



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 1 —

Aufgabe 1.1 Konstruieren Sie einen gerichteten Graph $G = (V, A)$ mit Kantenlängenfunktion $l : A \rightarrow \mathbb{R}$, der u.a. die Knoten $s, t_1, t_2, \dots, t_6 \in V$ enthält und folgende drei Eigenschaften erfüllt:

- i) Ein (kürzester) $s - t_i$ -Weg existiert für $i = 1, \dots, 6$.
- ii) Eine kürzeste $s - t_i$ -Kantenfolge existiert für $i = 1, 2, 3$.
- iii) Keine kürzeste $s - t_i$ -Kantenfolge existiert für $i = 4, 5, 6$.

Existiert in dem von Ihnen konstruierten Graph ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.2 Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit ganzzahliger Kantenlängenfunktion $l \in \mathbb{Z}^A$, $\text{dist}(s, u) < \infty$ für alle $u \in V$ und Potential $p : V \rightarrow \mathbb{Z}$ bzgl. l . Weiterhin sei die Kantenlängenfunktion $l' : A \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $l'((u, v)) = l((u, v)) - p(v) + p(u)$. Zeigen Sie, dass l' nicht negativ ist und dass die minimale Länge eines s - t -Weges bzgl. l' gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi(t) - \phi(s) \\ \phi : \quad & V \rightarrow \mathbb{Z} \\ & \phi(v) - \phi(u) \leq l'((u, v)) \text{ für alle } (u, v) \in A. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3 (Präsenzaufgabe)

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten und Kantenlängenfunktion $l \in \mathbb{R}^A$. Sei $s \in V$ der Startknoten. Betrachte die Funktionen $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{R}^V$, die der Algorithmus von Bellman-Ford berechnet. Zeigen Sie: Es gilt $d_n = d_{n-1}$ genau dann, wenn alle gerichteten Kreise, die von s aus erreichbar sind, nicht-negative Länge besitzen.

Abgabe: Bis Freitag, 12. April 2019, 8 Uhr.

Aufgaben 1.1 und 1.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.