Einführung in die Mathematik des Operations Research

Sommersemester 2019

— Blatt für die Sonderübung am 12. Juli —
(Dieses Blatt wird nicht abgegeben!)

Die Sonderübung findet am 12.7.2019 von 12 - 16 Uhr in Hörsaal H230 im COPT Gebäude statt. Das vorliegende Blatt dient nur zu ihrer Vorbereitung auf die Sonderübung. Sowohl Blatt als auch Sonderübung werden von den Übungsleitern eigenständig durchgeführt.

1 Dualisieren

Um ein lineares Programm zu dualisieren, muss man im Prinzip nur die Standardform von primalem und dualem Programm kennen und wissen, wie man ein lineares Programm auf Standardform bringen kann.

1.1 Standardform

Ein primales LP in Standardform ist

$$p^* = \max\{c^T x : Ax \le b\}.$$

Das duale LP dazu ist

$$d^* = \min\{y^T b : y \ge 0, y^T A = c^T\}.$$

Es gilt immer $p^* \le d^*$, und $p^* = d^*$ gilt, falls beide Mengen gültiger Lösungen nicht leer sind.

1.2 Tricks

Wie kann man ein gegebenes LP auf primale (duale) Standardform bringen? Hier eine Liste von Tricks, die man dafür kennen sollte.

1. Mit -1 multiplizieren, dabei dreht sich das Ungleichungszeichen um. Diesen Trick sollte jeder schon mal gesehen haben.

2. Einen Vektor x schreiben als Ix. Es gilt

$$x \ge 0 \Leftrightarrow Ix \ge 0 \Leftrightarrow -Ix \le 0.$$

   Dies ist ganz nützlich, wenn man eine Bedingung wie $x \ge 0$ verschwinden lassen möchte.

3. Aus einem $=$ ein $\le$ machen. Es gilt

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax \le b \text{ und } Ax \ge b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}.$$

4. Aus einem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem machen (oder umgekehrt). Dafür brauchen wir immer zwei Minusse, eines vor dem ganzen Programm und eines vor der Zielfunktion. Die Nebenbedingungen ändern sich aber nicht. Zum Beispiel

$$\min\{c^T x : Ax = b\} = -\max\{-c^T x : Ax = b\}.$$

5. Schlupfvariablen. Man kann eine gegebene $\leq$ (bzw $\geq$) Ungleichung zu einer Gleichheit machen, indem man auf der kleineren Seite etwas nichtnegatives dazu addiert. Zum Beispiel

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n,\ \exists s \geq 0 : Ax + s = b.$$

   Beachtet, dass s ein Vektor ist mit so viele Einträgen wie Ax (bzw b). Man kann Schlupfvariablen sowohl hinzufügen, als auch in gegebener Situation entfernen.

6. Variablen nichtnegativ machen. Man kann jeden Vektor schreiben als Differenz von zwei nichtnegativen Vektoren

$$x = x^+ - x^- \text{ mit } x^+, x^- \geq 0,$$

   wobei

$$x_i^+ = \begin{cases} x_i, & \text{falls } x_i \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad x_i^- = \begin{cases} -x_i, & \text{falls } x_i < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Diese Technik braucht man, wenn man die zusätzliche Bedingung braucht, dass die Variablen alle $\geq$ sind (wie z. B. bei der dualen Standardform).

1.3 Aufgaben

Für die folgenden Aufgaben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.
Aufgabe 1.1 Bringe das LP

$$\max\{c^T x : x \geq 0, Ax = b\}$$

in primale Standardform.
Aufgabe 1.2 Bringe das LP

$$\min\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}, Ax + s = b\}$$

in primale Standardform.
Aufgabe 1.3 Bringe das LP

$$\min\{y^T b : y^T A = c^T\}$$

in duale Standardform.
Aufgabe 1.4 Bringe das LP

$$\max\{y^T b : y \geq 0, y^T A \leq c^T\}$$

in duale Standardform.
Aufgabe 1.5 Dualisiere alle Programme von oben.

2 Kuerzeste Wege

Aufgabe 2.1
Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ Start- bzw. Zielknoten und $l : A \to \mathbb{R}$ eine Laengenfunktion auf den Kanten. Wir betrachten die beiden Programme

$$p^* := \max\{p(t) - p(s) : p : V \to \mathbb{R} \text{ Potential}\}$$

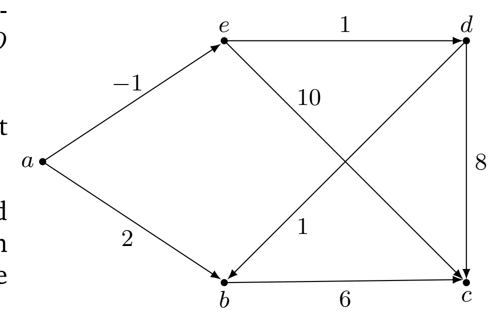
und

$$d^* := \min\{l(P) : P \text{ ist } s\text{-}t\text{-Weg}\}.$$

1. Wann gilt $p^* = d^*$?
2. Formuliere die beiden Programme als lineare Programme.

Aufgabe 2.2

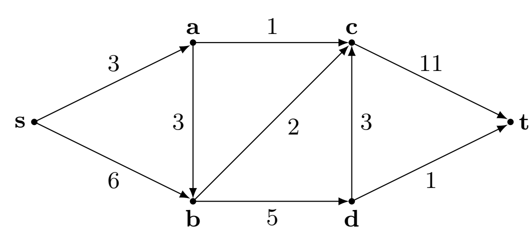
1. Es sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph mit Kantenlängenfunktion $l : A \to \mathbb{R}$. Wie ist ein *Potential* von D und l definiert?
2. Zeigen Sie: Falls D und l ein Potential besitzen, dann enthält D keine Kreise negativer Länge.
3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Bellman-Ford einen kürzesten Weg vom Knoten a zum Knoten c in dem rechtsstehenden Graphen, der keine Kreise negativer Länge besitzt.



3 Fluesse in Netzwerken

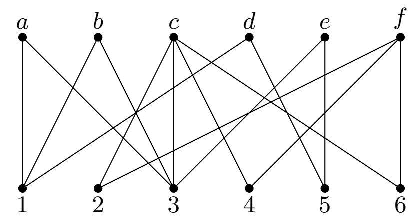
Aufgabe 3.1

1. Bestimmen Sie einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität in folgendem gerichteten Graphen (mit angegebener Kapazitätsfunktion). Begründen Sie Ihre Antwort.



4 Matchings in bipartiten Graphen

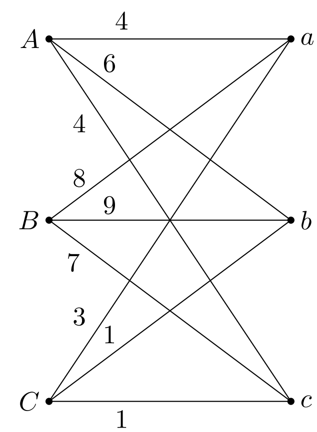
Aufgabe 4.1 Sei G der folgende Graph:



1. Bestimmen Sie $\nu(G) = \max\{|M| : M \subseteq E \text{ ist ein Matching in G}\}$ und geben Sie ein optimales Matching an.
2. Bestimmen Sie $\tau(G) = \min\{|U| : U \subseteq V \text{ ist eine Knotenüberdeckung}\}$ und geben Sie eine optimale Knotenüberdeckung an.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.2



1. Berechnen Sie mit Hilfe der ungarischen Methode ein Matching mit maximalem Gewicht für den rechtsstehenden Graphen.

5 Konvexitaet

Aufgabe 5.1

1. Sei B_n die Einheitskugel bezüglich der euklidischen Norm. Zeigen Sie, dass B_n konvex ist.
2. Zeigen Sie, dass $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Extrempunkt von B_n ist.

Aufgabe 5.2

1. Zeigen Sie, dass ein Polyeder eine konvexe Menge ist.

Aufgabe 5.3

Sei $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2^2\}$ und $z = \binom{-1}{0}$.

1. Zeigen Sie, dass C konvex ist.
2. Berechnen Sie $\pi_C(z)$, die metrische Projektion von z auf C. Dokumentieren Sie Ihr Vorgehen.

   Zur Erinnerung: $\pi_C(z)$ ist das eindeutige $y \in C$ mit $\|y - z\| = \inf_{x \in C} \|x - z\|$.
3. Finden Sie eine Stützhyperebene von C, die C von z trennt. Begründen Sie Ihre Antwort.

6 Polyedertheorie/Lineare Optimierung

Aufgabe 6.1

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge.

1. Bestimmen Sie alle Extrempunkte des Polyeders:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6.2

1. Betrachten Sie das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Sind $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Extrempunkte von P? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.3

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor. Zeigen Sie: Es gibt ein $x \geq 0$ mit $Ax \leq b$ genau dann, wenn für alle $y \geq 0$ mit $A^\mathsf{T} y \geq 0$ stets $b^\mathsf{T} y \geq 0$ gilt.

7 Algorithmen der linearen Optimierung

Aufgabe 7.1
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finde mit Hilfe von Fourier-Motzkin einen Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ mit $y \geq 0$, $y^T A = 0$ und $y^T b < 0$.

Aufgabe 7.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Program, einmal mit dem Fourier-Motzkin Verfahren und einmal mit dem Simplexverfahren.

$$\begin{aligned} p^* = \max \quad & c^\mathsf{T} x \\ & x \in \mathbb{R}^3 \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

und geben Sie eine optimale Ecke an.
Aufgabe 7.3

1. Gegeben sei ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

   Sei π:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $(x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T} \mapsto x_3$, die Projektion auf die letzte Koordinate. Berechnen Sie die Projektion $\pi(P)$.

8 Ganzzahlige lineare Optimierung und VU Matrizen

Aufgabe 8.1

1. Ist die folgende Matrix vollständig unimodular? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.2

1. Prüfen Sie, ob folgende Matrix vollständig unimodular ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.3

1. Zeigen Sie, dass

$$P = \{(x_1, \dots, x_n, y)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq 0} : y \leq 1 \text{ und } x_i \leq y \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

nur ganzzahlige Ecken hat.

9 Polytope und bipartite Graphen

Aufgabe 9.1 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Knotenüberdeckung von G ist eine Teilmenge der Knoten $U \subseteq V$, so dass $|U \cap e| \geq 1$ für alle $e \in E$ gilt. Das Knotenüberdeckungspolytop von G ist definiert als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Knotenüberdeckungen.

1. Beschreibe das Knotenüberdeckungspolytop

$$\text{conv}\{\chi^C : C \subseteq V \text{ ist Knotenüberdeckung von } G\}$$

mit Hilfe von linearen Ungleichungen und weise die Mengengleichheit nach.

2. Es sei $w \colon V \to \mathbb{Z}$ eine Gewichtsfunktion auf den Knoten. Das maximale Gewicht einer Knotenüberdeckung von G ist definiert als

$$\max\{\sum_{v \in C} w(v) : C \text{ ist Knotenüberdeckung}\}.$$

Finde eine Min-Max-Relation für die Bestimmung einer Knotenüberdeckung von G mit maximalem Gewicht.

Aufgabe 9.2 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine Kantenüberdeckung von G ist eine Teilmenge der Kanten $F \subseteq E$, so dass $V = \bigcup_{e \in F} e$ gilt. Das Kantenüberdeckungspolytop von G ist definiert als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Kantenüberdeckungen. Beschreibe das Kantenüberdeckungspolytop

$$\text{conv}\{\chi^F : F \subseteq E \text{ ist Kantenüberdeckung in } G\}$$

mit Hilfe von linearen Ungleichungen und weise die Mengengleichheit nach.

Aufgabe 9.3 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Ein Matching von G ist eine Teilmenge der Kanten $M \subseteq E$, so dass für alle $e, f \in M$ gilt, dass $e \cap f = \emptyset$. Das Matchingpolytop von G ist definiert als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von Matchings. Beschreibe das Matchingpolytop

$$\text{conv}\{\chi^M : M \subseteq E \text{ ist Matching in } G\}$$

mit Hilfe von linearen Ungleichungen und weise die Mengengleichheit nach.
Aufgabe 9.4 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Ein Matching $M \subseteq E$ von G heißt perfekt, falls $V = \bigcup_{e \in M} e$. Beschreibe das Perfekte-Matchingpolytop

$$\mathrm{conv}\{\chi^M : M \subseteq E \text{ ist perfektes Matching in } G\}$$

mit Hilfe von linearen Ungleichungen und weise die Mengengleichheit nach.
Aufgabe 9.5 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Eine unabhängige Menge von G ist eine Teilmenge der Knoten $U \subseteq V$, so dass für alle $u, v \in U$ gilt, dass die Kante $\{u, v\} \notin E$. Das Unabhängigkeitspolytop von G ist definiert als die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren von unabhängigen Mengen. Beschreibe das Unabhängigkeitspolytop

$$\mathrm{conv}\{\chi^U : U \subseteq V \text{ ist unabhängige Menge in } G\}$$

mit Hilfe von linearen Ungleichungen und weise die Mengengleichheit nach.

9.1 Übersicht über die Beschreibungen mit linearen Ungleichungen

Hier die Ergebnisse der letzten Aufgaben zur Übersicht. Die Beschreibung mit linearen Ungleichungen ist einmal mit und einmal ohne die Inzidenzmatrix A von G gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{conv}\,\{\chi^U : U \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung}\} &= \{x \in \mathbb{R}^V : 0 \le x \le 1,\ A^T x \ge 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^V : 0 \le x \le 1,\ x_u + x_v \ge 1\ \forall e = \{u, v\} \in E\} \\
\mathrm{conv}\,\{\chi^F : F \subseteq E \text{ Kantenüberdeckung}\} &= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1, Ax \ge 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1,\ \sum_{e : v \in e} x_e \ge 1\ \forall v \in V\} \\
\mathrm{conv}\,\{\chi^M : M \subseteq E \text{ Matching}\} &= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1,\ Ax \le 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1,\ \sum_{e : v \in e} x_e \le 1\ \forall v \in V\} \\
\mathrm{conv}\,\{\chi^M : M \subseteq E \text{ perfektes Matching}\} &= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1,\ Ax = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \le x \le 1,\ \sum_{e : v \in e} x_e = 1\ \forall v \in V\} \\
\mathrm{conv}\,\{\chi^W : W \subseteq V \text{ unabhängige Menge}\} &= \{x \in \mathbb{R}^V : 0 \le x \le 1, A^T x \le 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^V : 0 \le x \le 1, x_u + x_v \le 1\ \forall e = \{u, v\} \in E\}
\end{aligned}$$

Hierbei kann man beim Unabhängigkeitspolytop die Bedingung $x \le 1$ weglassen, falls es keine isolierten Knoten gibt. Beim Matchingpolytop und Perfekten-Matchingpolytop kann man die Bedingung $x \le 1$ immer weglassen, sie steckt schon in der Bedingung $Ax \le 1$ (bzw. $Ax = 1$). Das ist hilfreich, wenn man dualisieren möchte.

10 Max-Min-Relationen in bipartiten Graphen

10.1 Aufgaben

Aufgabe 9.6 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Zeige, dass

$$\max\{|U| : U \subseteq V \text{ unabhängige Menge}\} = \min\{|F| : F \subseteq E \text{ Kantenüberdeckung}\}$$

gilt, falls G keine isolierten Knoten besitzt.
Aufgabe 9.7 Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Zeige, dass

$$\max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching}\} = \min\{|C| : C \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung}\}$$

gilt.

10.2 Übersicht

Noch eine kleine Übersicht über die Min-Max-Relationen in bipartiten Graphen:

$$\begin{aligned} \max\{|M| : M \subseteq E \text{ Matching}\} &= \min\{|C| : C \subseteq V \text{ Knotenüberdeckung}\} \\ \max\{|U| : U \subseteq V \text{ unabhängige Menge}\} &\leq \min\{|F| : F \subseteq E \text{ Kantenüberdeckung}\}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit bei unabhängige Menge und Kantenüberdeckung gilt nur, falls der Graph keine isolierten Knoten besitzt. Sonst gibt es keine Kantenüberdeckung (isolierte Knoten kann man nicht überdecken) und das Minimum über die leere Menge ist $+\infty$.