Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 6 —

Aufgabe 6.1

a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge von univariaten Polynomen konvex ist:

$$P = \{(p_0, p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : p_0 + p_1 x + \dots + p_d x^d \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

b) Bestimmen Sie, falls in Dimension d möglich, einen inneren Punkt von P. Falls es in Dimension d keinen inneren Punkt gibt, begründen Sie warum kein solcher existieren kann.

c) Bestimmen Sie die konvexen Hüllen der folgenden Mengen:

$$A = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{und} \quad B = \{(x, \sin x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}.$$

d) Zeige: Für die Mengen A und B existiert jeweils mindestens eine Stützhyperebene.

Aufgabe 6.2 Betrachten Sie $y \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ und die zu y gehörige Menge

$$W_y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} : \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |y_i - x_i| \leq 1.42 \right\}.$$

Seien weiterhin $f, g : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und die Funktion $h : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Zeigen Sie: Falls außerdem

$$h(y) = \inf \{h(x) : x \in W_y\}$$

gilt, dann folgt

$$h(y) = \inf \left\{h(x) : x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\right\}.$$

Aufgabe 6.3 (Präsenzaufgabe) Es sei

$$C = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} n \\ \sin \frac{\pi}{4} n \end{pmatrix} : n = 0, \dots, 7 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ die metrische Projektion von x auf C sowie die zugehörigen Stützhyperebenen und beschreiben Sie C als Schnitt von endlich vielen Hyperebenen.

Hinweis: Sie dürfen Symmetrien von C verwenden.

Abgabe: Bis Freitag, 17. Mai 2019, 8 Uhr.
Aufgaben 6.1 und 6.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen.
Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.