



Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Mallach
J. Rolfes, M.Sc.

Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Aufgabenblatt 12 —

Aufgabe 12.1 Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^n$. Zeigen Sie:

a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Für jedes $c \in \mathbb{R}^n$, für das $\max\{c^\top x : Ax \leq b\}$ endlich ist, gibt es ein $x^* \in \mathbb{Z}^n$, das optimal ist.
- Für jedes $c \in \mathbb{Z}^n$, für das $\max\{c^\top x : Ax \leq b\}$ endlich ist, ist der Wert ganzzahlig.

b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine *Clique* in G ist eine Menge $U \subseteq V$ für die gilt, dass für alle Knoten $u, u' \in U$ gilt $(u, u') \in E$. Betrachten Sie nun den Graph $G' = (V_1 \cup V_2, E)$ für den V_1 und V_2 jeweils Cliques sind und finden Sie eine Min-Max-Charakterisierung für

$$\zeta(G') = \max\{|U| : U \text{ ist Clique von } G'\}.$$

Tipp: Sie dürfen auch die Min-Max-Charakterisierung aus Aufgabe 11.2 c) benutzen.

Aufgabe 12.2 Betrachten Sie das folgende lineare Programm mit Ganzzahligkeitsrestriktionen:

$$p^* = \max_{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} \{4x_2 : 3x_1 + 5x_2 \leq 15, 3x_1 + x_2 \geq 6\}.$$

Konstruieren Sie zusätzliche Ungleichungen $Ax \leq b$ mit ganzzahligen Einträgen in A und b so, dass

$$\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2 : 3x_1 + 5x_2 \leq 15, 3x_1 + x_2 \geq 6, Ax \leq b\} = \text{conv}(\{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 : 3x_1 + 5x_2 \leq 15, 3x_1 + x_2 \geq 6\})$$

gilt und bestimmen Sie p^* .

Aufgabe 12.3 (Präsenzaufgabe) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 11/4 \\ -9/16 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Chvátal-Gomory Abschluss P' von $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$.

Tipp: Machen Sie sich eine Skizze von P , um "wichtige" Schnitthyperebenen zu identifizieren.

Abgabe: Bis Freitag, 5. Juli 2019, 8 Uhr.

Aufgaben 12.1 und 12.2 im Schließfach im Studierendenarbeitsraum im MI (Raum 3.01) einwerfen. Bitte Namen, Matrikelnummer sowie **Übungsgruppennummer** auf die Abgabe schreiben.