Knoten v_1, \dots, v_r, u, v wie bereits erwähnt keine Kanten untereinander haben, ist $\{u, v_2\}$ keine Kante in H . Da sie den gemeinsamen Nachbarn w haben, gilt $\text{dist}(u, v_2) = 2$. Man betrachtet daher nun $H + \{u, v_2\}$ statt $H + \{u, v\}$. Die Fälle 1 und 2 verhalten sich dann analog. Tritt Fall 3 erneut ein, so betrachtet man wieder einen minimalen Kreis C in $H + \{u, v_2\}$, der u, v_2 enthält, aber nicht w . Nun ist der minimale Kreis jedoch bekannt, nämlich $C = u, v_1, v_2, u$. Dieser hat nun ebenfalls eine Länge von 3, also kleiner als 4.

□

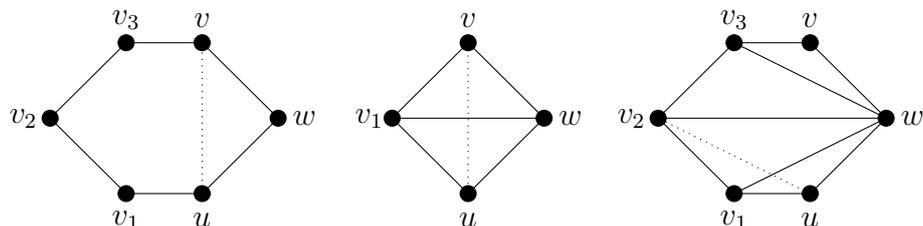


ABBILDUNG 1. Der Kreis C' im 3. Fall. Im linken Bild ist w zu keinem v_i benachbart, im mittleren Bild zu genau einem und in rechtem Bild zu mehreren. Die gestrichelte Linie ist die Kante, die zu H hinzugefügt wird. Der linke Fall tritt nicht ein, weil H chordal ist.

Mittels der Lemmata 5.4. und 5.5. ist nun der Beweis von Theorem 5.3. möglich.

Beweis zu Theorem 5.3.:

Zunächst sei angenommen, dass Y zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigt werden kann. Dann ist jeder Hauptminor der vervollständigten Matrix nichtnegativ. Es folgt dass für jede inklusionsmaximale Clique \mathcal{C} auch jeder Hauptminor von $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ nichtnegativ ist. Somit ist $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}] \succeq 0$. Insbesondere sind die Hauptuntermatrizen der Form $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ bereits vor der Vervollständigung bekannt. Umgekehrt sei nun $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}] \succeq 0$ für alle inklusionsmaximalen Cliques \mathcal{C} . Ist H vollständig, so ist nichts zu zeigen, da Y dann bekannt ist und V eine maximale Clique ist. Es ist also $Y = Y[V, V] \succeq 0$. Nehme nun an H ist nicht vollständig. Da H chordal ist, folgt nach induktivem Anwenden von Lemma 5.5., dass es eine Folge von chordalen Graphen $(H_i)_{i \in [s]}$ gibt, sodass alle Graphen H_i Knotenmenge V haben und H_{i+1} aus H_i entsteht, indem eine Kante zu H_i hinzugefügt wurde. Dabei sei $H_1 = H$ und H_s der vollständige Graph. Es ist nun zu zeigen, dass die Behauptung, wenn sie für H_i gilt, auch für H_{i-1} gilt. Da bereits bekannt ist, dass die Behauptung für H_s gilt, folgt per Induktion, dass sie auch für H gilt. Sei also $\{u, v\}$ die Kante, die in $E(H_i)$ enthalten ist, aber nicht in $E(H_{i-1})$. Nach Lemma 5.4. gibt es genau eine inklusionsmaximale Clique $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_p\}$ in H_i , die u und v enthält. Ohne Verlust der Allgemeinheit induziere v_j die j -te Spalte bzw. Zeile in Y für $j \in [p]$ und es seien $u = v_1, v = v_p$. $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ ist also die führende $(p \times p)$ -Hauptuntermatrix. Betrachtet man diese Situation für den Graphen H_{i-1} , so ist der Eintrag $Y_{1,p}$ (und daher auch $Y_{p,1}$) in dieser Untermatrix unbekannt. Alle weiteren bekannten Hauptuntermatrizen bleiben unberührt, da keine andere inklusionsmaximale Clique die Knoten u und v enthält. Möchte man also von der Situation für H_{i-1} in die Situation für H_i übergehen, so ist lediglich der unbekannte Eintrag $Y_{1,p} \in \mathbb{C}$ zu wählen, sodass $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}] \succeq 0$ gilt. Da es sich bei $Y[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$

ohne den Eintrag $Y_{1,p}$ (und $Y_{p,1}$) um eine Bandmatrix mit Bandbreite $2p - 1$ handelt und jede Hauptuntermatrix wiederum positiv semidefinit ist, folgt nach [3], dass ein entsprechender Eintrag für $Y_{1,p}$ gefunden werden kann. Man erhält somit die Aussage, dass wenn eine Matrixvervollständigung bezüglich H_i durchgeführt werden kann, auch eine bezüglich H_{i-1} möglich ist. \square

Aus Theorem 5.3. folgt eine alternative Eigenschaft für $\mathcal{T} \subseteq G$, die impliziert, dass \mathcal{T} ein Fourier-Support von \mathcal{S} ist. Dies wird im folgenden Lemma gezeigt.

Lemma 5.6.

Sei G eine abelsche Gruppe, $\mathcal{S} \subseteq G$ unter Inversenbildung abgeschlossen und $\mathcal{T} \subseteq G$. Weiter sei Δ eine chordale Überdeckung von $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$. Für jede inklusionsmaximale Clique \mathcal{C} in Δ gebe es ein $x_{\mathcal{C}} \in G$, sodass $x_{\mathcal{C}}\mathcal{C} = \{x_{\mathcal{C}}x : x \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{T}$. Dann ist \mathcal{T} ein Fourier-Support von \mathcal{S} .

Beweis:

Zu zeigen sind die Eigenschaften 1) und 2), die in Definition 3.6. aufgelistet werden. Betrachte dazu eine Kante $\{x, y\}$ von Δ . Da jede Kante eine Clique bildet, ist jede Kante auch in einer inklusionsmaximalen Clique enthalten. Nach Voraussetzung gibt es also ein $x_{\mathcal{C}}$, sodass $x_{\mathcal{C}}x$ und $x_{\mathcal{C}}y$ in \mathcal{T} enthalten sind. Somit:

$$(7) \quad x^{-1}y = x^{-1}x_{\mathcal{C}}^{-1}x_{\mathcal{C}}y = (x_{\mathcal{C}}x)^{-1}x_{\mathcal{C}}y \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}.$$

Für $y \in \mathcal{S}$ gilt offensichtlich $e^{-1}y \in \mathcal{S}$. Somit ist $\{e, y\}$ eine Kante von $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$, also auch eine Kante der chordalen Überdeckung Δ . Aus (7) folgt nun dass $y \in \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$ gilt und somit wurde gezeigt, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$ ist. Beachtet man, dass jedes Gruppenelement eine eigene Konjugationsklasse bildet, so ist gezeigt, dass \mathcal{T} die Eigenschaft 1) erfüllt.

Für die Eigenschaft 2) wird angenommen, dass $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$ für jedes $k \in \mathbb{C}^{\mathcal{T}}$ gilt. Betrachte die folgenden, nur teilweise bekannten Matrizen $Y, Y' \in (\mathbb{C} \cup \{\star\})^{G \times G}$:

$$Y_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y. \\ k_{x^{-1}y}, & \text{falls } x^{-1}y \in \mathcal{S}. \\ \star, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

$$Y'_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y. \\ k_{x^{-1}y}, & \text{falls } \{x, y\} \text{ Kante in } \Delta. \\ \star, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Matrix Y ist identisch zu der Matrix aus Punkt 2) in der Definition des Fourier-Supports, da wieder jedes Element eine eigene Konjugationsklasse bildet. Da bereits gezeigt wurde, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$ gilt, sind die

bekannten Einträge von Y wohldefiniert. Selbiges gilt für Y' wegen (7). Außerdem folgt aus $x^{-1}y \in \mathcal{S}$, dass $\{x, y\}$ eine Kante von $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ und somit auch von Δ ist. Daher sind bekannte Einträge von Y auch in Y' bekannt und in beiden Matrizen identisch. Will man also zeigen, dass sich Y zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigen lässt, so kann man dies erreichen, indem man Y' positiv semidefinit vervollständigt. Betrachte dazu eine inklusionsmaximale Clique \mathcal{C} und das nach Voraussetzung existierende Element $x_{\mathcal{C}} \in G$, das $x_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ erfüllt. Für die zugehörige induzierte Teilmatrix $Y'[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ gilt:

$$Y'[\mathcal{C}, \mathcal{C}] = (k_{x^{-1}y})_{x,y \in \mathcal{C}} = (k_{(x_{\mathcal{C}}x)^{-1}x_{\mathcal{C}}y})_{x,y \in \mathcal{C}} = (k_{z^{-1}z'})_{z,z' \in x_{\mathcal{C}}\mathcal{C}}.$$

Weil $x_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ ist, ist $Y'[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ eine Hauptuntermatrix von $M_{\mathcal{T}}(k)$. Da diese als positiv semidefinit angenommen wurde, ist $Y'[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ für jede inklusionsmaximale Clique \mathcal{C} von Δ positiv semidefinit. Aus Theorem 5.3. folgt, dass Y' und somit auch Y zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigt werden kann. \mathcal{T} erfüllt daher auch die Eigenschaft 2) und ist folglich ein Fourier-Support von \mathcal{S} .

□

Im folgenden besteht das Ziel nun darin, eine chordale Überdeckung Δ von $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathcal{S})$ und eine möglichst kleine Menge $\mathcal{T} \subseteq G$ zu finden, sodass es für jede Clique \mathcal{C} in Δ ein $x_{\mathcal{C}} \in G$ gibt, das $x_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ erfüllt. Dazu wird sich hier auf Teilmengen \mathcal{S} der Form $\mathcal{S} = \{-d, -d+1, \dots, d\}$ beschränkt.

5.1. Ein semidefiniter Lift für $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

Zunächst wird angenommen, dass $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ vorliegt. Dies lässt sich dann im nächsten Abschnitt verallgemeinern. Im Cayley-Graph $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-1, 0, 1\})$ sind zwei Elemente aus $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ genau dann durch eine Kante miteinander verbunden, wenn ihre Differenz $-1, 0$ oder 1 ist. Somit ist der Cayley-Graph hier der Kreis auf N Knoten, bezeichnet mit C_N . Um eine chordale Hülle zu erhalten, wird nun zunächst C_{N+1} trianguliert und anschließend hieraus auch eine Triangulierung für C_N gewonnen. Dazu seien $k_1 < \dots < k_l$ die Positionen der Einsen in der Binärdarstellung von N . Das heißt, es gilt $N = \sum_{i=1}^l 2^{k_i}$. Außerdem sei k die größte ganze Zahl, für die $2^k < N$ ist. Wenn N also eine Zweierpotenz ist, dann ist $k = k_1 - 1$ und anderenfalls ist $k = k_l$. Man trianguliere C_{N+1} auf der Knotenmenge $\{0, \dots, N\}$ nun wie folgt:

Füge die Kanten $\{0, -2^k\}$ und $\{0, N-2^k\}$ hinzu. Da $N-2^k = -2^k - 1$ ist, bildet $\{0, -2^k, N-2^k\}$ nun eine Clique. Um den kompletten Graph zu triangulieren, müssen nun nur noch die beiden Teilgraphen H_1 und H_2 auf den Knoten $\{0, -1, \dots, -2^k\}$ und $\{0, 1, \dots, N-2^k\}$ trianguliert werden. Diese beiden Teilgraphen bilden nun Kreise kleinerer Größe, die rekursiv trianguliert werden können. Dabei werden die Bezeichnungen der Knoten $\{0, -1, \dots, -2^k\}$ verschoben zu $\{-2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}\}$. Die Bezeichnungen von $\{0, 1, \dots, N-2^k\}$ wird verschoben zu $\{-2^{k-1}, \dots, N-3 \cdot 2^{k-1}\}$. Die beschriebene Triangulierung ist in Abbildung 2 dargestellt.

Lemma 5.1.1.

Die beschriebene Triangulierung von C_{N+1} liefert den folgenden Fourier-Support \mathcal{T} von $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

$$\mathcal{T} = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l-1 \right\}.$$

Außerdem gibt es für jede Clique \mathcal{C} ein $x_{\mathcal{C}} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $x_{\mathcal{C}}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$, so dass kein Element aus \mathcal{C} durch die Verschiebung um $x_{\mathcal{C}}$ über die Kante $\{-2^k, N-2^k\}$ hinweg verschoben wird.

Beweis:

Der Beweis erfolgt per Induktion über $N > 2$.

Induktionsanfang: $N = 3$

Für $N = 3$ ist $k = 1$, $k_1 = 0$ und $k_2 = 1$. Somit hat das \mathcal{T} aus der Behauptung die Form $\mathcal{T} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Damit enthält \mathcal{T} alle Knoten von C_4 . Für jede Clique \mathcal{C} der Triangulierung (hier sind die Cliques $\{0, 1, 2\}$ und $\{2, 3, 0\}$) gilt daher $0 + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. Insbesondere muss kein Element über die Kante $\{-2^k, N-2^k\} = \{-2, 1\} \equiv \{2, 1\}$ hinweg verschoben werden.

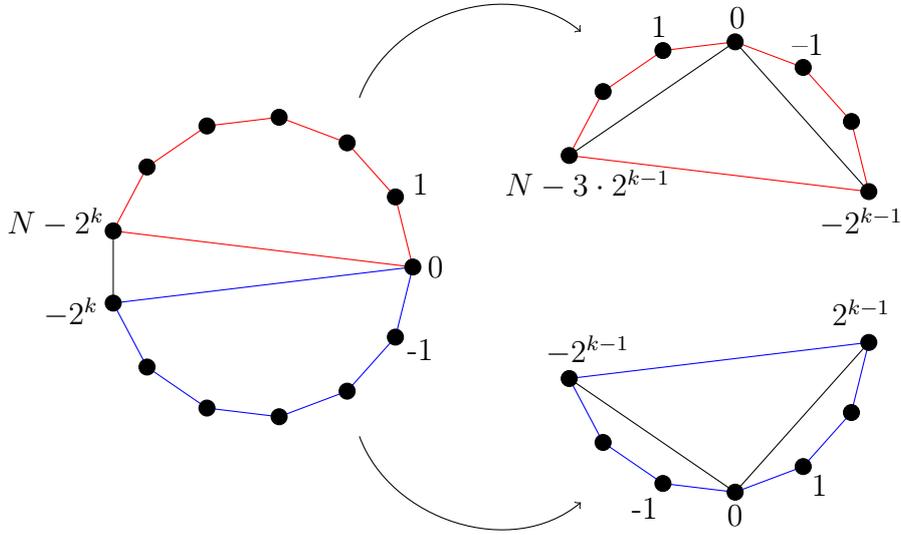


ABBILDUNG 2. Die beschriebene Triangulierung von C_{N+1} . Links wird die Clique $\{0, -2^k, N - 2^k\}$ eingefügt und C_{N+1} so in die Teilkreise H_1 (blau) und H_2 (rot) zerlegt. Rechts der nächste Rekursionsschritt nach Umnummerierung von H_1 und H_2 .

Induktionsvoraussetzung:
Die Behauptung gelte für ein $N > 2$.

Induktionsschritt:
Durch Einfügen der Kanten $\{0, -2^k\}$ und $\{0, N - 2^k\}$ entsteht die Clique $\mathcal{C} = \{0, -2^k, N - 2^k\}$. Dabei gilt:

$$N - 2^k = \begin{cases} 2^{k-1}, & \text{falls } N \text{ eine Zweierpotenz ist.} \\ \sum_{j=1}^{l-1} 2^{k_j}, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

\mathcal{C} ist in \mathcal{T} (definiert wie in der Behauptung) enthalten und muss somit nicht um ein $x_{\mathcal{C}} \neq 0$ verschoben werden. Insbesondere wird also auch kein Element dieser Clique über die Kante $\{-2^k, N - 2^k\}$ hinweg verschoben. Nun müssen die verbleibenden Teilgraphen H_1 und H_2 betrachtet werden.

Zunächst wird der Teilgraph H_1 untersucht, dessen Knoten sich zu $\{-2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}\}$ verschieben lassen. H_1 bildet einen Kreis auf $2^k + 1$ Knoten. Für diesen ist $N' = 2^k$, $k' = k - 1$ und $k'_1 = k$. Nach Induktionsvoraussetzung hat H_1 somit einen Fourier-Support

$$\mathcal{T}' = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k - 1\}$$

und für jede Clique \mathcal{C}' gibt es ein entsprechendes $x_{\mathcal{C}'}$, sodass kein Element über die Kante $\{-2^{k-1}, 2^{k-1}\}$ hinweg verschoben wird. Diese Kante ist im ganzen Graph C_{N+1} die zu Anfang hinzugefügte Kante $\{0, -2^k\}$. Das heißt, jede Verschiebung um $x_{\mathcal{C}'}$ funktioniert in H_1 und C_{N+1} gleichermaßen. Beachte nun, dass \mathcal{T}' die Nummerierung der Knoten von H_1 benutzt, welche gegenüber der Nummerierung in C_{N+1} um -2^{k-1} verschoben ist. Demnach ist $(x_{\mathcal{C}'} + 2^{k-1}) + \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{T}$. Insgesamt kann also jede Clique in H_1 so verschoben werden, dass ihre Element in \mathcal{T} liegen und kein Element über die Kante $\{-2^k, N - 2^k\}$ verschoben wird.

Der Teilgraph H_2 lässt sich ähnlich betrachten. Hier sind die Knoten verschoben zu $\{-2^{k-1}, \dots, N - 3 \cdot 2^{k-1}\}$. Somit bildet H_2 einen Kreis auf $N - 2^k + 1$ Knoten. Setze daher $N'' = N - 2^k$ und $k'' \leq k - 1$ ist die größte ganze Zahl mit $2^{k''} < N''$. Außerdem unterscheiden sich die Binärdarstellungen von N'' und N nur im signifikantesten Bit. Somit ist $k''_i = k_i$ für $i = 1, \dots, l - 1$. Die Induktionsvoraussetzung liefert folgenden Fourier-Support von H_2 :

$$\mathcal{T}'' = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k''\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l - 2 \right\}.$$

Beachte dabei, dass $\{\pm 2^i : i = 0, \dots, k''\} \subseteq \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k - 1\}$ gilt. Nach derselben Argumentation wie zuvor bei der Betrachtung von H_1 kann jede Clique so verschoben werden, dass sie in \mathcal{T}'' enthalten ist und kann anschließend um -2^{k-1} weiter verschoben werden, sodass sie in \mathcal{T} liegt. Mit Lemma 5.6. folgt die Behauptung. \square

Mittels einer kurzen Argumentation lässt sich nun aus der Triangulierung von C_{N+1} auch eine Triangulierung von C_N bilden.

Theorem 5.1.2.

C_N hat einen chordalen Obergraphen, sodass folgendes \mathcal{T} ein Fourier-Support von $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ ist.

$$\mathcal{T} = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k - 1\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l - 2 \right\}.$$

Beweis:

Seien die Knoten in C_N als $\{-2^k, \dots, 0, \dots, N - 2^k - 1\}$ nummeriert. Definiere einen neuen Knoten $N - 2^k$ und unterteile mit diesem die Kante $\{-2^k, N - 2^k - 1\}$ in die Kanten $\{-2^k, N - 2^k\}$ und $\{N - 2^k, N - 2^k - 1\}$. Durch die Unterteilung erhält man einen Kreis

C_{N+1} auf $N + 1$ Knoten, der nach Lemma 5.1.1. eine chordale Überdeckung hat, welche folgenden Fourier-Support liefert:

$$\mathcal{T} = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l-1 \right\}.$$

Bemerke, dass jede Clique von C_{N+1} auch in C_N vorkommt, außer die Clique $\mathcal{C} = \{0, -2^k, N - 2^k\}$, die zu Beginn der Konstruktion erzeugt wird. Aus dem Beweis von Lemma 5.1.1. geht hervor, dass alle Cliques von C_{N+1} außer \mathcal{C} in

$$\mathcal{T}' \cup \mathcal{T}'' = \{0\} \cup \{\pm 2^i : i = 0, \dots, k-1\} \cup \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l-2 \right\}$$

enthalten sind. Durch Aufhebung der vorgenommenen Kantenunterteilung erhält man somit einen chordalen Obergraphen von C_N . Mit Lemma 5.6. folgt, dass \mathcal{T} ein Fourier-Support von $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ ist. \square

Theorem 5.1.2. liefert zusammen mit Theorem 3.7. einen PSD-Lift für Charakterpolytope bezüglich zyklischer Gruppen. Dieser PSD-Lift hat die Größe $|\mathcal{T}| \leq 3 \log_2 N$. Dies folgt daraus, dass per Definition $k, l \leq \log_2 N$ gilt. Somit ist:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}| &\leq |\{0\}| + |\{\pm 2^i : i = 0, \dots, k-1\}| + \left| \left\{ \sum_{j=1}^i 2^{k_j} : i = 1, \dots, l-2 \right\} \right| \\ &\leq 1 + 2 \log_2 N + \log_2 N - 2 \leq 3 \log_2 N. \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt soll dieses Resultat nun verallgemeinert werden.

5.2. Ein semidefiniter Lift für $\mathcal{S} = \{-d, \dots, d\}$.

\mathcal{S} habe nun die Form $\mathcal{S} = \{-d, \dots, d\}$ mit einem $d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, sodass $d \mid N$. In diesem Fall sind zwei $x, y \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ im Cayley-Graph $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathcal{S})$ genau dann durch eine Kante verbunden, wenn $|x - y| \leq d$ gilt. Anders ausgedrückt existiert die Kante $\{x, y\}$ genau dann, wenn es im Graph C_N einen Pfad von x nach y gibt, der höchstens d Kanten benutzt. Die folgende Definition dient daher einer übersichtlicheren Notation.

Definition 5.2.1. (Potenz)

Sei $H = (V, E)$ ein Graph und sei $d \in \mathbb{N}$. Die d -te Potenz von H ist ein Graph $H^d = (V, E')$, in dem zwei Knoten $u, v \in V$ genau dann adjazent sind, wenn es in H einen $\{u, v\}$ -Pfad mit höchstens d Kanten gibt.

Somit hat der Cayley-Graph die Form $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathcal{S}) = C_N^d$. Wie in Abschnitt 5.1. ist nun eine Triangulierung des Cayley-Graphen mit möglichst kleinem Fourier-Support gesucht. Um zeigen zu können, dass sich diese gesuchte Triangulierung auf die Triangulierung in Abschnitt 5.1. zurückführen lässt, wird folgende Definition benötigt.

Definition 5.2.2. (starkes Produkt)

Seien $H = (V, E)$ und $H' = (V', E')$ zwei Graphen. Das starke Produkt $H \boxtimes H'$ von H und H' ist ein Graph mit Knotenmenge $V \times V'$, in dem zwei Knoten $(u, u'), (v, v') \in V \times V'$ genau dann durch eine Kante verbunden sind, falls mindestens eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

- (1) $u = v$ und $\{u', v'\} \in E'$.
- (2) $u' = v'$ und $\{u, v\} \in E$.
- (3) $\{u, v\} \in E$ und $\{u', v'\} \in E'$.

Im Folgenden ist das starke Produkt eines Graphen $H = (V, E)$ mit einem vollständigen Graphen $K_m = (V', V' \times V')$ besonders interessant. In diesem Fall sind zwei Knoten $(u, u'), (v, v') \in V \times V'$ in $H \boxtimes K_m$ genau dann adjazent, wenn $u = v$ oder $\{u, v\} \in E$, denn in K_m sind zwei beliebige Knoten entweder identisch oder durch eine Kante verbunden.

Lemma 5.2.3.

Seien $N, d \in \mathbb{N}$, sodass $d \mid N$. Dann ist C_N^d ein Teilgraph von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ auf derselben Knotenmenge.

Beweis:

Um von einem Teilgraphen reden zu können ist es nötig, die Knoten von C_N^d mit den Knoten von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ zu identifizieren. Die Knoten von C_N^d liegen in der Form $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, \dots, N - 1\}$ vor, wohingegen die Knoten von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ als $\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z} \times \{0, \dots, d - 1\}$ vorliegen. Definiere nun die Abbildung ϕ durch:

$$\phi: \mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z} \times \{0, \dots, d - 1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, (q, r) \mapsto qd + r.$$

Wenn man $\mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z} = \{0, \dots, \frac{N}{d} - 1\}$ auffasst, dann wird schnell klar, dass ϕ jedem Knoten von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ eindeutig einen Knoten von C_N^d zuordnet.

Seien nun $i, i' \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ in C_N^d miteinander verbunden. Dann gilt $|i - i'| \leq d$. Seien $(q, r), (q', r')$ die zwei Knoten von $C_{N/d} \boxtimes K_d$, für die $i = \phi(q, r)$ und $i' = \phi(q', r')$ gilt. Dann folgt:

$$d \geq |i - i'| = |qd + r - q'd - r'| = |(q - q')d + (r - r')|.$$

Da $r - r' \geq 0 - (d - 1)$ ist und wegen der Ganzzahligkeit von q, q' folgt einerseits:

$$\begin{aligned} d &\geq (q - q')d + (r - r') \geq (q - q')d - d + 1 \\ \implies 2d - 1 &\geq (q - q')d \\ \implies 2 - \frac{1}{d} &\geq q - q' \implies 1 \geq q - q'. \end{aligned}$$

Andererseits folgt mit $r - r' \leq (d - 1) - 0$:

$$\begin{aligned} -d &\leq (q - q')d + (r - r') \leq (q - q')d + d - 1 \\ \implies -2d + 1 &\leq (q - q')d \\ \implies -2 + \frac{1}{d} &\leq q - q' \implies -1 \leq q - q'. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $|q - q'| \leq 1$. Somit sind die Knoten q, q' in $C_{N/d}$ adjazent. Daraus folgt, dass die Knoten $(q, r), (q', r')$ in $C_{N/d} \boxtimes K_d$ ebenfalls adjazent sind, was zu zeigen war. \square

Es stellt sich nun die Frage, ob das starke Produkt mit einem vollständigen Graphen die chordale Eigenschaft eines Graphen erhält. Wenn diese Frage mit Ja beantwortet werden kann, dann folgt mit Lemma 5.2.3. aus der Existenz einer chordalen Hülle von $C_{N/d}$ auch die Existenz einer chordalen Hülle von C_N^d . Tatsächlich beantwortet das folgende Lemma die Frage mit Ja.

Lemma 5.2.4.

Sei $H = (V, E)$ ein Graph und $d \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

- (1) Ist $H' = (V, E')$ ein Teilgraph von H , dann ist $H' \boxtimes K_d$ ein Teilgraph von $H \boxtimes K_d$.
- (2) Ist H chordal, dann ist auch $H \boxtimes K_d$ chordal.
- (3) Alle maximalen Cliques von $H \boxtimes K_d$ haben die Form $\mathcal{C} \times V(K_d)$, wobei \mathcal{C} eine maximale Clique von H ist.

Beweis:

Zu (1):

Seien (u, v) und (u', v') in $H' \boxtimes K_d$ adjazent. Dann gilt entweder $u = u'$ oder $\{u, u'\} \in E'$. Da H' ein Teilgraph von H ist, ist entweder $u = u'$

oder $\{u, u'\} \in E$. Das heißt, dass (u, v) und (u', v') auch in $H \boxtimes K_d$ adjazent sind.

Zu (2):

Sei H chordal und sei $(u_1, v_1), \dots, (u_{l+1}, v_{l+1}) = (u_1, v_1)$ ein Kreis in $H \boxtimes K_d$ der Länge $l \geq 4$. Nach der Definition des starken Produktes gilt entweder $u_i = u_{i+1}$ oder $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$. Wenn es ein $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt mit $u_i = u_{i+1}$, dann folgt somit entweder $u_i = u_{i+2}$ oder $\{u_i, u_{i+2}\} \in E$. Das bedeutet, dass (u_i, v_i) und (u_{i+2}, v_{i+2}) in $H \boxtimes K_d$ durch eine Kante verbunden sind. Somit hat der Kreis $(u_1, v_1), \dots, (u_{l+1}, v_{l+1})$ eine Sehne.

Wenn es kein $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt mit $u_i = u_{i+1}$, dann folgt, dass $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ gilt. Somit ist u_1, \dots, u_l ein Kreis in H der Länge $l \geq 4$. Da H chordal ist, gibt es somit eine Sehne $\{u_i, u_j\}$ in diesem Kreis. Daraus folgt, dass (u_i, v_i) und (u_j, v_j) in $H \boxtimes K_d$ durch eine Kante verbunden sind. Somit liegt auch in diesem Fall eine Sehne im Kreis $(u_1, v_1), \dots, (u_{l+1}, v_{l+1})$ vor. Per Definition ist $H \boxtimes K_d$ somit chordal.

Zu (3):

Sei $k \leq d|V|$ und sei $\mathcal{C}' = \{(u_i, v_i) : i = 1, \dots, k\}$ eine maximale Clique in $H \boxtimes K_d$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ entweder $u_i = u_j$ oder $\{u_i, u_j\} \in E$. Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt außerdem, dass $\{u_i\} \times V(K_d) \subseteq \mathcal{C}'$ ist. Anderenfalls gäbe es ein $v \in V(K_d)$, sodass $(u_i, v) \notin \mathcal{C}'$. Da aber stets entweder $u_i = u_j$ oder $\{u_i, u_j\} \in E$ gilt, wäre $\mathcal{C}' \cup \{(u_i, v)\}$ eine Clique. Dies widerspräche der Maximalität von \mathcal{C}' . Somit gilt $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times V(K_d)$ mit $\mathcal{C} = \{u_1, \dots, u_k\}$. Beachte, dass \mathcal{C} keine Multimenge ist, sondern doppelt vorkommende Elemente nur einfach gezählt werden. Somit sind je zwei Knoten aus \mathcal{C} in H durch eine Kante verbunden. Das bedeutet \mathcal{C} ist eine Clique in H . Wegen der Maximalität von \mathcal{C}' gibt es außerdem keinen weiteren Knoten $u \in V(H)$, der zu allen Knoten aus \mathcal{C} adjazent ist. Somit ist die Clique \mathcal{C} ebenfalls maximal. □

Aus den letzten beiden Lemmata kann nun gefolgert werden, dass sich die Triangulierung von C_N^d auf die Triangulierung von $C_{N/d}$ zurückführen lässt. Der Folgende Satz trifft darüber hinaus eine Aussage, wie sich dabei der Fourier-Support überträgt.

Theorem 5.2.5.

Seien $N, d \in \mathbb{N}$, sodass $d \mid N$. Hat $C_{N/d}$ eine chordale Überdeckung, der gemäß Lemma 5.6. einen Fourier-Support $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}$ liefert, dann hat C_N^d eine chordale Überdeckung, der gemäß Lemma 5.6. den folgenden Fourier-Support liefert:

$$\mathcal{T}' = \{dk + r : k \in \mathcal{T}, r \in \{0, \dots, d-1\}\}.$$

Insbesondere ist $|\mathcal{T}'| \leq d|\mathcal{T}|$.

Beweis:

Sei Δ eine chordale Überdeckung von $C_{N/d}$ und \mathcal{T} ein Fourier-Support von \mathcal{S} . Das heißt, für jede maximale Clique \mathcal{C} von $C_{N/d}$ gibt es ein $k_{\mathcal{C}} \in \mathbb{Z}/\frac{N}{d}\mathbb{Z}$ mit $k_{\mathcal{C}} + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$.

Nach Lemma 5.2.3. ist C_N^d ein Teilgraph von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ auf denselben Knoten. Da $C_{N/d}$ ein Teilgraph von Δ ist, folgt nach Lemma 5.2.4. (1), dass C_N^d ebenfalls ein Teilgraph von $\Delta \boxtimes K_d$ auf denselben Knoten ist. Da Δ chordal ist, ist nach Lemma 5.2.4. (2) $\Delta \boxtimes K_d$ ebenfalls chordal. Insgesamt ist $\Delta \boxtimes K_d$ also eine chordale Überdeckung von C_N^d .

Sei \mathcal{C}' nun eine maximale Clique von $\Delta \boxtimes K_d$. Nach Lemma 5.2.4. (3) gibt es eine maximale Clique \mathcal{C} von Δ , sodass $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times V(K_d)$. Identifiziert man die Knoten von C_N^d mit den Knoten von $C_{N/d} \boxtimes K_d$ so wie im Beweis von Lemma 5.2.3., so erhält man:

$$\mathcal{C}' = \{qd + r : q \in \mathcal{C}, r \in \{0, \dots, d-1\}\}.$$

Setzt man nun $k_{\mathcal{C}'} = dk_{\mathcal{C}} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, so folgt:

$$\begin{aligned} k_{\mathcal{C}'} + \mathcal{C}' &= \{dk_{\mathcal{C}} + qd + r : q \in \mathcal{C}, r \in \{0, \dots, d-1\}\} \\ &= \{(k_{\mathcal{C}} + q)d + r : q \in \mathcal{C}, r \in \{0, \dots, d-1\}\} \subseteq \mathcal{T}'. \end{aligned}$$

Die Inklusion am Ende der Gleichungskette gilt, weil für jedes $q \in \mathcal{C}$ gilt, dass $k_{\mathcal{C}} + q \in \mathcal{T}$ ist. Somit ist gezeigt, dass es für jede maximale Clique \mathcal{C}' von $\Delta \boxtimes K_d$ ein $k_{\mathcal{C}'}$ gibt, sodass $k_{\mathcal{C}'} + \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{T}'$. \mathcal{T}' ist somit per Definition Fourier-Support von \mathcal{S} . □

Kombiniert man Theorem 5.2.5., Theorem 5.1.2. und Theorem 3.7., so erhält man einen PSD-Lift für Charakterpolytope der Form $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$.

Korollar 5.2.6.

Seien $N, d \in \mathbb{N}$, sodass $d \mid N$. Dann hat $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$ einen PSD-Lift mit Größe $\leq 3d \log_2(\frac{N}{d})$.

Beweis:

Wie bereits festgestellt gilt $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\}) = C_N^d$. Nach Theorem 5.1.2. und den anschließenden Bemerkungen am Ende von Abschnitt 5.1. hat $C_{N/d}$ eine chordale Überdeckung, die einen Fourier-Support \mathcal{T} mit $|\mathcal{T}| \leq 3 \log_2(\frac{N}{d})$ liefert. Nach Theorem 5.2.5. folgt also,

dass $\text{Cay}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$ eine chordale Überdeckung hat, die wiederum einen Fourier-Support \mathcal{T}' mit $|\mathcal{T}'| \leq d|\mathcal{T}| \leq 3d \log_2(\frac{N}{d})$ liefert. Schließlich folgt aus Theorem 3.7., dass $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$ einen PSD-Lift mit Größe $\leq 3d \log_2(\frac{N}{d})$ hat. \square

Wie sich herausstellt liefert Korollar 5.2.6. nicht nur einen PSD-Lift für gewisse Charakterpolytope, sondern auch für das zyklische Polytop. Genauer gesagt handelt es sich dabei um äquivalente Polytope. Um dies zu zeigen, wird das Charakterpolytop wie in 3.8. beschrieben in das reelle Charakterpolytop umgeformt. Speziell im Fall $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und $\mathcal{S} = \{-d, \dots, d\}$ hat ein Charakter $\chi_a \in \mathcal{S}$ die Form

$$\chi_a(x) = e^{\frac{2i\pi ax}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi ax}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi ax}{N}\right), \quad a \in \{-d, \dots, d\}.$$

Somit folgt nach geeigneter Sortierung der Elemente von \mathcal{S} :

$$\mathcal{P}^{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\}) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\pi x/N) \\ \sin(2\pi x/N) \\ \vdots \\ \cos(2\pi dx/N) \\ \sin(2\pi dx/N) \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \right\}.$$

Da jedes Element aus diesem reellen Charakterpolytop eine 1 in der ersten Komponente hat, kann diese Komponente ignoriert werden. Dies entspricht einer Projektion nach \mathbb{R}^{2d} , die die Struktur des Polytopes erhält.

Dieses reelle Charakterpolytop wird auch das trigonometrische zyklische Polytop genannt und mit $TC(N, 2d)$ abgekürzt. Bislang liefert Korollar 5.2.6., dass dieses einen PSD-Lift der Größe $\leq 3d \log_2(\frac{N}{d})$ hat, sofern $d \mid N$ gilt. Im Folgenden wird nun gezeigt, dass $TC(N, 2d)$ dieselbe Seitenstruktur wie das zyklische Polytop

$$C(N, 2d) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^2 \\ \vdots \\ t_i^{2d} \end{pmatrix} : t_1 < \dots < t_N \in \mathbb{R} \right\}$$

hat. Auch wenn das zyklische Polytop augenscheinlich von der Wahl der Parameter t_1, \dots, t_N abhängt, sind doch alle zyklischen Polytope mit gleicher Dimension und gleicher Anzahl an Ecken kombinatorisch äquivalent [13]. Aus einer kombinatorischen Äquivalenz zwischen $TC(N, 2d)$ und $C(N, 2d)$ würde also ein PSD-Lift für $C(N, 2d)$ folgen.

Theorem 5.2.7.

Seien $N, d \in \mathbb{N}$, sodass $d \mid N$. Dann hat $C(N, 2d)$ einen PSD-Lift mit Größe $\leq 3d \log_2(\frac{N}{d})$.

Beweis:

Sei $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ die Momentenkurve in \mathbb{R}^{2d} . Das heißt, y ist gegeben durch:

$$y(t) = (t \quad t^2 \quad \dots \quad t^{2d})^T,$$

also sind $y(t_1), \dots, y(t_N)$ die Ecken von $C(N, 2d)$ mit $t_1 < \dots < t_N$. Sei $T := \{t_1, \dots, t_N\}$ und $T' \subseteq T$ mit $|T'| = 2d$. Die Gale evenness condition besagt, dass $\text{conv}\{y(t) : t \in T'\}$ genau dann eine Facette von $C(N, 2d)$ ist, wenn für je zwei Elemente $s < s' \in T \setminus T'$ die Menge $\{t \in T' : s < t < s'\}$ gerade viele Elemente enthält (siehe [13]). Kodiert man die Seiten von $C(N, 2d)$ durch die enthaltenen Ecken, so sind durch die Gale evenness condition alle Facetten von $C(N, 2d)$ bekannt. Insbesondere sind auch die Schnitte mehrerer Facetten und somit alle Seiten von $C(N, 2d)$ bekannt. Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass die Gale evenness condition auch für $TC(N, 2d)$ gilt. Nach der Definition von $TC(N, 2d)$ können die Ecken von $TC(N, 2d)$ durch $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{1, \dots, N\}$ kodiert werden. Dies erlaubt eine Bijektion ϕ zwischen den Knoten von $C(N, 2d)$ und $TC(N, 2d)$ mittel $\phi(t_i) = i$. Bemerke, dass sowohl $t_1 < \dots < t_N$ als auch $1 < \dots < N$ ist. Somit folgt aus der Gale evenness condition für $TC(N, 2d)$, dass $C(N, 2d)$ und $TC(N, 2d)$ dieselbe Seitenstruktur haben.

Der einzige Unterschied zum Beweis der Gale evenness condition für $C(N, 2d)$ besteht darin, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y(t_1) & y(t_2) & \dots & y(t_{2d+1}) \end{pmatrix}$$

eine Vandermonde-Matrix ist und die zugehörige Determinante somit genau dann verschwindet, wenn es zwei verschiedene Indizes $i, j \in \{1, \dots, 2d\}$ gibt, sodass $t_i = t_j$ gilt. Dieselbe Aussage erhält man jedoch für $TC(N, 2d)$, wenn man die folgende Gleichung aus [9] benutzt:

$$(8) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \dots & \cos(\theta_{2d+1}) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & \dots & \sin(\theta_{2d+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(d\theta_1) & \cos(d\theta_2) & \dots & \cos(d\theta_{2d+1}) \\ \sin(d\theta_1) & \sin(d\theta_2) & \dots & \sin(d\theta_{2d+1}) \end{pmatrix} \\ = 4^{d^2} \prod_{1 \leq i < j \leq 2d+1} \sin\left(\frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i)\right).$$

Da die Ecken von $TC(N, 2d)$ betrachtet werden, ist $\theta_i = 2\pi x_i/N$ für $i = 1, \dots, 2d + 1$, wobei die $x_i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sind. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
(8) = 0 &\iff \exists 1 \leq i < j \leq 2d + 1: \sin\left(\frac{1}{2}(\theta_j - \theta_i)\right) = 0 \\
&\iff \exists 1 \leq i < j \leq 2d + 1: \sin\left(\frac{\pi x_j}{N} - \frac{\pi x_i}{N}\right) = 0 \\
&\stackrel{x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}{\iff} \exists 1 \leq i < j \leq 2d + 1: \frac{\pi x_j}{N} = \frac{\pi x_i}{N} \\
&\iff \exists 1 \leq i < j \leq 2d + 1: x_j = x_i.
\end{aligned}$$

Man erhält also die Aussage, dass je $2d + 1$ verschiedene Ecken von $TC(N, 2d)$ affin unabhängig sind (man sagt auch $TC(N, 2d)$ ist simplizial). Von hier an ist der übrige Beweis identisch zu dem Beweis der Gale evenness condition für $C(N, 2d)$, siehe dazu [13]. In [1] ist diese Argumentation speziell für $TC(N, 2d)$ ausgeführt. □

Somit liefert Theorem 5.2.7 schließlich eine obere Schranke für die semidefinite Erweiterungskomplexität des zyklischen Polytops:

$$x_{\text{CPSD}}(C(N, d)) \leq 3\frac{d}{2} \log_2\left(\frac{2N}{d}\right),$$

falls d gerade und $\frac{d}{2} \mid N$.

5.3. Lineare Lifts für $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Nun kann man das zyklische Polytop auch unter dem Gesichtspunkt der linearen Erweiterungskomplexität betrachten. Wie bereits im 4. Kapitel gesehen genügt es zu zeigen, dass das zyklische Polytop nachbarschaftlich ist, um eine untere Schranke an die lineare Erweiterungskomplexität zu finden.

Lemma 5.3.1.

$C(N, 2d)$ ist nachbarschaftlich.

Beweis:

Um dieses Lemma zu zeigen ist zu beweisen, dass jeweils d -viele Ecken von $C(N, 2d)$ in einer gemeinsamen Stützhyperebene liegen. Da bereits im Beweis von Theorem 5.2.7. gezeigt wurde, dass $C(N, 2d)$ und $TC(N, 2d)$ die gleiche Seitenstruktur haben, wird dies nun für $TC(N, 2d)$ gezeigt. Definiere dazu eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ durch:

$$\varphi(t) = (\cos(t) \quad \sin(t) \quad \cdots \quad \cos(dt) \quad \sin(dt)).$$

Per Definition liegen alle Ecken von $TC(N, 2d)$ auf der Kurve φ . Für $t_1, \dots, t_d \in [0, 2\pi)$ sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion gegeben durch:

$$p(t) = \prod_{j=1}^d (1 - \cos(t - t_j)) = \sum_{I \subseteq \{t_1, \dots, t_d\}} (-1)^{|I|} \prod_{j \in I} \cos(t - t_j).$$

Weil der Kosinus durch 1 beschränkt ist, gilt $p(t) \geq 0$. Die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $t \in \{t_1, \dots, t_d\}$ ist. Außerdem gilt für das Produkt zweier solcher Kosinusterme:

$$\cos(t - t_i) \cos(t - t_j) = \frac{1}{2} \cos(t_j - t_i) + \frac{1}{2} \cos(2t - t_j - t_i).$$

Man bemerke hierbei, dass $\cos(t_j - t_i)$ konstant ist. Etwas allgemeiner gilt also für Konstanten $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$:

$$\cos(kt - \alpha) \cos(t - \beta) = \frac{1}{2} \cos(\beta - \alpha) + \frac{1}{2} \cos((k+1)t - \alpha - \beta).$$

Durch sukzessives Anwenden dieser Formel lässt sich p nun in die folgende Form bringen:

$$p(t) = \alpha + \sum_{j=1}^d \alpha_j \cos(jt + \beta_j).$$

mit geeigneten Konstanten $\alpha, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, d$. Weiter gilt nun:

$$\cos(jt + \beta_j) = \cos(jt) \cos(\beta_j) - \sin(jt) \sin(\beta_j).$$

Es folgt somit erneut mit geeigneten reellen Konstanten:

$$p(t) = \alpha + \sum_{j=1}^d \alpha'_j \cos(jt) + \beta'_j \sin(jt).$$

Die gesuchte Hyperebene hat daher die Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{2d} : (\alpha'_1 \ \beta'_1 \ \cdots \ \alpha'_d \ \beta'_d) \cdot x = -\alpha\},$$

denn da jede Ecke von $TC(N, 2d)$ auf der Kurve φ liegt und somit die Form $\varphi(t)$, $t \in [0, 2\pi)$ hat, gilt:

$$(\alpha'_1 \ \beta'_1 \ \cdots \ \alpha'_d \ \beta'_d) \cdot \varphi(t) = p(t) - \alpha \geq -\alpha,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $t \in \{t_1, \dots, t_d\}$. Somit definieren die d beliebig gewählten Ecken t_1, \dots, t_d eine Seite von $TC(N, 2d)$ und es folgt die Behauptung. □

Die Nachbarschaftlichkeit von $C(N, 2d)$ liefert zusammen mit Theorem 4.17. eine untere Schranke für die Größe linearer Lifts des zyklischen Polytops:

$$x_{\text{CLP}}(C(N, 2d)) = \Omega \left(\min \left\{ N, \frac{(d+1)(d+2)}{2} \right\} \right).$$

6. BETRACHTUNG DER DIEDERGRUPPE D_{2n}

Nachdem im letzten Kapitel die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ausführlich untersucht wurden, sind nun Charakterpolytope von nicht-abelschen Gruppen von Interesse. Hierzu ist es sinnvoll zunächst eine Gruppe zu betrachten, die ein gewisses Maß an Kommutativität aufweist. Was genau damit gemeint ist wird klar, wenn man sich die Diedergruppe D_{2n} ansieht. Es handelt sich hierbei um eine Gruppe der Ordnung $2n$, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Die Gruppenelemente lassen sich mit Drehungen und Spiegelungen eines regulären n -Ecks identifizieren. Es genügt bereits eine Drehung a , sowie eine Spiegelung x festzulegen. Dann sind die n Drehungen gegeben durch $a, a^2, a^3, \dots, a^n = e$. Dabei ist e das neutrale Element. Ebenso liegen alle Spiegelungen vor durch $ax, a^2x, a^3x, \dots, a^nx = x$. Formal kann man dies wie folgt notieren:

$$D_{2n} = \langle a, x \mid a^n = x^2 = e, xax^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Die Diedergruppe weist in dem Sinne eine gewisse Kommutativität auf, dass je zwei Drehelemente a^i und a^j miteinander kommutieren, denn $a^i a^j = a^{i+j} = a^j a^i$. Für Verknüpfungen zweier Spiegelungen oder Verknüpfungen von Drehungen mit Spiegelungen gilt dies im Allgemeinen nicht. Um Diedergruppen auf Charaktere und Konjugationsklassen zu untersuchen, ist eine Fallunterscheidung nach der Parität von n nötig.

6.1. Der Fall n ungerade.

Für ungerade n weist D_{2n} $(n+3)/2$ Konjugationsklassen auf. Zunächst bildet das neutrale Element e alleine eine Konjugationsklasse. Weitere $(n-1)/2$ Konjugationsklassen haben die Form $\{a^i, a^{n-i}\}$. Übrig bleiben sämtliche Spiegelungen, die zusammen ebenfalls eine Konjugationsklasse bilden, $\{x, ax, a^2x, \dots, a^{n-1}x\}$.

D_{2n} besitzt zwei eindimensionale irreduzible Darstellungen. Diese sind somit gleichzeitig Charaktere der Diedergruppe. Bei dem ersten handelt es sich um den trivialen Charakter χ_0 , der alle Gruppenelemente auf 1 abbildet. Der zweite Charakter χ_1 bildet alle Drehungen auf 1 und alle Spiegelungen auf -1 ab:

$$\chi_1(a^j) = 1 \quad \text{und} \quad \chi_1(a^j x) = -1, \quad \text{für } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Alle weiteren irreduziblen Darstellungen sind zweidimensional. Die zugehörigen Charaktere haben für $k = 1, \dots, (n-1)/2$ die folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{k+1}(a^j) &= 2 \cos(2\pi k j / n) \\ \chi_{k+1}(a^j x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{für } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Die Charaktere und Darstellungen von D_{2n} , sowohl für ungerade als auch gerade n , sind in [8] aufgelistet und sind leicht zu verifizieren. Hiermit lässt sich nun das Charakterpolytop aufstellen. Ähnlich wie bei der Betrachtung zyklischer Gruppen werden hier hauptsächlich Teilmengen \mathcal{S} der Form $\mathcal{S} = \{a^{-d}, \dots, a^d\}$ oder $\mathcal{S} = \{a^{-d}, \dots, a^d, x\}$ mit $d \in [\frac{n-1}{2}]$ betrachtet. Da das Element x als Spiegelung selbstinvers ist, ist \mathcal{S} unter Inversenbildung abgeschlossen. Da inverse Paare jedoch Konjugationsklassen bilden und man nur an solchen \mathcal{S} interessiert ist, die je Konjugationsklasse nur ein Element enthalten, wird im Folgenden $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d\}$ oder $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$ gewählt. Das neutrale Element $e = a^0$ wird nicht betrachtet, da die entsprechende Komponente wie bei der Betrachtung von $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ stets gleich Eins ist. Durch das Entfernen dieser Komponente wird das Charakterpolytop in einen Raum mit kleinerer Dimension projiziert ohne die Seitenstruktur zu ändern. Das Polytop $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^1, \dots, a^d, x\})$ ist die konvexe Hülle der folgenden Punkte:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \cos(\frac{2\pi k \cdot 1}{n}) \\ \vdots \\ \cos(\frac{2\pi k \cdot d}{n}) \\ 0 \end{array} \right), \quad k \in \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Möchte man das Element x aus \mathcal{S} entfernen, so ist nur die letzte Komponente der Ecken zu streichen. Um nun die Theorie aus dem 3. Kapitel anwenden zu können, muss nach einem entsprechenden Fourier-Support gesucht werden. Für den Fall, dass \mathcal{S} das Element x nicht enthält, ist das vorherige Kapitel hilfreich.

Theorem 6.1.1.

Sei n ungerade und $\mathcal{S} = \{a^i : i \in [d]\}$ für ein $d \mid n$. Dann hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ einen PSD-Lift der Größe $\leq 3d \log_2(\frac{n}{d})$.

Beweis:

Man betrachte zunächst die Matrix Y , die in Definition 3.6. angegeben wird. Diese hat folgende Form:

$$Y = \begin{pmatrix} A & \star \\ \star & A \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Einträge, die mit \star gekennzeichnet sind, unbekannt. Die Zeilen und Spalten von A werden mit $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ indiziert. Die Hauptdiagonalelemente von A sind 1 und zudem sind nur solche Einträge A_{a^i, a^j} bekannt, für die $a^{-i}a^j \in \mathcal{S}$ oder $a^i a^{-j} \in \mathcal{S}$ gilt. Die Elemente, die A indizieren, bilden eine Gruppe, nämlich die Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Folglich kann \mathcal{T} erneut so gewählt werden, wie im letzten Kapitel (Theorem 5.1.2. und Theorem 5.2.5.) beschrieben. Da \mathcal{T} ein Fourier-Support bezüglich $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathcal{S} = \{-d, \dots, d\}$ ist, folgt aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$, dass sich die folgende Matrix $X \in (\mathbb{C} \cup \{\star\})^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigen lässt.

$$X_{y,z} = \begin{cases} 1, & \text{falls } y = z. \\ k_{y^{-1}z}, & \text{falls } y^{-1}z \in \mathcal{S}. \\ \star, & \text{anderenfalls.} \end{cases}$$

Die Bedingung $X_{y,z} = k_r$, falls $r \in \mathcal{S}$ und $y^{-1}z$ in der gleichen Konjugationsklasse liegen, wurde hier ersetzt durch $X_{y,z} = k_{y^{-1}z}$, falls $y^{-1}z \in \mathcal{S}$, da jede Konjugationsklasse von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nur ein Element enthält. Diese Matrix X stimmt mit der Matrix A überein. Somit lässt sich A zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigen. Füllt man den oberen rechten und den unteren linken Block von Y mit Nullen auf, dann wird auch Y positiv semidefinit vervollständigt. Es folgt, dass \mathcal{T} ein Fourier-Support bezüglich D_{2n} und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d\}$ ist. Mit 3.7. folgt die Behauptung. □

Nun zu dem gegenteiligen Fall, dass \mathcal{S} keine Drehungen, sondern ausschließlich Spiegelungen enthält. Da alle Spiegelungen eine Konjugationsklasse bilden und es genügt, wenn \mathcal{S} höchstens ein Element je Konjugationsklasse enthält, reicht es den Fall $\mathcal{S} = \{x\}$ zu betrachten.

Theorem 6.1.2.

Sei n ungerade und $\mathcal{S} = \{x\}$. Dann hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ einen PSD-Lift der Größe 2.

Beweis:

Die Matrix Y , die zu vervollständigen ist, hat nun die folgende Form:

$$Y = \begin{pmatrix} A & k_x J \\ \overline{k_x} J & A \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $k_x \in \mathbb{C}$ bekannt, J ist die $(n \times n)$ -Einsmatrix und A ist eine $(n \times n)$ -Matrix, deren Hauptdiagonalelemente 1 und deren weitere Elemente unbekannt sind. Man wähle $\mathcal{T} = \{e, x\}$. Dann ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}$. Wenn nun aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$ folgt, dass Y positiv semidefinit vervollständigt werden kann, dann ist die Behauptung mittels Theorem 3.7. bewiesen. Der Schlüssel dazu ist die folgende Gleichung:

$$M_{\mathcal{T}}(k) \otimes J = \begin{pmatrix} 1 & k_x \\ \overline{k_x} & 1 \end{pmatrix} \otimes J = \begin{pmatrix} J & k_x J \\ \overline{k_x} J & J \end{pmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite dieser Gleichung ist eine Vervollständigung von Y , wobei alle unbekannt Einträge von Y zu 1 gesetzt werden. Bekanntermaßen ist J positiv semidefinit. Weiter ist das Kroneckerprodukt zweier semidefiniter Matrizen wieder positiv semidefinit. Aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$ folgt also, dass Y positiv semidefinit vervollständigt werden kann, was zu beweisen war. □

Es ist zu bemerken, dass in dem zuletzt betrachteten Fall die Bedingung $M_{\mathcal{T}} \succeq 0$ äquivalent dazu ist, dass $|k_x| \leq 1$ gilt. Man erhält somit also auch einen linearen Lift für das Charakterpolytop. Es überrascht nicht, dass dieser Lift eine kleine, konstante Größe hat, denn man betrachtet eine Teilmenge \mathcal{S} , deren Elemente in nur einer Konjugationsklasse liegen.

Nach der Betrachtung von semidefiniten Lifts ist nun auch interessant, welche Aussagen über lineare Lifts von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ getroffen werden können. Hierzu wird wie zuvor zunächst der Fall betrachtet, dass \mathcal{S} das Element x nicht enthält.

Theorem 6.1.3. *Sei n ungerade und $\mathcal{S} = \{a^i : i \in [d]\}$. Dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nachbarschaftlich.*

Beweis:

Der Ansatz dieses Beweises entspricht im Wesentlichen dem von Lemma 5.3.1. Sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben durch:

$$\varphi(t) = (\cos(t) \quad \cos(2t) \quad \cdots \quad \cos(dt)).$$

Man beachte, dass alle Ecken von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ die Form $\varphi(t)$ mit

$$t \in \left\{ \frac{2\pi k}{n} : 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \right\}$$

haben. Insbesondere gilt $t \in [0, \pi)$:

$$t = \frac{2\pi k}{n} \leq \frac{2\pi \frac{n-1}{2}}{n} = \pi - \frac{\pi}{n} < \pi.$$

Man wähle nun $m := \lfloor d/2 \rfloor$ viele Ecken $\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_m)$ von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$, also $t_1, \dots, t_m \in [0, \pi)$. Zu zeigen ist, dass es eine Stützhyperebene H gibt, die diese und keine weiteren Ecken enthält. Dazu sei $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, gegeben durch:

$$p(t) = \prod_{j=1}^m (1 - \cos(t - t_j))(1 - \cos(t + t_j)).$$

Auf dem Intervall $[0, \pi)$ sind t_1, \dots, t_m alle Nullstellen von p und da der Kosinus durch Eins beschränkt ist, ist p eine nichtnegative Funktion. Durch Anwendung derselben Produkt- und Summenformeln wie im Beweis von Lemma 5.3.1. erhält man für geeignete Konstanten $\alpha, \alpha_j, \beta_j$:

$$(9) \quad p(t) = \alpha + \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j \cos(jt) + \beta_j \sin(jt).$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Summe hier $2m$ statt nur m Summenglieder hat, da die Definition von p als Produkt nun auch $2m$ statt nur m Faktoren hat.

Als nächstes ist auffällig, dass p eine symmetrische Funktion ist, denn für alle $j \in [m]$ und alle $t \in \mathbb{R}$ folgt aus der Symmetrie des Kosinus:

$$(1 - \cos(-t - t_j))(1 - \cos(-t + t_j)) = (1 - \cos(t + t_j))(1 - \cos(t - t_j)).$$

Das heißt, dass p die Gleichung $p(t) = (p(t) + p(-t))/2$ erfüllt. Unter Verwendung der Darstellung (9) von p ergibt sich:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2\alpha + \sum_{j=1}^{2m} 2\alpha_j \cos(jt) + \beta_j \sin(jt) - \beta_j \sin(jt)}{2} \\ &= \alpha + \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j \cos(jt). \end{aligned}$$

Man findet somit die Hyperebene:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{2m} : (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{2m}) \cdot x = -\alpha\},$$

mit der Eigenschaft, dass alle Punkte auf der Kurve $\varphi|_{[0, 2\pi)}$ zusammen in einem Halbraum enthalten sind und exakt m dieser Punkte in H enthalten sind. Damit definieren jeweils m Ecken von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ eine Seite.

□

Das folgende Korollar gibt eine untere Schranke an lineare Lifts von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ für den Fall, dass \mathcal{S} das Element x nicht enthält. Es folgt mit Hilfe von Theorem 6.1.3. und Theorem 4.17. unmittelbar.

Korollar 6.1.4. *Sei n ungerade und $\mathcal{S} = \{a^i : i \in [d]\}$. Es gilt:*

$$\chi_{\text{CLP}}(\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+1}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

Die Aussage verwendet die Tatsache, dass das Charakterpolytop hier $\frac{n+1}{2}$ Ecken hat. Im Allgemeinen hat das Charakterpolytop noch eine weitere Ecke, aber da man sich hier auf ein \mathcal{S} beschränkt, dass nur Dreielemente enthält, fallen die Ecken zu den Charakteren χ_0 und χ_1 zusammen. Da sowohl das Charakterpolytop in diesem Fall, als auch das Charakterpolytop für die Gruppe $\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2}\mathbb{Z}$ nachbarschaftlich sind und beide Polytope auch ähnlich definiert sind, lässt sich vermuten, dass es sich dabei um kombinatorisch äquivalente Polytope handelt. Die Software Polymake hat die folgende Vermutung für alle ungeraden $n \leq 51$ und alle geraden $d \leq \frac{n-1}{2}$ bestätigt.

Vermutung 6.1.5. *Seien n ungerade und d gerade. Dann sind $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2}\mathbb{Z}, \{-\frac{d}{2}, \dots, \frac{d}{2}\})$ kombinatorisch äquivalent.*

Ein ähnliche untere Schranke an die lineare Erweiterungskomplexität wie in Korollar 6.1.4. erhält man, wenn man das Spiegelungselement x zu \mathcal{S} hinzufügt, zumindest sofern man gerade d betrachtet.

Theorem 6.1.6. *Sei n ungerade und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$ mit d gerade. Es gilt:*

$$\chi_{\text{CLP}}(\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+3}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

Beweis:

Sei $\mathcal{S}' := \{a^1, \dots, a^d\} = \mathcal{S} \setminus \{x\}$. Dann erhält man $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S}')$, indem man die letzte Koordinate aus $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ entfernt. Nach Theorem 6.1.3. ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S}')$ nachbarschaftlich. Das heißt für je $\lfloor d/2 \rfloor = d/2$ viele Ecken $v'_1, \dots, v'_{d/2}$ gibt es eine Hyperebene $H := \{y \in \mathbb{R}^d : a^T y = \delta\}$, sodass nur die Ecken $v'_1, \dots, v'_{d/2}$ in H enthalten sind und alle weiteren Ecken in einem gemeinsamen Halbraum liegen (o.B.d.A. sei H^- der Halbraum). Letzteres bedeutet, dass $a^T w' < \delta$ für alle Ecken $w' \notin \{v'_1, \dots, v'_{d/2}\}$ gilt. Zudem folgt aus der Nachbarschaftlichkeit von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S}')$ auch die k -Nachbarschaftlichkeit für $k \leq d/2$, denn Schnitte von Seiten sind wieder Seiten. Da je $d/2$ viele Ecken eine Seite kodieren, kodieren auch Schnitte beliebiger $d/2$ -elementiger Teilmengen der

Ecken wieder Seiten. So findet man, dass jede Menge k -vieler Ecken mit $k \leq d/2$ eine Seite kodiert.

Auch nach Hinzufügen einer Dimension ist $\lfloor (d+1)/2 \rfloor = d/2$. Seien $v_1, \dots, v_{d/2} \in \mathbb{R}^{d+1}$ beliebige aber verschiedene Ecken von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$. Für $i \in [d/2]$ sei $v'_i \in \mathbb{R}^d$ die Projektion von v_i auf die ersten d Komponenten.

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass keine der Ecken $v_1, \dots, v_{d/2}$ zu den Charakteren χ_0 oder χ_1 gehört. Wie bereits festgestellt gibt es $a' \in \mathbb{R}^d$ und $\delta \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} a'^T v'_i &= \delta, \quad \forall i \in [d/2], \\ a'^T w' &< \delta, \quad \forall \text{ Ecken } w' \notin \{v'_1, \dots, v'_{d/2}\}. \end{aligned}$$

Setzt man $a = (a' \ 0)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$, so folgt:

$$\begin{aligned} a^T v_i &= a'^T v'_i = \delta, \quad \forall i \in [d/2], \\ a^T w &= a'^T w' < \delta, \quad \forall \text{ Ecken } w \notin \{v_1, \dots, v_{d/2}\}, \end{aligned}$$

wobei auch w' die Projektion von w auf die ersten d Komponenten ist. Somit gibt es eine Stützhyperebene von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$, die genau die Ecken $v_1, \dots, v_{d/2}$ enthält.

Als nächstes betrachte man den Fall, dass sowohl die Ecke zu dem Charakter χ_0 als auch die zu χ_1 unter den Ecken $v_1, \dots, v_{d/2}$ zu finden sind. In diesem Fall fallen zwei der Ecken $v'_1, \dots, v'_{d/2}$ zusammen, denn eingeschränkt auf die ersten d Komponenten sind die Ecken zu χ_0 und χ_1 der Einsvektor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $v_{d/2-1}$ und $v_{d/2}$ die Ecken, die in der Projektion auf die ersten d Komponenten zusammenfallen. Wegen der $(d/2 - 1)$ -Nachbarschaftlichkeit von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S}')$ findet man $a' \in \mathbb{R}^d$ und $\delta \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} a'^T v'_i &= \delta, \quad \forall i \in \left[\frac{d}{2} - 1 \right], \\ a'^T w' &< \delta, \quad \forall \text{ Ecken } w' \notin \left\{ v'_1, \dots, v'_{\frac{d}{2}-1} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man erneut $a = (a' \ 0)^T$, so folgt analog zum vorherigen Fall, dass $v_1, \dots, v_{d/2}$ eine Seite kodieren.

Zuletzt wird der Fall betrachtet, dass sich genau eine der beiden Ecken zu den Charakteren χ_0 und χ_1 unter den Ecken $v_1, \dots, v_{d/2}$ befindet. Angenommen dabei handelt es sich um die Ecke zu χ_0 , also dem Einsvektor. Der andere Fall lässt sich analog behandeln. Sei $v_{d/2}$ diese Ecke. Wie im vorherigen Fall folgt aus der $(d/2-1)$ -Nachbarschaftlichkeit die Existenz eines $a' \in \mathbb{R}^d$ und $\delta \in \mathbb{R}$, sodass:

$$\begin{aligned} a'^T v'_i &= \delta, \quad \forall i \in \left[\frac{d}{2} - 1 \right], \\ a'^T w' &< \delta, \quad \forall \text{ Ecken } w' \notin \left\{ v'_1, \dots, v'_{\frac{d}{2}-1} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $a := \begin{pmatrix} a' & \delta - a'^T v'_{\frac{d}{2}} \end{pmatrix}$, so folgt:

$$\begin{aligned} a^T v_i &= a'^T v'_i = \delta, \quad \forall i \in \left[\frac{d}{2} - 1 \right], \\ a^T v_{\frac{d}{2}} &= a'^T v'_{\frac{d}{2}} + \delta - a'^T v'_{\frac{d}{2}} = \delta, \\ a^T w &= a'^T w' < \delta, \quad \forall \text{ Ecken } w \notin \{v_1, \dots, v_{d/2}\}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, dass $a^T w < \delta$ auch für die Ecke zu dem Charakter χ_1 gilt, bedenke man, dass dann $w' = e = v'_{d/2}$ erfüllt ist. Somit:

$$a^T w = a'^T v'_{\frac{d}{2}} - \delta + a'^T v'_{\frac{d}{2}} < \delta.$$

Die letzte Ungleichung folgt, weil $a'^T w' < \delta$ für alle $w' \notin \{v'_1, \dots, v'_{d/2}\}$ gilt. Erneut kodieren $v_1, \dots, v_{d/2}$ eine Seite. Insgesamt folgt, dass $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nachbarschaftlich ist und die Behauptung folgt unmittelbar aus Theorem 4.17. □

Für ungerade d lässt sich mit diesem Ansatz die Nachbarschaftlichkeit von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachweisen. Daher kann mit diesem Vorgehen auch keine untere Schranke an lineare Lifts ermittelt werden. Eine Ausnahme hierfür ist die Wahl $d = (n - 1)/2$. Dies ist die größtmögliche Wahl von d , denn so gilt bereits $\mathcal{S} = D_{2n}$. In diesem Fall ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ ein Polytop mit Dimension $d + 1 = (n + 1)/2$ und $(n + 3)/2$ Ecken. Das heißt, dass das Charakterpolytop ein Simplex und insbesondere nachbarschaftlich ist. Dies liefert dieselbe Aussage wie in Theorem 6.1.6.

Außerdem kann der Fall $d = 1$ ignoriert werden, denn in diesem Fall ist das Charakterpolytop zweidimensional und somit nachbarschaftlich, da jede Ecke eine Seite ist.

Für alle übrigen ungeraden Wahlen von d besteht dagegen die durch numerische Berechnungen gestützte Vermutung, dass $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich ist. Um dies nachzuweisen sind $\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor = \frac{d+1}{2}$ Ecken zu finden, deren konvexe Hülle keine Seitenfläche bilden. Kandidaten hierfür sind die Ecken zu den Charakteren χ_i mit $i \in \{2, 4, \dots, d + 1\}$. Im Folgenden seien $v_1, \dots, v_{(d+1)/2}$ diese Ecken, also:

$$v_j = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(2j - 1) \cdot 1/n) \\ \cos(2\pi(2j - 1) \cdot 2/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(2j - 1) \cdot d/n) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \left[\frac{d+1}{2} \right].$$

Des Weiteren wähle man die Ecken w_1, \dots, w_{d+2} durch:

$$w_j = \begin{pmatrix} \cos(2\pi j \cdot 1/n) \\ \cos(2\pi j \cdot 2/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi j \cdot d/n) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in [d-1],$$

$$w_d = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(d+1) \cdot 1/n) \\ \cos(2\pi(d+1) \cdot 2/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(d+1) \cdot d/n) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{d+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_{d+2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Ecken gehören also zu den Charakteren $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_d, \chi_{d+2}$. Wie bereits festgestellt, sind hier alle ungeraden Wahlen von d mit $d < \frac{n-1}{2}$ relevant. Somit folgt $d+2 \leq (n+1)/2$ und tatsächlich ist der Charakter $\chi_{(n+1)/2}$ definiert. Numerisch lässt sich feststellen, dass w_1, \dots, w_{d+2} affin unabhängig sind, indem man überprüft, ob

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & \cdots & w_{d+2} \end{pmatrix} \neq 0$$

erfüllt ist. Beispielsweise liefert die Software Matlab für diese Determinante mit $n = 51$ und $d = 21$ den Wert $\approx -11,2519 < 0$. Das heißt, dass $\text{conv}\{w_1, \dots, w_{d+2}\}$ ein Simplex ist. Daher lässt sich das Innere dieser konvexen Hülle wie folgt beschreiben:

$$\text{int}(\text{conv}\{w_1, \dots, w_{d+2}\}) := \left\{ \sum_{j=1}^{d+2} \lambda_j w_j : \sum_{j=1}^{d+2} \lambda_j = 1, \lambda_j > 0, \forall j \right\}.$$

Findet man nun ein Element der konvexen Hülle von $v_1, \dots, v_{(d+1)/2}$, das ebenfalls im Inneren der konvexen Hülle von w_1, \dots, w_{d+2} liegt, so folgt, dass $\text{conv}\{v_1, \dots, v_{(d+1)/2}\}$ auch das Innere des Charakterpolytops schneidet und somit keine Seite sein kann. Daraus folgt insbesondere, dass das Charakterpolytop nicht nachbarschaftlich ist.

Es ist also zu zeigen, dass es Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_{(d+1)/2} \geq 0$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2} \geq 0$, sowie ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass:

$$\sum_{j=1}^{\frac{d+1}{2}} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{d+2} \lambda_j w_j \iff \sum_{j=1}^{\frac{d+1}{2}} \mu_j v_j - \sum_{j=1}^{d+2} \lambda_j w_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{d+1}{2}} \mu_j = \sum_{j=1}^{d+2} \lambda_j = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{d+2} \geq \varepsilon.$$

Unter Verwendung der Software Matlab zur Erstellung dieses linearen Programms und LPSolve zur anschließenden Lösung, erhält man erneut

für den Fall $n = 51$ und $d = 21$ die folgenden auf 6 signifikante Stellen gerundeten Werte:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 0,267395 & \mu_2 = 0,240028 & \mu_3 = 0,192738 \\ \mu_4 = 0,137418 & \mu_5 = 0,859163 \cdot 10^{-1} & \mu_6 = 0,461908 \cdot 10^{-1} \\ \mu_7 = 0,207097 \cdot 10^{-1} & \mu_8 = 0,736926 \cdot 10^{-2} & \mu_9 = 0,191035 \cdot 10^{-2} \\ \mu_{10} = 0,305884 \cdot 10^{-3} & \mu_{11} = 0,193293 \cdot 10^{-4} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_2 = 0,256816 & \lambda_3 = 0,222556 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_4 = 0,218181 & \lambda_5 = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_6 = 0,165285 \\ \lambda_7 = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_8 = 0,110567 & \lambda_9 = 0,222556 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{10} = 0,642963 \cdot 10^{-1} & \lambda_{11} = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_{12} = 0,317165 \cdot 10^{-1} \\ \lambda_{13} = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_{14} = 0,127671 \cdot 10^{-1} & \lambda_{15} = 0,222556 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{16} = 0,393123 \cdot 10^{-2} & \lambda_{17} = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_{18} = 0,822549 \cdot 10^{-3} \\ \lambda_{19} = 0,222556 \cdot 10^{-5} & \lambda_{20} = 0,903739 \cdot 10^{-4} & \lambda_{21} = 0,222556 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{22} = 0,677511 \cdot 10^{-1} & \lambda_{23} = 0,677511 \cdot 10^{-1} & \end{array}$$

$$\varepsilon = 0,222556 \cdot 10^{-5}$$

Dies begründet die folgende Vermutung, die ebenfalls durch die Software Polymake bestätigt wird.

Vermutung 6.1.7. *Sei n ungerade, $1 < d < \frac{n-1}{2}$ ungerade und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$. Dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich.*

Im Folgenden sind die numerisch berechneten, größtmöglichen Werte von ε , sodass solche Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_{(d+1)/2}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+2}$ existieren, für einige Fälle tabellarisch aufgelistet.

$d \setminus n$	9	11	13	15
3	0, 107633	$0, 5296 \cdot 10^{-1}$	$0, 3636 \cdot 10^{-1}$	$0, 2903 \cdot 10^{-1}$
5	—	—	$0, 5206 \cdot 10^{-1}$	$0, 1615 \cdot 10^{-1}$
$d \setminus n$	17	19	21	23
3	$0, 2508 \cdot 10^{-1}$	$0, 2268 \cdot 10^{-1}$	$0, 2110 \cdot 10^{-1}$	$0, 2000 \cdot 10^{-1}$
5	$0, 7978 \cdot 10^{-2}$	$0, 5027 \cdot 10^{-2}$	$0, 3646 \cdot 10^{-2}$	$0, 2887 \cdot 10^{-2}$
7	$0, 3090 \cdot 10^{-1}$	$0, 6448 \cdot 10^{-2}$	$0, 2346 \cdot 10^{-2}$	$0, 1167 \cdot 10^{-2}$
9	—	—	$0, 2051 \cdot 10^{-1}$	$0, 3047 \cdot 10^{-2}$
$d \setminus n$	25	27	29	31
3	$0, 1920 \cdot 10^{-1}$	$0, 1859 \cdot 10^{-1}$	$0, 1812 \cdot 10^{-1}$	$0, 1775 \cdot 10^{-1}$
5	$0, 2422 \cdot 10^{-2}$	$0, 2115 \cdot 10^{-2}$	$0, 1900 \cdot 10^{-2}$	$0, 1744 \cdot 10^{-2}$
7	$0, 7031 \cdot 10^{-3}$	$0, 4797 \cdot 10^{-3}$	$0, 3565 \cdot 10^{-3}$	$0, 2817 \cdot 10^{-3}$
9	$0, 8432 \cdot 10^{-3}$	$0, 3363 \cdot 10^{-3}$	$0, 1689 \cdot 10^{-3}$	$0, 9904 \cdot 10^{-4}$
11	$0, 1462 \cdot 10^{-1}$	$0, 1618 \cdot 10^{-2}$	$0, 3508 \cdot 10^{-3}$	$0, 1141 \cdot 10^{-3}$
13	—	—	$0, 1095 \cdot 10^{-1}$	$0, 9359 \cdot 10^{-3}$
$d \setminus n$	33	35	41	51
3	$0, 1745 \cdot 10^{-1}$	$0, 1721 \cdot 10^{-1}$	$0, 1669 \cdot 10^{-1}$	$0, 1621 \cdot 10^{-1}$
5	$0, 1625 \cdot 10^{-2}$	$0, 1533 \cdot 10^{-2}$	$0, 1353 \cdot 10^{-2}$	$0, 1198 \cdot 10^{-2}$
7	$0, 2329 \cdot 10^{-3}$	$0, 1991 \cdot 10^{-3}$	$0, 1430 \cdot 10^{-3}$	$0, 9004 \cdot 10^{-4}$
9	$0, 6483 \cdot 10^{-4}$	$0, 4597 \cdot 10^{-4}$	$0, 2255 \cdot 10^{-4}$	$0, 2672 \cdot 10^{-3}$
11	$0, 4817 \cdot 10^{-4}$	$0, 2436 \cdot 10^{-4}$	$0, 6135 \cdot 10^{-5}$	$0, 5322 \cdot 10^{-4}$
13	$0, 1630 \cdot 10^{-3}$	$0, 4389 \cdot 10^{-4}$	$0, 3516 \cdot 10^{-5}$	$0, 1607 \cdot 10^{-4}$
15	$0, 8516 \cdot 10^{-2}$	$0, 5780 \cdot 10^{-3}$	$0, 5746 \cdot 10^{-5}$	$0, 8464 \cdot 10^{-5}$
17	—	—	$0, 4475 \cdot 10^{-4}$	$0, 1068 \cdot 10^{-6}$
19	—	—	$0, 5574 \cdot 10^{-2}$	$0, 2921 \cdot 10^{-6}$
21	—	—	—	$0, 2226 \cdot 10^{-5}$
23	—	—	—	$0, 8738 \cdot 10^{-1}$

6.2. Der Fall n gerade.

Für gerade n ändert sich die Anzahl der Konjugationsklassen von D_{2n} gegenüber dem Fall für ungerade n . Zunächst bildet e wieder eine eigene Konjugationsklasse und die Drehungen a, a^2, \dots, a^{n-1} teilen sich wieder in Konjugationsklassen der Form $\{a^j, a^{n-j}\}$ auf. Hier ist jedoch zu bemerken, dass unter diesen Konjugationsklasse auch die Klasse $\{a^{n/2}\}$ ist, die lediglich Größe 1 hat. Die Spiegelungen bilden in diesem Fall nun nicht mehr eine Konjugationsklasse, sondern teilen sich in zwei Klassen auf. Eine ist $\{x, a^2x, \dots, a^{n-2}x\}$, die andere ist entsprechend gegeben durch $\{ax, a^3x, \dots, a^{n-1}x\}$. Die Anzahl der Konjugationsklassen beträgt somit $(n+6)/2$. Für den geraden Fall besitzt D_{2n} vier eindimensionale irreduzible Darstellungen, die somit die Charaktere sind. Sie liegen wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \chi_0(a^{2j}) &= 1, & \chi_0(a^{2j+1}) &= 1, & \chi_0(a^{2^j}x) &= 1, & \chi_0(a^{2^{j+1}}x) &= 1, \\ \chi_1(a^{2j}) &= 1, & \chi_1(a^{2j+1}) &= 1, & \chi_1(a^{2^j}x) &= -1, & \chi_1(a^{2^{j+1}}x) &= -1, \\ \chi_2(a^{2j}) &= 1, & \chi_2(a^{2j+1}) &= -1, & \chi_2(a^{2^j}x) &= 1, & \chi_2(a^{2^{j+1}}x) &= -1, \\ \chi_3(a^{2j}) &= 1, & \chi_3(a^{2j+1}) &= -1, & \chi_3(a^{2^j}x) &= -1, & \chi_3(a^{2^{j+1}}x) &= 1, \end{aligned}$$

wobei $j \in \{0, \dots, (n-2)/2\}$. Alle weiteren irreduziblen Darstellungen sind zweidimensional und die entsprechenden Charaktere haben die gleiche Form, wie im ungeraden Fall. Das heißt, für $k = 1, \dots, (n-2)/2$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{k+3}(a^j) &= 2 \cos(2\pi k j / n) \\ \chi_{k+3}(a^j x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Erneut genügt es für die Definition des Charakterpolytops höchstens ein Element je Konjugationsklasse zu betrachten. Im Weiteren wird es sich dabei für die beiden Konjugationsklassen, die die Spiegelungen enthalten, um x und ax handeln. Für den Fall $\mathcal{S} = \{a^1 \dots, a^d x, ax\}$ ist das Charakterpolytop $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ die konvexe Hülle folgender Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^d \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^d \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi k \cdot 1}{n}) \\ \cos(\frac{2\pi k \cdot 2}{n}) \\ \vdots \\ \cos(\frac{2\pi k \cdot d}{n}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \left[\frac{n-2}{2} \right].$$

Man kann sich auch hier auf $d \in [n/2]$ beschränken, um sicherzustellen, dass \mathcal{S} nicht mehrere Elemente derselben Konjugationsklasse enthält. Ist man an Teilmengen \mathcal{S} interessiert, die x oder ax nicht enthalten, so sind die entsprechenden Komponenten aus den Ecken zu streichen. Dabei korrespondiert die vorletzte Komponente zu x und die letzte zu ax .

Es wird nun wieder eine Fallunterscheidung danach vorgenommen, ob \mathcal{S} Drehungen oder Spiegelungen enthält, um das Finden eines Fourier-Supports untersuchen zu können. In dem Fall, dass \mathcal{S} weder x noch ax enthält, kann erneut auf die Resultate von Kapitel 5 zurückgegriffen werden. Tatsächlich ist der Beweis des folgenden Theorems identisch zu dem von Theorem 6.1.1. und wird daher hier nicht erneut geführt.

Theorem 6.2.1.

Sei n gerade und $\mathcal{S} = \{a^i: i \in [d]\}$ für ein $d \mid n$. Dann hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ einen PSD-Lift der Größe $\leq 3d \log_2 \binom{n}{d}$.

Als nächstes werden \mathcal{S} betrachtet, die nur Spiegelungen enthalten. Demnach kann \mathcal{S} nur Elemente aus zwei Konjugationsklassen enthalten, also $\mathcal{S} \subseteq \{x, ax\}$.

Theorem 6.2.2.

Sei n gerade und $\mathcal{S} \subseteq \{x, ax\}$. Dann hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ einen PSD-Lift der Größe ≤ 4 .

Beweis:

Die zu vervollständigende Matrix Y hat dieses Mal die folgende Form:

$$Y = \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & A \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Hauptdiagonalelemente von A gleich 1. Die weiteren Einträge von A sind unbekannt. Die Form von B hängt davon ab, welche der Elemente x und ax in \mathcal{S} enthalten sind. Zunächst sei angenommen, dass $\mathcal{S} = \{x\}$ ist. Indiziert man die Zeilen und Spalten von B mit $\{1, \dots, n\}$, so sind genau die Einträge $B_{i,j}$ bekannt, für die $i + j$ gerade ist. Weiter sind diese alle identisch. Nun kann man B zu einem Vielfachen der Einsmatrix vervollständigen und erhält die folgende Matrix:

$$Y = \begin{pmatrix} A & k_x J \\ \overline{k_x J} & A \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $k_x \in \mathbb{C}$ bekannt. Vervollständigt man Y nun wie im Beweis von Theorem 6.1.2., so findet man einen Fourier-Support der Größe 2, also ≤ 4 .

Gilt $\mathcal{S} = \{ax\}$, so sind nun genau die Einträge von B bekannt, die zuvor unbekannt waren. Außerdem sind die bekannten Einträge wieder identisch. Also kann man hier die gleiche Vervollständigung vornehmen und findet wieder einen Fourier-Support der Größe 2.

Falls $\mathcal{S} = \{x, ax\}$ ist, so ist die Matrix B vollständig bekannt. Erneut sind alle Einträge $B_{i,j}$, für die $i + j$ gerade sind, identisch. Bezeichne diese mit k_x . Ebenso sind alle übrigen Einträge identisch und seien mit k_{ax} bezeichnet. Es bleibt nur die Matrix A zu vervollständigen, wobei nur die Hauptdiagonale von A bekannt ist. Sei dazu $\mathcal{T} = \{e, a, x, ax\}$.

Man vervollständige A nach demselben Muster wie die Matrix B , also:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i + j \text{ gerade.} \\ k_a, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Permutation der Zeilen und Spalten der vervollständigten Matrix Y erhält man die folgende Matrix Y' :

$$Y' = \begin{pmatrix} J & k_a J & k_x J & k_{ax} J \\ \overline{k_a} J & J & k_{ax} J & k_x J \\ \overline{k_x} J & \overline{k_{ax}} J & J & k_a J \\ \overline{k_{ax}} J & \overline{k_x} J & \overline{k_a} J & J \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & k_a & k_x & k_{ax} \\ \overline{k_a} & 1 & k_{ax} & k_x \\ \overline{k_x} & \overline{k_{ax}} & 1 & k_a \\ \overline{k_{ax}} & \overline{k_x} & \overline{k_a} & 1 \end{pmatrix}}_{=M_{\mathcal{T}}(k)} \otimes J.$$

Dabei haben die Blöcke von Y' die Größe $(n/2) \times (n/2)$. Es folgt somit aus $M_{\mathcal{T}}(k) \succeq 0$, dass Y' zu einer positiv semidefiniten Matrix vervollständigt werden kann. Da Y' durch Zeilen- und Spaltenpermutation aus Y entsteht, kann also auch Y positiv semidefinit vervollständigt werden. \mathcal{T} ist daher ein Fourier-Support von \mathcal{S} und mit Theorem 3.7. folgt die Existenz eines PSD-Lifts der Größe 4.

□

So wie im Fall für ungerade n lässt sich eine Aussage für lineare Lifts von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ treffen, wenn \mathcal{S} die Elemente x und ax nicht enthält. Der Beweis des folgenden Theorems kann identisch zu dem von Korollar 6.1.4. geführt werden.

Theorem 6.2.3. *Sei n gerade und $\mathcal{S} = \{a^i : i \in [d]\}$. Es gilt:*

$$\text{x}_{\text{CLP}}(\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+2}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

Ebenso wie im vorherigen Abschnitt lässt sich hier vermuten, dass die Charakterpolytope bezüglich D_{2n} und $\mathbb{Z}/\frac{n+2}{n}\mathbb{Z}$ die gleiche Seitenstruktur haben. Die folgende Vermutung wurde von der Software Polymake für alle geraden $n \leq 50$ und alle geraden $d \leq \frac{n}{2}$ bestätigt.

Vermutung 6.2.4. *Seien n, d gerade. $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/\frac{n+2}{2}\mathbb{Z}, \{-\frac{d}{2}, \dots, \frac{d}{2}\})$ und $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$ sind kombinatorisch äquivalent.*

Ähnlich wie in Kapitel 6.1. stellt sich heraus, dass ein analoges Vorgehen für die Fälle $\{x, ax\} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ nicht möglich ist, um eine untere Schranke an lineare Lifts zu finden. Der Grund hierfür ist eine fehlende Nachbarschaftlichkeit von $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ in genau diesen Fällen. Dies wird nun zunächst für den Fall gezeigt, dass \mathcal{S} entweder das Gruppenelement x oder ax enthält.

Theorem 6.2.5. *Sei n gerade, $2 < d \leq \frac{n}{2}$ und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$ oder $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, ax\}$. Dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich.*

Beweis:

Der erste Schritt ist zu zeigen, dass die Ecken zu den Charakteren χ_0, χ_1, χ_2 und χ_3 eine Seite kodieren. Seien $v_0, \dots, v_3 \in \mathbb{R}^{d+1}$ diese Ecken. Man definiere den Vektor $b \in \mathbb{R}^{d+1}$ durch:

$$b = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)^T$$

und betrachte die Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : b^T x = 1\}.$$

Betrachtet man die Ecken

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ \mp 1 \end{pmatrix},$$

so wird sofort klar, dass diese vier Ecken in der Hyperebene H enthalten sind, da die zweite Komponente jeder dieser Vektoren 1 ist. Die zweite Komponente jeder weiteren Ecke hat die Form:

$$\cos\left(\frac{2\pi k \cdot 2}{n}\right), \quad k \in \left[\frac{n-2}{2}\right].$$

Diese Komponente ist genau dann gleich 1, wenn es ein ganzzahliges r gibt mit:

$$\frac{2\pi k \cdot 2}{n} = 2\pi r \iff \frac{2k}{n} = r.$$

Wegen $k > 0$ folgt $r > 0$. Gleichzeitig folgt aber aus $k < n/2$, dass $r < 1$ sein muss. Somit existiert kein ganzzahliges r , das diese Bedingung erfüllt und daher gibt es keine Ecke außer v_0, \dots, v_3 , deren zweite Komponente gleich 1 ist. Da 1 aber eine obere Schranke an den Kosinus ist, ist H eine Stützhyperebene an $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$, die genau die Ecken v_0, \dots, v_3 enthält. Also ist $\text{conv}\{v_0, \dots, v_3\}$ eine Seite. Im Folgenden wird nur noch der Fall $x \in \mathcal{S}$ betrachtet. Der Fall $ax \in \mathcal{S}$ kann sehr ähnlich behandelt werden. Nun lässt sich durch nachrechnen schnell verifizieren, dass folgende Relation gilt:

$$(10) \quad v_0 - v_1 - v_2 + v_3 = 0.$$

Da sich die Koeffizienten in dieser Gleichung zu 0 aufsummieren belegt dies, dass die Ecken v_0, \dots, v_3 affin abhängig sind, also ist die Dimension von $\text{conv}\{v_0, \dots, v_3\} \leq 2$. Nebenbei bemerkt ist die Dimension genau 2, denn der Raum der Koeffizienten, die (10) erfüllen, ist:

$$\left\{ (c \ -c \ -c \ c)^T : c \in \mathbb{R} \right\},$$

also eindimensional. Würde man eine der Ecken v_0, \dots, v_3 aus der Betrachtung entfernen, so würde man den entsprechenden Koeffizienten zu Null setzen und finden, dass (10) nur erfüllt ist wenn alle Koeffizienten gleich Null sind. Daher sind je 3 der Ecken v_0, \dots, v_3 affin unabhängig.

Nach dem Theorem von Radon können die Ecken v_0, \dots, v_3 in zwei disjunkte Mengen V_1, V_2 partitioniert werden, sodass $\text{conv}V_1$ und $\text{conv}V_2$ einen nichtleeren Schnitt haben. Zunächst sei angenommen, dass eine der beiden Partitionen aus nur einem Element besteht. Dann gibt es eine Ecke unter v_0, \dots, v_3 , die als Konvexkombination der anderen dargestellt werden kann. Beispielsweise sei v_0 darstellbar als:

$$v_0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Beschreibt man dies durch ein lineares Gleichungssystem, so erhält man nach Auslösen trivialer Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geht man davon aus, dass nicht v_0 sondern eine andere der Ecken als Konvexkombination der anderen darstellbar ist, so muss in dem Gleichungssystem lediglich die rechte Seite mit der entsprechenden Spalte getauscht werden. In allen Fällen erhält man eine eindeutige Lösung, bei der zwei der Koeffizienten 1 und der übrige Koeffizient -1 ist. Da also stets einer der Koeffizienten negativ ist, kann keine der Ecken v_0, \dots, v_3 eine Konvexkombination der übrigen sein. Es folgt, dass die Partitionen V_1 und V_2 jeweils 2 Elemente enthalten und der Schnitt von $\text{conv}V_1$ mit $\text{conv}V_2$ im Inneren der Seite $\text{conv}\{v_0, \dots, v_3\}$ enthalten ist. Insbesondere bedeutet dies, dass $\text{conv}V_1$ und $\text{conv}V_2$ selbst keine Seiten sind. Daher ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht 2-nachbarschaftlich. Weil jedes nachbarschaftliche Polytop auch 2-nachbarschaftlich ist folgt die Aussage des Theorems. □

Es ist leicht zu sehen, dass dieses Resultat für $d = 2$ nicht gilt. Für $d = 2$ ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ ein 3-dimensionales Polytop, welches also nachbarschaftlich ist, wenn je $\lfloor 3/2 \rfloor = 1$ Ecke eine Seite kodiert. Tatsächlich ist jede Ecke eine Seite.

So wie in Kapitel 6.1. für den Fall $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$ lässt sich hier für den Fall $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x, ax\}$ vermuten, dass das Charakterpolytop nicht nachbarschaftlich ist. Dazu stellt man zunächst fest, dass nur die Betrachtung von $d \in \{2, 3, \dots, (n-2)/2\}$ relevant ist. Für $d = 1$ ist $\dim(\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})) = d + 2 = 3$. Somit liegt Nachbarschaftlichkeit bereits vor, wenn jede Ecke eine Seite ist, was stets erfüllt ist. Für den Fall $d = n/2$ hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ Dimension $(n+4)/2$ und $(n+6)/2$ Ecken

und ist somit ein Simplex. Insbesondere ist das Charakterpolytop dann nachbarschaftlich.

Ein weiterer Spezialfall scheint für $d = (n - 2)/2$ vorzuliegen, falls $4 \nmid n$ gilt. Für diesen Fall ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ laut der Software Polymake $(d + 2)/2$ -nachbarschaftlich. Für alle weiteren Fälle betrachte man die folgenden Ecken:

$$v_j = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(2j - 1) \cdot 1/n) \\ \cos(2\pi(2j - 1) \cdot 2/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(2j - 1) \cdot d/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für $j \in [(d + 1)/2]$ falls d ungerade ist, bzw. $j \in [(d + 2)/2]$ falls d gerade ist. Des Weiteren betrachte man die folgenden Ecken:

$$w_j = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(j + 1) \cdot 1/n) \\ \cos(2\pi(j + 1) \cdot 2/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(j + 1) \cdot d/n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in [d - 1],$$

$$w_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_{d+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_{d+2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_{d+3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Erneut zeigt numerisches Berechnen einer Determinante wie im vorherigen Abschnitt, dass w_1, \dots, w_{d+3} affin unabhängig sind und somit die Ecken eines $(d + 2)$ -dimensionalen Simplex bilden. Matlab liefert beispielsweise für den Fall $n = 50$ und $d = 20$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & \cdots & w_{d+3} \end{pmatrix} \approx -0.27735 \cdot 10^6 \neq 0.$$

Um zu zeigen, dass $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich ist, sind nun wieder Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_{\lfloor (d+2)/2 \rfloor} \geq 0$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+3} \geq 0$, sowie

ein $\varepsilon > 0$ zu finden, sodass:

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} \mu_j v_j - \sum_{j=1}^{d+3} \lambda_j w_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor} \mu_j = \sum_{j=1}^{d+3} \lambda_j = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{d+3} \geq \varepsilon.$$

Die Software LPSolve liefert für $n = 50$ und $d = 20$ die folgenden Werte, die wieder auf 6 signifikante Stellen gerundet sind:

$$\begin{array}{lll} \mu_1 = 0,825453 \cdot 10^{-2} & \mu_2 = 0,666691 \cdot 10^{-1} & \mu_3 = 0,148774 \\ \mu_4 = 0,208082 & \mu_5 = 0,215333 & \mu_6 = 0,173196 \\ \mu_7 = 0,108531 & \mu_8 = 0,512285 \cdot 10^{-1} & \mu_9 = 0,167182 \cdot 10^{-1} \\ \mu_{10} = 0,306437 \cdot 10^{-2} & \mu_{11} = 0,150014 \cdot 10^{-3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 = 0,317009 \cdot 10^{-1} & \lambda_2 = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_3 = 0,107754 \\ \lambda_4 = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_5 = 0,183790 & \lambda_6 = 0,121709 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_7 = 0,218808 & \lambda_8 = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_9 = 0,199102 \\ \lambda_{10} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_{11} = 0,141618 & \lambda_{12} = 0,121709 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{13} = 0,775411 \cdot 10^{-1} & \lambda_{14} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_{15} = 0,309092 \cdot 10^{-1} \\ \lambda_{16} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_{17} = 0,786766 \cdot 10^{-2} & \lambda_{18} = 0,121709 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{19} = 0,893056 \cdot 10^{-3} & \lambda_{20} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_{21} = 0,121709 \cdot 10^{-5} \\ \lambda_{22} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \lambda_{23} = 0,121709 \cdot 10^{-5} & \end{array}$$

$$\varepsilon = 0,121709 \cdot 10^{-5}$$

Diese Resultate bestätigen zusammen mit der Software Polymake die folgende Vermutung.

Vermutung 6.2.6. *Sei n gerade, $1 < d < \frac{n}{2}$ und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x, ax\}$. Weiter sei $d \neq \frac{n-2}{2}$, falls $4 \nmid n$. Dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich.*

Auch für diesen Fall sind im Folgenden die berechneten, größtmöglichen Werte von ε für einige Fälle tabellarisch aufgelistet.

$d \setminus n$	8	10	12	14
2	0,125	$0,7295 \cdot 10^{-1}$	$0,3868 \cdot 10^{-1}$	$0,2120 \cdot 10^{-1}$
3	0,111111	$0,2205 \cdot 10^{-1}$	$0,5947 \cdot 10^{-2}$	$0,2061 \cdot 10^{-2}$
4	—	—	$0,7692 \cdot 10^{-1}$	$0,2740 \cdot 10^{-1}$
5	—	—	$0,7143 \cdot 10^{-1}$	$0,7612 \cdot 10^{-2}$
$d \setminus n$	16	18	20	22
2	$0,1235 \cdot 10^{-1}$	$0,7618 \cdot 10^{-2}$	$0,4939 \cdot 10^{-2}$	$0,3338 \cdot 10^{-2}$
3	$0,8478 \cdot 10^{-3}$	$0,3942 \cdot 10^{-3}$	$0,2009 \cdot 10^{-3}$	$0,1100 \cdot 10^{-3}$
4	$0,7874 \cdot 10^{-2}$	$0,2550 \cdot 10^{-2}$	$0,9516 \cdot 10^{-3}$	$0,3990 \cdot 10^{-3}$
5	$0,1205 \cdot 10^{-2}$	$0,2676 \cdot 10^{-3}$	$0,7480 \cdot 10^{-4}$	$0,2465 \cdot 10^{-4}$
6	$0,5556 \cdot 10^{-1}$	$0,1311 \cdot 10^{-1}$	$0,2355 \cdot 10^{-2}$	$0,5171 \cdot 10^{-3}$
7	$0,5263 \cdot 10^{-1}$	$0,3503 \cdot 10^{-2}$	$0,3678 \cdot 10^{-3}$	$0,5742 \cdot 10^{-4}$
8	—	—	$0,4348 \cdot 10^{-1}$	$0,7248 \cdot 10^{-2}$
9	—	—	$0,4167 \cdot 10^{-1}$	$0,1897 \cdot 10^{-2}$
$d \setminus n$	24	30	34	40
2	$0,2336 \cdot 10^{-2}$	$0,9389 \cdot 10^{-3}$	$0,5644 \cdot 10^{-3}$	$0,2922 \cdot 10^{-3}$
3	$0,6377 \cdot 10^{-4}$	$0,1601 \cdot 10^{-4}$	$0,7426 \cdot 10^{-5}$	$0,2755 \cdot 10^{-5}$
4	$0,1835 \cdot 10^{-3}$	$0,2649 \cdot 10^{-4}$	$0,9182 \cdot 10^{-5}$	$0,2366 \cdot 10^{-5}$
5	$0,9195 \cdot 10^{-5}$	$0,7992 \cdot 10^{-6}$	$0,2109 \cdot 10^{-6}$	$0,3844 \cdot 10^{-7}$
6	$0,1381 \cdot 10^{-3}$	$0,5791 \cdot 10^{-5}$	$0,1074 \cdot 10^{-5}$	$0,1284 \cdot 10^{-6}$
7	$0,1175 \cdot 10^{-4}$	$0,2724 \cdot 10^{-6}$	$0,3740 \cdot 10^{-7}$	$0,3085 \cdot 10^{-8}$
8	$0,8962 \cdot 10^{-3}$	$0,7053 \cdot 10^{-5}$	$0,6085 \cdot 10^{-6}$	$0,2996 \cdot 10^{-7}$
9	$0,1422 \cdot 10^{-3}$	$0,5071 \cdot 10^{-6}$	$0,3079 \cdot 10^{-7}$	$0,1003 \cdot 10^{-8}$
10	$0,3571 \cdot 10^{-1}$	$0,4943 \cdot 10^{-4}$	$0,1533 \cdot 10^{-5}$	$0,2542 \cdot 10^{-7}$
11	$0,3448 \cdot 10^{-1}$	$0,5801 \cdot 10^{-5}$	$0,1142 \cdot 10^{-6}$	$0,1167 \cdot 10^{-8}$
12	—	$0,2887 \cdot 10^{-2}$	$0,1968 \cdot 10^{-4}$	$0,7700 \cdot 10^{-7}$
13	—	$0,7403 \cdot 10^{-3}$	$0,2343 \cdot 10^{-5}$	$0,4929 \cdot 10^{-8}$
14	—	—	$0,1988 \cdot 10^{-2}$	$0,9383 \cdot 10^{-6}$
15	—	—	$0,5071 \cdot 10^{-3}$	$0,8883 \cdot 10^{-7}$
16	—	—	—	$0,6403 \cdot 10^{-4}$
17	—	—	—	$0,1047 \cdot 10^{-4}$
18	—	—	—	$0,2083 \cdot 10^{-1}$
19	—	—	—	$0,2041 \cdot 10^{-1}$

7. ZUSAMMENFASSUNG DER RESULTATE

Aufgrund der vielen verschiedenen Fälle die im Zuge dieser Arbeit betrachtet wurden ist an dieser Stelle eine Übersicht der wichtigsten angewandten Resultate angebracht.

- **Korollar 5.2.6.:**

Für das Charakterpolytop $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$ mit $d \mid N$ gilt:

$$x_{\text{CPSD}}(\mathcal{P}) \leq 3d \log_2 \left(\frac{N}{d} \right).$$

- **Theorem 5.2.7.:**

Für das zyklische Polytop $\mathcal{P} := C(N, 2d)$ mit $d \mid N$ gilt:

$$x_{\text{CPSD}}(\mathcal{P}) \leq 3d \log_2 \left(\frac{N}{d} \right).$$

Dies folgt, weil $C(N, 2d)$ und $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \{-d, \dots, d\})$ kombinatorisch äquivalent sind.

- **Lemma 5.3.1. und Theorem 4.17.:**

$$x_{\text{CLP}}(C(N, 2d)) = \Omega \left(\min \left\{ N, \frac{(d+1)(d+2)}{2} \right\} \right).$$

- **Theorem 6.1.1. und Theorem 6.2.1.:**

Für das Charakterpolytop $\mathcal{P} := \mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$ mit $d \mid n$ gilt:

$$x_{\text{CPSD}}(\mathcal{P}) \leq 3d \log_2 \left(\frac{n}{d} \right).$$

- **Theorem 6.1.2.:**

Ist n ungerade, so hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \{x\})$ einen PSD-Lift der Größe 2.

- **Korollar 6.1.4.:**

Ist n ungerade, so gilt für $\mathcal{P} := \mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$:

$$x_{\text{CLP}}(\mathcal{P}) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+1}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

- **Theorem 6.1.6.:**

Ist n ungerade, d gerade und $\mathcal{P} := \mathcal{P}(D_{2n}, \{a^1, \dots, a^d, x\})$, so gilt:

$$x_{\text{CLP}}(\mathcal{P}) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+3}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

- **Theorem 6.2.2.:**

Ist n gerade und ist $\mathcal{S} \subseteq \{x, ax\}$, dann hat $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ einen PSD-Lift der Größe ≤ 4 .

- **Theorem 6.2.3.:**

Ist n gerade, so gilt für $\mathcal{P} := \mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$:

$$\text{x}_{\text{CLP}}(\mathcal{P}) = \Omega \left(\min \left\{ \frac{n+2}{2}, \frac{(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1)(\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2)}{2} \right\} \right).$$

- **Theorem 6.2.5.:**

Ist n gerade, $2 < d \leq \frac{n}{2}$ und $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, x\}$ oder $\mathcal{S} = \{a^1, \dots, a^d, ax\}$, so ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \mathcal{S})$ nicht nachbarschaftlich.

Des Weiteren wurden in dieser Arbeit die folgenden Vermutungen angestellt:

- **Vermutung 6.1.5.:**

Ist n ungerade und d gerade, dann sind $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$ und $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/\frac{n+1}{2}\mathbb{Z}, \{-\frac{d}{2}, \dots, \frac{d}{2}\})$ kombinatorisch äquivalent.

- **Vermutung 6.1.7.:**

Ist n ungerade und $1 < d < \frac{n-1}{2}$ ungerade, dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^1, \dots, a^d, x\})$ nicht nachbarschaftlich.

- **Vermutung 6.2.4.:**

Sind n, d gerade, dann sind $\mathcal{P}(\mathbb{Z}/\frac{n+2}{2}\mathbb{Z}, \{-\frac{d}{2}, \dots, \frac{d}{2}\})$ und $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^i : i \in [d]\})$ kombinatorisch äquivalent.

- **Vermutung 6.2.6.:**

Ist n gerade, $1 < d < \frac{n}{2}$ und $d \neq \frac{n-2}{2}$ falls $4 \nmid n$, dann ist $\mathcal{P}(D_{2n}, \{a^1, \dots, a^d, x, ax\})$ nicht nachbarschaftlich.

LITERATUR

- [1] A. Bezdek, *Discrete geometry, in honor of W. Kuperberg's 60th birthday*, Marcel Dekker, 2003.
- [2] E. Decorte, D. de Laat und F. Vallentin, *Fourier analysis on finite groups and the Lovász theta-number of Cayley graphs*, arXiv:1307.5703v1, 2013.
- [3] H. Dym und I. Gohberg, *Extensions of band matrices with band inverses*, Linear algebra and its applications 36:1-24, 1981.
- [4] H. Fawzi, J. Saunderson und P. A. Parrilo, *Sparse sum-of-squares certificates on finite abelian groups*, arXiv:1503.01207v1, 2015.
- [5] S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich und D. O. Theis, *Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations*, arXiv:1111.0444v2, 2012.
- [6] D. Gale, *Neighborly and cyclic polytopes*, Convexity, V. Klee, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7:225-232, 1963.
- [7] R. Grone, C. R. Johnson, E. M. Sá und H. Wolkowicz, *Positive definite completions of partial hermitian matrices*, Linear algebra and its applications 58:109-124, 1984.
- [8] Groupprops, the group properties wiki, *Linear representation theory of dihedral groups*, https://groupprops.subwiki.org/wiki/Linear_representation_theory_of_dihedral_groups, besucht: 29. März 2017.
- [9] R. F. Scott, *Note on a theorem of Prof. Cayley's*, The messenger of mathematics 8:155-157, 1879.
- [10] A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications*, Cambridge University Press, 1999.
- [11] F. Vallentin, *Einführung in die Mathematik des Operations Research*, <https://sites.google.com/site/mathematikor/vorlesungen>, besucht: 26. März 2017.
- [12] S. A. Vavasis, *On the complexity of nonnegative matrix factorization*, arXiv:0708.4149v2, 2008.
- [13] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Springer, 1995.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, Stefan Krupp, an Eides statt, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, habe ich in jedem einzelnen Fall durch die Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vorgelegt. Sie wurde bisher nicht veröffentlicht.

Köln, den 06.04.2017

(Stefan Krupp)