Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 5 —

Aufgabe 5.1 Es sei $(A_1, \ldots, A_n)$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge. Zeigen Sie, dass es genau dann n verschiedene Elemente $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ gibt, falls

$$\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| \geq |I| \quad \text{für jede Teilmenge } I \subseteq \{1, \ldots, n\} \text{ gilt.}$$

Aufgabe 5.2 Sie planen ein "erfolgreiches Flugunternehmen", welches Ferienflüge vom Köln-Bonner Flughafen aus anbietet, aufzubauen: Air Cologne. Glücklicherweise sind vor kurzem einige Konkurrenzunternehmen pleitegegangen: Air Düsseldorf, Air Leverkusen, Air Gladbach und Air Duisburg. Sie können günstig Flugrouten von diesen vier Firmen erwerben, unterliegen aber zunächst folgenden Einschränkungen:

- Sie dürfen zu jeder Tageszeit (morgens, mittags, nachmittags, abends) nur einen Flug von Köln aus starten.
- Jeder Flughafen in den Ferienorten gestattet Ihnen nur eine Landung am Tag.

Die untenstehende Tabelle listet die verfügbaren Flugrouten aller vier Airlines auf, sowie die durchschnittlichen Jahreskosten auf diesen Routen.

	Air Düsseldorf		**Air Leverkusen**		**Air Gladbach**		**Air Duisburg**	
Zeit	Ziel	Kosten	Ziel	Kosten	Ziel	Kosten	Ziel	Kosten
morgens	IBZ	15	GRO	6	PMI	7	IBZ	11
mittags	CUN	2	IBZ	4	GRO	1	PMI	4
nachm.	GRO	4	-	-	CUN	9	-	-
abends	-	-	CUN	3	IBZ	5	GRO	2

Modellieren Sie das Problem so, dass eine kostenminimale Auswahl von Flugrouten einem maximalen gewichtetem Matching in einem bipartiten Graph entspricht. Finden Sie dann ein solches durch Anwendung der ungarischen Methode.

Aufgabe 5.3 (Präsenzaufgabe)

a) Sei $M \subseteq E$ ein Matching in einem Graph $G = (V, E)$ und sei P ein M-augmentierender Weg. Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz $M \triangle P$ ein Matching in G ist.

b) Betrachte die Mengen $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ist die folgende Menge

$$C = \left\{ a + b \in \mathbb{R}^2 : \ a \in \operatorname{conv}(A), \ b \in \operatorname{conv}(B) \right\}$$

- offen?
- kompakt?
- konvex? Falls ja, geben Sie eine Menge D an so, dass $C = \operatorname{conv}(D)$ gilt.

Abgabe: Bis Freitag, 10. Mai 2019, 8 Uhr.
Aufgaben 5.1 und 5.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen.
Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.