Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 4 —

Aufgabe 4.1 Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$ und die beiden ungerichteten Graphen

$$K_{2n} = (\{v_1, \dots, v_{2n}\}, \{\{v, w\} : v, w \in V\})$$

und

$$K_{n,n} = (\{v_1, \dots, v_{2n}\}, \{\{v, w\} : v \in \{v_1, \dots, v_n\}, w \in \{v_{n+1}, \dots v_{2n}\}\}) .$$

Zeigen Sie:

a) Für $n \geq 2$ existieren in K_{2n} $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1$ verschiedene perfekte Matchings.

b) Es existiert ein maximales Matching M in $K_{n,n}$ der Kardinalität $|M| = n$.

Aufgabe 4.2

a) Leiten Sie aus dem Beweis zu Satz 3.2. einen effizienten (d.h. polynomiellen) Algorithmus zur Bestimmung in einer minimalen Knotenüberdeckung in einem bipartiten Graphen ab.

b) Argumentieren Sie, wieso dieser Algorithmus für allgemeine Graphen nicht notwendigerweise eine optimale Knotenüberdeckung liefert.

Aufgabe 4.3 (Präsenzaufgabe) Sei $U = \{U_1, \dots, U_6\}$ eine Menge von Übungen und $T = \{T_1, \dots, T_4\}$ eine Menge von Tutoren. Zu jedem Tutor gibt es eine Menge von Übungen, die er betreuen könnte:

T_1	T_2	T_3	T_4
U_1, U_4, U_5	U_2, U_3	U_3, U_5	U_2, U_4, U_6

Darüber hinaus hat jeder Dozent angegeben, welche Tutoren er für geeignet hält:

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
T_1, T_3, T_4	T_1, T_3, T_4	T_2, T_3	T_1, T_4	T_1, T_4	T_2, T_4

Jede Übung soll betreut werden, und jedem Tutor kann höchstens eine Übung zugewiesen werden. Modellieren Sie das Problem als bipartiten Graph und geben Sie ein Matching an, so dass möglichst vielen Übungen ein passender Tutor zugewiesen wird. Beweisen Sie, dass ihr gefundenes Matching optimal ist.

Abgabe: Bis Freitag, 3. Mai 2019, 8 Uhr.
Aufgaben 4.1 und 4.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen.
Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.