Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 11 —

Aufgabe 11.1 Seien $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, s, $t \in V$, und $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Kapazitätsfunktion. Wir bezeichnen mit $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Inzidenzmatrix von D und mit M' die Teilmatrix von M, welche nach dem Streichen der zu s und t gehörenden Zeilen $m_s, m_t \in \mathbb{R}^A$ entsteht. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\max\left\{\text{value}(f) : f \in \mathbb{R}^A_{\geq 0} \text{ ist } s\text{-}t\text{-Fluss}, f \leq c\right\} = \min\left\{y^\mathsf{T} c : y \in \mathbb{R}^A,\ z \in \mathbb{R}^{V\setminus\{s,t\}}, \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & M'^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ m_t \end{bmatrix}\right\}$$

Aufgabe 11.2 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Menge $U \subseteq V$ heißt *unabhängige Menge* in G, falls für alle $u, v \in U$ stets $\{u, v\} \notin E$ gilt. Das *Unabhängigkeitspolytop* $P_\alpha(G) \subseteq \mathbb{R}^V$ von G ist die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der unabhängigen Mengen in G.

a) Sei A die Inzidenzmatrix von G. Zeigen Sie:

$$P_\alpha(G) = \left\{x \in \mathbb{R}^V : x \geq 0, A^\mathsf{T} x \leq \mathbf{1}\right\},$$

wobei $\mathbf{1}$ der Vektor ist, dessen Einträge alle gleich 1 sind.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in a) nicht stimmt, wenn G nicht bipartit ist.

c) Sei $\alpha(G)$ die Kardinalität der größten unabhängigen Menge in G. Zeigen Sie mit Hilfe des Unabhängigkeitspolytops: Falls jeder Knoten in mindestens einer Kante liegt, gilt

$$\alpha(G) = \min\left\{\mathbf{1}^\mathsf{T} y : y \in \mathbb{Z}^E, y \geq 0, \text{ für alle } v \in V \text{ gilt: } \sum_{e \ni v} y_e \geq 1\right\}.$$

Aufgabe 11.3 (Präsenzaufgabe) Zeigen Sie, dass die Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen vollständig unimodular ist.

Abgabe: Bis Freitag, 28. Juni 2019, 8 Uhr.
Aufgaben 11.1 und 11.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.