

Skript

Stochastische Differentialgleichungen

(Einführung in die Stochastische Analysis)

Max v. Renesse

Aufgezeichnet von Tobias Weihrauch

Wintersemester 2012/13

Universität Leipzig

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Die Brown'sche Bewegung	7
2.1	Gauß-Maße in \mathbb{R}^d	7
2.2	Konstruktion der Brown'schen Bewegung	12
3	Das stochastische Integral	20
3.1	Der naive Zugang	20
3.2	Technischer Abschnitt: Filtration, Messbarkeit, Stoppzeiten	23
3.3	Martingale in stetiger Zeit	29
3.3.1	Optional Sampling	32
3.3.2	Konvergenzsätze und Abschließbarkeit von Martingalen	35
3.3.3	Anwendung bei der Brown'schen Bewegung	39
3.4	Quadratische Variation von Semi-Martingalen	41
3.5	Konstruktion des stochastischen Integrals	55
3.6	Zusammenfassung	60
4	Weitere Eigenschaften des stochastischen Integrals	61
4.1	Satz von der Dominierten Konvergenz	61
4.2	Ito-Formel (Kettenregel)	62
5	Erste Anwendungen	65
5.1	Lösung des Poisson-Problems der Elektrostatik	65
5.2	Finanzmathematik: Black-Scholes-Modell	66
6	Transformations- und Darstellungseigenschaften von Semimartingalen	72
6.1	Exponentielle Martingale und Levy-Charakterisierung der Brown'schen Bewegung	72
6.2	Martingale als zeittransformierte Brown'sche Bewegung	75
6.2.1	Vorhersagbare Integraldarstellung von Pfadfunktionalen	78
6.3	Satz von Girsanov	80
6.4	Nachtrag zum Unterschied zwischen "echten" und lokalen Martingalen . . .	83
7	Stochastische Differentialgleichungen	84
7.1	Pfadweise Eindeutigkeit unter lokaler Monotoniebedingung	86
7.2	Existenz starker Lösungen unter Lipschitz-Bedingung	89
7.3	Schwache Lösungen	92
7.3.1	Beispiel: Schwache Lösung durch Girsanov-Transformation	92
7.3.2	Verteilungs- vs. Pfadweise Eindeutigkeit	93
7.4	Schwache Lösungen und das Martingalproblem	94
7.5	Anwendung auf PDE zweiter Ordnung: Methode der "stochastischen Charakteristiken"	95
8	Kurzer Ausblick in Schlagworten	96

Vorbemerkung

Dies ist das Skript der Vorlesung “Stochastische Differentialgleichungen”, gehalten als Einführung in die Stochastische Analysis im Wintersemester 2012/2013 an der Universität Leipzig im Diplomstudiengang Mathematik. Neben einem Grundwissen in Maßtheorie werden Basiskenntnisse in Wahrscheinlichkeitstheorie (Zufallsvariablen, Verteilungen, Unabhängigkeit etc.) vorausgesetzt aber keinerlei Vertrautheit mit stochastischen Prozessen.

Entsprechend wird zu Beginn die Brownsche Bewegung als Grundobjekt der Stochastischen Analysis mit der Levy-Konstruktion eingeführt. Dieser Teil ist dem ersten Kapitel von *Brownian Motion* von P. Mörters und Y. Peres (Cambridge Univ. Press) entnommen. Die weiteren Abschnitte folgen dann dem kanonischen Aufbau einer Vorlesung über stochastische Analysis.

Als Hauptquellen dienten

- *Continuous Martingales and Brownian Motion* von D. Revuz und M. Yor (Springer Grundlehren).
- *Stochastische Analysis* (Skript) von Karl-Theodor Sturm, Universität Bonn.

1 Einführung

Deterministischer Fluss eines Partikels in einem Strömungsfeld

Wir betrachten die Bewegung $x = x(t) \in \mathbb{R}^d$ eines Partikels in dem Strömungs- bzw. Geschwindigkeitsfeld $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Die 'Integralkurven' zu F bzw. Flusslinien sind die Lösungen der DGL

$$\dot{x} = F(x),$$

was wir auch schreiben wollen in der Form

$$dx_t = F(x_t) \cdot dt.$$

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow R$ eine Ortsfunktion ('Observable') und

$$O(t) = \varphi(x(t))$$

die Observable ausgewertet auf der Flusslinie. Führen wir die Schreibweise

$$\mu_t(dx) = \delta_{x_t}(dx)$$

für die zugehörige Familie von Dirac-Maßen in $(x_t)_{t \geq 0}$ ein, schreibt sich die Zeitentwicklung der Observablen auf der Bahnkurve $\frac{d}{dt}O(t) = \frac{d}{dt} \left(\int F(x) \delta_{x(t)}(dx) \right) = \frac{d}{dt} \int F(x) \mu_t(dx)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}O(t) &= (\nabla \varphi)(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= \nabla \varphi(x(t)) \cdot F(x(t)) \\ &= \int \nabla \varphi(x) F(x) \delta_{x(t)}(dx) \\ &= \int \varphi(x) \cdot \operatorname{div}(F \mu_t) dx, \end{aligned}$$

wobei wir den Ausdruck $\operatorname{div}(F \mu_t)$ als verallgemeinerte distributionelle Ableitung des vektorwertigen Maßes $F(x) \mu(dx)$ mit $\mu(dx) = \delta_{x(t)}(dx)$ auffassen. Entsprechend löst die Familie von Maßen $t \rightarrow \mu_t = \delta_{x(t)}$ die maßwertige Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}(\mu_t) = -\operatorname{div}(F \mu_t).$$

Gleiches gilt natürlich auch, wenn wir die Evolution von $(\mu_t)_{t \geq 0}$ mit einer Punktmenge starten, d.h. falls z.B. $\mu_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_0^{(i)}}$, $\dot{x}_t^{(i)} = F(x_t^{(i)})$. Dann löst $\mu_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_t^{(i)}}$ die PDE

$$\dot{\mu} = -\operatorname{div}(F \mu).$$

Mikroskopische Fluktuationen der Bahnkurven

Brown'sche (Molekular-)Bewegung

In der konkreten Beobachtung sieht man jedoch mikroskopische Fluktuationen "um die Trajektorien herum", etwa als Zitterbewegung von Pollenstaub-Körnchen in einer Kon-

servierungsflüssigkeit¹, was auf das Konzept der “Brown’schen Molekularbewegung” führt.

Die ungestörte Brown’sche Bewegung ist dabei eine zufällige Bewegung $0 \leq t \rightarrow B_t \in \mathbb{R}^d$, so dass

- die Trajektorie $t \rightarrow B_t$ ist stetig,
- die Zuwächse von $(B_t)_{t \geq 0}$ der Form $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, i = 1, \dots, N\}$ für eine beliebige Wahl $t_N \geq t_{N-1} \geq \dots \geq t_1 \geq t_0 = 0$ sind unabhängige standard-normalverteilte zentrierte Zufallsvariablen mit Varianz $\text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = d(t_i - t_{i-1})$

Die Existenz der Brown’schen Bewegung als rigoros definierbares mathematisches Objekt wird im folgenden Abschnitt bewiesen. Die Modellierung eines Brown’schen Partikels im Strömungsfeld erfolgt jetzt durch den Ansatz

$$dx_t = F(x_t) dt + dB_t.$$

Hierbei ist dB_t das infinitesimale Inkrement einer Brown’schen-Bewegung, den der Partikel als zufälligen Stör-Impuls zum Zeitpunkt t erhält.

Die obige Gleichung ist ein Beispiel für eine stochastische Differentialgleichung. Sie ist formal äquivalent zu

$$\dot{x} = F(x) + \dot{B},$$

doch wir werden sehen, dass $t \rightarrow B_t$ nicht differenzierbar ist, so dass von \dot{B}_t nicht sinnvoll gesprochen werden kann. Dennoch hat diese Gleichung über den Umweg des weiter unten eingeführten Ito-Integrals einen Sinn, genauso wie eine eindeutige Lösung, sofern wir geeignete Annahmen an das Vektorfeld F machen.

Evolution der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Sei x nun eine solche Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dx_t = F(x)dt + dB_t, \quad x(0) = x_0.$$

Die Position von x_t ist nun nicht mehr allein von der Startbedingung x_0 sondern auch von den realisierten Impulsen $(s \rightarrow dB_s(\omega))_{s \in [0,t]}$ ab. Hierbei bezeichnet $\omega \in \Omega$ für einen gewissen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) den Zufallsparameter zur Beschreibung der realisierten treibenden Brown’schen Bewegung $t \rightarrow B_t(\omega)$.

Statt von einem deterministischen Ort für x_t sprechen wir also nun von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Aufenthalt von x_t , die definiert ist

$$\mu_t = \text{Verteilung von } x_t,$$

¹ Brown, Robert, ”A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.” Phil. Mag. 4, 161 – 173, 1828.

bzw. gleichwertig durch Festlegung der zugehörigen Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \mu_t(dx) := \mathbb{E}[\varphi(x_t)],$$

wobei φ beliebig aus der Klasse der stetigen beschränkten (Test-)Funktionen auf \mathbb{R}^d genommen ist.

Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung $t \rightarrow \mu_t$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten führen wir eine formale Taylor-Entwicklung durch und erhalten (im Fall $d = 1$)

$$d\varphi(x_t) = \varphi'(x_t)dx_t + \frac{1}{2}\varphi''(x_t)(dx_t)^2 + \frac{1}{6}\varphi'''(x_t)(dx_t)^3 + \dots$$

Hierbei bezeichnen dx das infinitesimale Inkrement von und $(dx_t)^2, (dx_t)^3$ die infinitesimalen 'quadratischen bzw. kubischen Inkremente' etc. von $(t \rightarrow x_t)_{t \geq 0}$. Durch Einsetzen von

$$dx_t = F(x_t)dt + dB_t, \quad (dx_t)^2 = dt, \quad (dx_t)^k = 0 \forall k \geq 3. \quad (+)$$

erhalten wir hieraus, dass

$$d\varphi(x_t) = \varphi'(x_t)F(x_t)dt + \varphi'(x_t)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''(x_t)dt. \quad (*)$$

Die Ersetzung (+) werden wir im Zusammenhang mit der Ito-Formel beweisen. Als heuristische Begründung wollen wir an dieser Stelle lediglich anführen, dass für das deterministische Inkrement dt in $dx = F(x)dx + dB_t$ gilt

$$dt = dt, \quad (dt)^k = 0, k \geq 2$$

und für das stochastische (Brown'sche) Inkrement

$$t \rightarrow B_t \approx \sqrt{t} \Rightarrow (dB_t)^2 = dt, \quad (dB_t)^k = 0, k \geq 3.$$

Wegen der Zentriertheit der Inkremente dB_t fällt beim Übergang zum Erwartungswert in (*) der Term $\varphi'(x_t)dB_t$ heraus, und wir erhalten

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}(\varphi(x_t)) &= \mathbb{E}(d\varphi(x_t)) \\ &= \mathbb{E}\left(\varphi'(x_t)F(x_t)dt + \frac{1}{2}\varphi''(x_t)dt\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [\varphi'(x)F(x) + \frac{1}{2}\varphi''(x)]\mu_t(dx) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)[-(F(x)\mu_t(x))' + \frac{1}{2}\mu_t'']dx dt. \end{aligned}$$

Somit löst die Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $t \rightarrow \mu_t$ die Differentialgleichung

$$\dot{\mu}_t = -(F\mu)' + \frac{1}{2}\mu_t'',$$

bzw. im Fall von $d \geq 2$

$$d\mu_t = -\operatorname{div}(F\mu) + \Delta\mu,$$

wobei $\Delta\mu = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mu$ den Laplace-Operator bezeichnet. Aus der ursprünglichen PDE ersten Grades für μ_t ist nun eine PDE zweiten Grades geworden. Gleichungen von diesem Typ heißen Diffusionsgleichungen. Stochastische Differentialgleichungen sind damit ein Möglichkeit, Lösungen von makroskopischen Gleichungen der Physik mithilfe einer mikroskopischen stochastischen Theorie durch Übergang zum Erwartungswert zu lösen.

Anwendungsbeispiel: Poisson-Gleichung der Elektrostatik

Sei $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Potentialfunktion auf dem Rand von Ω . Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u \upharpoonright_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u(x) = \mathbb{E}(\varphi(B_{T_{\partial\Omega}}^x))$$

Das ist eine stochastisch gefundene Lösung der PDE.

Anwendungsbeispiel: Modelle der Finanzmathematik

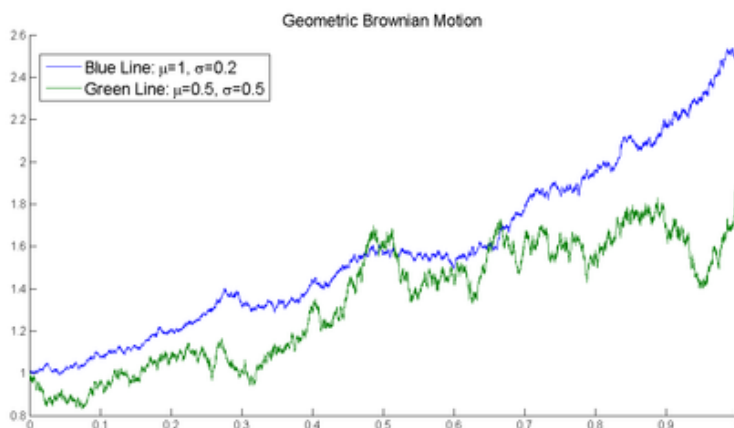
Eine andere wichtige Anwendung der Stochastischen Differentialgleichungen ist die Finanzmathematik. Es sei S_t der Wert der Daimler-Benz Aktie zum Zeitpunkt t . Bei der iterativen Verfeinerung der Zeitintervalle tritt das Phänomen der 1-dimensionalen Brownschen Bewegung auf.

Die Lösung S_t der DGL

$$dS_t = \alpha \cdot S_t dt + \sigma dB_t$$

ist die geometrische Brown'sche Bewegung und das Grundmodell für Finanzmärkte in kontinuierlicher Zeit. Die Lösung hiervon ist gegeben durch

$$S_t = S_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$



Quelle: Wikipedia

2 Die Brown'sche Bewegung

Wir führen die Abkürzung BM (kurz für engl. *brownian motion*) für die Brown'sche Bewegung ein. Die Brown'sche Bewegung kann als eine Normalverteilung auf dem unendlich-dimensionalen Vektorraum der stetigen Pfade verstanden werden. In der Tat kann man sie durch einen Rückwärts-Limes aus endlich-dimensionalen Projektionen gewinnen. Die Projektionen sind dann multidimensionale Gauß-Maße.

2.1 Gauß-Maße in \mathbb{R}^d

Definition 2.1 (Normalverteilung).

$$\nu_{m,v}(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, genannt *Normalverteilung* mit Erwartungswert m und Varianz $v > 0$.

Bemerkung.

1. Mit $v = 0$ entsteht das Dirac-Maß im Punkt m

$$\nu_{m,0}(dx) = \delta_m(dx)$$

2. Es gilt $\sqrt{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, denn es gilt nach Fubini:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} (2\pi) \cdot r \cdot e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Satz 2.2 (Laplace-Transformation von $\nu_{m,v}$). *Es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda \cdot x} \nu_{m,v}(dx) &= \mathbb{E}_{m,v}(e^{\lambda \cdot X}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda \cdot x} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \\ &= e^{\lambda \cdot m + \frac{v}{2} \cdot \lambda^2} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \cdot \int e^{\lambda(x+m)} e^{-\frac{x^2}{2v}} dx \\
&= e^{\lambda \cdot m} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int e^{\lambda x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2v}} dx \\
&= e^{\lambda \cdot m} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int e^{-\frac{1}{2v} [-(\lambda v)^2 + (x-\lambda v)^2]} dx \\
&= e^{\lambda \cdot m} e^{\frac{v}{2} \lambda^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \int e^{-\frac{(x-\lambda v)^2}{2v}} dx}_{=1} \\
&= e^{\lambda \cdot m + \frac{v}{2} \lambda^2}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Die Verteilung einer reellwertigen Zufallsvariablen

$$X : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

ist eindeutig durch die zugehörige Laplace-Transformation

$$\Lambda = \Lambda_X : \mathcal{D}(\Lambda) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Lambda_X(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X})$$

bestimmt.

Korollar 2.3. Falls $X \simeq \nu_{m_1, v_1}$, $Y \simeq \nu_{m_2, v_2}$ und falls X und Y stochastisch unabhängig sind, so gilt

$$Z := X + Y \simeq \nu_{m_1+m_2, v_1+v_2}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\lambda \cdot Z}) &= \mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X} \cdot e^{\lambda \cdot Y}) \stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}(e^{\lambda \cdot X}) \cdot \mathbb{E}(e^{\lambda \cdot Y}) \\
&= e^{\lambda m_1 + \frac{v_1}{2} \lambda^2} \cdot e^{\lambda m_2 + \frac{v_2}{2} \lambda^2} = e^{\lambda(m_1+m_2) + \frac{v_1+v_2}{2} \lambda^2}
\end{aligned}$$

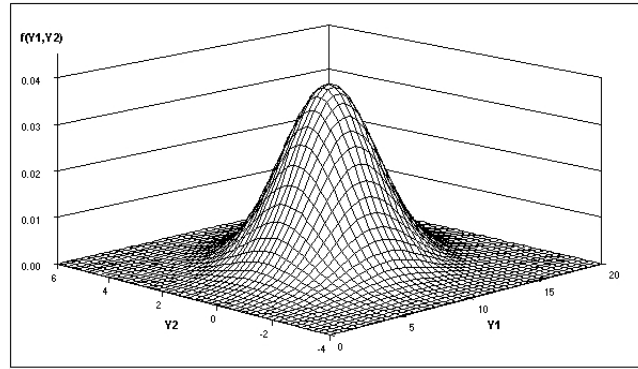
□

Definition 2.4 (Multivariate Normalverteilung). Für $A \in \mathbb{R}_{symm, >0}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\nu_{b, A}(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \cdot e^{-\frac{\langle x-b, A^{-1}(x-b) \rangle}{2}} dx_1 \dots dx_n$$

heißt *multivariate Normalverteilung* im \mathbb{R}^n mit Erwartungswert b und Kovarianzmatrix A .

Bemerkung. Die Dichte der multivariaten Normalverteilung könnte mit $n = 2$ beispielsweise so aussehen:



Satz 2.5. *Es gilt:*

1. $\nu_{b,A}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}^n .
2. Für $\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\Lambda(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{\langle \lambda, X \rangle} \nu_{b,A}(dx) = e^{\langle \lambda, b \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda, A \lambda \rangle}$$

Beweis.

1. OBdA gelte $b = 0$. Falls $A = E_n$ ist, gilt

$$\nu_{0, E_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} dx$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nu_{0, E_n}(dx) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} dx_n \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall: Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n} : B^t \cdot B = A$ eine Cholesky-Zerlegung von A . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle x, A^{-1} x \rangle}{2}} dx &\stackrel{x=B^t y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle B^t y, A^{-1} B^t y \rangle}{2}} \left| \frac{dx}{dy} \right| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle y, B A^{-1} B^t \cdot y \rangle}{2}} |\det B| dy \\ &= |\det B| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y\|^2}{2}} dy = |\det B| \cdot \sqrt{2\pi}^n \\ &= \sqrt{\det A} \cdot \sqrt{2\pi}^n \end{aligned}$$

2. Seien $X \simeq \nu_{b,A}$, und $\Lambda(\lambda) = \mathbb{E}_X (e^{\langle \lambda, X \rangle})$ für $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt mit der Notation $\langle u, v \rangle_{A^{-1}} = \langle u, A^{-1}v \rangle_{\mathbb{R}^n}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} (e^{\langle \lambda, X \rangle}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, X \rangle} e^{-\frac{\langle x-b, A^{-1}(x-b) \rangle}{2}} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, X \rangle} e^{-\frac{\langle x, A^{-1}x \rangle}{2}} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle A\lambda, A^{-1}x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, A^{-1}x \rangle} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2} [2 \langle A\lambda, x \rangle_{A^{-1}} - \langle x, x \rangle_{A^{-1}}]} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{1}{2} (\langle A\lambda, A\lambda \rangle_{A^{-1}} - \langle x - A\lambda, x - A\lambda \rangle_{A^{-1}})} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} e^{\frac{1}{2} \langle A\lambda, A\lambda \rangle_{A^{-1}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x - A\lambda\|_{A^{-1}}^2}{2}} dx \\
&= e^{\langle \lambda, b \rangle} e^{\frac{1}{2} \langle A\lambda, \lambda \rangle} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\langle x, A^{-1}x \rangle}{2}} dx \\
&= \exp \left(\langle \lambda, b \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda, A\lambda \rangle \right)
\end{aligned}$$

□

Satz 2.6.

1. $X \simeq \nu_{b,A}$ ist eindeutig charakterisiert durch

$$\forall z \in \mathbb{R}^n : \langle X, z \rangle \simeq \nu_{\langle b, z \rangle, \langle z, Az \rangle}$$

2. $Kov(X_i, X_j) = A_{ij}$

Beweis.

1. Klar nach Laplace-Transformation.
 2. $Kov(X_i, X_j) = \mathbb{E}((X_i - \mathbb{E}(X_i)) \cdot (X_j - \mathbb{E}(X_j)))$. Daher können wir oBdA annehmen, dass $b_i = b_j = 0$ und damit dann

$$Kov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j)$$

gilt. Sei $z = z(s, t) = \vec{0} + s \cdot \vec{e}_i + t \cdot \vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathbb{E} (e^{\langle z, X \rangle}) = e^{\frac{1}{2} \langle z, Az \rangle} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E} (e^{s \cdot X_i + t \cdot X_j}) = e^{\frac{1}{2} (s^2 A_{ii} + 2st A_{ij} + t^2 A_{jj})}
\end{aligned}$$

Durch Differenzieren der linken Seiten nach t und dann nach s ergibt an der Stelle $(s, t) = (0, 0)$:

$$\mathbb{E}(X_i \cdot X_j \cdot e^{sX_i + tX_j}) \big|_{s=t=0} = \mathbb{E}(X_i X_j)$$

Dasselbe Vorgehen mit der rechten Seite liefert A_{ij} . Es folgt die Behauptung. \square

Korollar 2.7.

1. Falls $N := \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}$ ein Vektor von $(N_i)_{i=1}^n$ identisch unabhängig $\nu_{0,1}$ -verteilten Zufallsvariablen ist, ist $X := B \cdot N + b$ für $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ multivariat Gauß-verteilt, genauer

$$X \simeq \nu_{b,A}$$

mit

$$A = B \cdot B^t$$

2. Für $X \simeq \nu_{b,A}$ sind die Zufallsvariablen $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ genau dann stochastisch unabhängig, wenn sie unkorreliert sind, d.h. wenn

$$\text{Kov}(X_i, X_j) = A_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

Beweis.

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, X \rangle}) &= \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, B \cdot N + b \rangle}) \\ &= e^{\langle \lambda, b \rangle} \cdot \mathbb{E}(e^{\langle B^t \lambda, N \rangle}) \\ &= e^{\langle \lambda, b \rangle} e^{\frac{1}{2} \|B^t \lambda\|^2} \\ &= e^{\langle \lambda, b \rangle + \frac{1}{2} \langle B^t \lambda, B^t \lambda \rangle} \\ &= e^{\langle \lambda, b \rangle + \frac{1}{2} \langle \lambda, B \cdot B^t \lambda \rangle} \end{aligned}$$

2. OBdA gelte $b = 0$.

$$\nu_{0,A}(dx) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det A}}}_{:=\varphi(x)} \cdot e^{-\frac{\langle x, A^{-1}x \rangle}{2}} dx_1 \dots dx_n$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \{X_1, \dots, X_n\} \text{ stochastisch unabhängig} &\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi_n(x_n) \\ &\Leftrightarrow \langle x, A^{-1}x \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i)^2 \\ &\Leftrightarrow (A_{ij}^{-1}) = 0 \quad \forall i \neq j \\ &\Leftrightarrow (A_{ij}) = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

\square

2.2 Konstruktion der Brown'schen Bewegung

Definition 2.8 (Stochastischer Prozess). $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und (E, \mathfrak{E}) ein weiterer messbarer Raum. Dann heißt $X_\bullet := (X_i)_{i \in I}$ mit

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (E, \mathfrak{E})$$

messbar ein *stochastischer Prozess*. E heißt dann *Zustandsraum*

Bemerkung.

1. Typische Situationen:

- $I \subseteq \mathbb{N}$ oder $I \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$
- $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

2. Zwei Interpretationen:

- (a) $X_i \rightarrow X_{i+1}$ ist ein 'zufälliges Update'
- (b) Für $\omega \in \Omega$ fest erhält man eine Abbildung

$$X_\bullet(\omega) : I \rightarrow E$$

$$(X_\bullet(\omega))(t) := X_t(\omega)$$

In diesem Fall entspricht ein stochastischer Prozess X_\bullet einer zufälligen Auswahl einer Funktion $I \rightarrow E$. $X_\bullet(\omega)$ heißt *Trajektorie* (festgelegt durch ω).

Definition 2.9 (Brown'sche Bewegung). Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum \mathbb{R} heißt *Brown'sche Bewegung*, falls

1. $X(0) = 0$ fast sicher
2. Die Zuwächse von X_\bullet sind stochastisch unabhängig, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n : \{X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\} \text{ ist stochastisch unabhängig}$$

3. Es gilt $X_t - X_s \simeq \nu_{0,t-s} \forall 0 \leq s \leq t$.
4. Für fast jede Trajektorie von X_\bullet ist

$$t \rightarrow X_t$$

stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Satz 2.10 (Wiener, 1923). *Die Standard-Brown'sche Bewegung existiert.*

Beweis (Levy, 1930).

- Konstruiere zunächst $(X_t)_{t \in [0,1]}$:
 Seien $D_n := \{\frac{k}{2^n} \mid k = 0, \dots, 2^n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} D_n$. Weiter sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem die Familie $\{Z_t \mid t \in D\}$ von i.i.d. $\nu_{0,1}$ -verteilten reellen Zufallsvariablen definiert ist (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^D$, $P = \bigotimes_{d \in D} \nu_{0,1}^{(d)}$). Definiere $(B_d)_{d \in D}$ rekursiv wie folgt:

$$\begin{aligned} B_0 &:= 0, \quad B_1 := Z_1 \\ B_{\frac{1}{2}} &:= \frac{1}{2}(B_0 + B_1) + \frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für $t \in D^n \setminus D^{n-1}$ sei

$$B_t := \frac{1}{2}(B_{t-\frac{1}{2^n}} + B_{t+\frac{1}{2^n}}) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}Z_t$$

Behauptung: $(B) \upharpoonright_D$ erfüllt die Eigenschaften 1. - 3.

1. $(B_t)_{t \in D^n}$ hat unabhängige Zuwächse.
2. Die Zuwächse zwischen nebeneinander liegenden Gitterpunkten von D^n sind $\nu_{0, \frac{1}{2^n}}$ -verteilt.

Beweis durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$:

$n = 0$: klar.

$n = 1$:

Die Zuwächse von B auf D_1 -Gitter sind

$$X_1 = B_{\frac{1}{2}} - B_0 = \frac{1}{2}(B_1 - B_0) + \frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}}$$

und

$$X_2 = B_1 - B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B_1 - B_0) - \frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}}$$

Beide sind als Linearkombination normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt und es gilt

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = 0$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}Z_1 - \frac{1}{2}Z_{\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{4}Z_1^2 - \frac{1}{4}Z_1Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}Z_1Z_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(Z_{\frac{1}{2}})^2\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Damit sind X_1 und X_2 unkorreliert und nach Satz 2.7 unabhängig.

$n - 1 \rightarrow n$:

Für $t \in D_n$ seien $\lfloor t \rfloor := \max \{d \in D_{n-1} \mid d \leq t\}$ und $\lceil t \rceil := \min \{d \in D_{n-1} \mid d \geq t\}$. Seien nun $s, t \in D_n \setminus D_{n-1}$ mit $|s - t| = \frac{1}{2^{n-1}}$. Dann gilt $\lfloor s \rfloor = \lceil t \rceil$ und

$$\Delta_1 = B_{\lfloor s \rfloor} - B_t = B_{\lfloor s \rfloor} - \frac{1}{2}(B_{\lfloor s \rfloor} + B_{\lceil t \rceil}) - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_t$$

$$\Delta_2 = B_s - B_{\lfloor s \rfloor} = \frac{1}{2}(B_{\lceil s \rceil} + B_{\lfloor s \rfloor}) - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_s - B_{\lfloor s \rfloor}$$

$\Rightarrow X = (\Delta_1, \Delta_2)$ ist als Linearkombination von Gauß-Variablen wieder Gauß'sch verteilt mit

$$\mathbb{E}(X) = 0$$

und es gilt

$$\mathbb{E}(\Delta_1 \cdot \Delta_2) = \mathbb{E} \left(\left[\frac{1}{2}(B_{\lfloor s \rfloor} - B_{\lceil t \rceil}) - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_t \right] \cdot \left[\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_s + \frac{1}{2}(B_{\lceil s \rceil} - B_{\lfloor s \rfloor}) \right] \right) = 0$$

nach Induktionsvoraussetzung, weshalb Δ_1 und Δ_2 nach Satz 2.7 unabhängig sind. Analog für mehr als nur 2 Zuwächse.

\Rightarrow Die Familie $(B_t)_{t \in D^n}$ hat unabhängige Zuwächse.

Zur 2. Behauptung: Es gilt

$$\begin{aligned} B_s - B_{\lfloor s \rfloor} &= \frac{1}{2}(B_{\lceil s \rceil} + B_{\lfloor s \rfloor}) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_s - B_{\lfloor s \rfloor} \\ &= \frac{1}{2}(B_{\lceil s \rceil} - B_{\lfloor s \rfloor}) + \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} Z_s \end{aligned}$$

Z_s ist unabhängig von allen $(Z_t)_{t \neq s}$. Ferner gilt nach der Induktionsvoraussetzung

$$B_{\lceil s \rceil} - B_{\lfloor s \rfloor} \simeq \nu_{0, \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(B_s - B_{\lfloor s \rfloor}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

Will man nun die Zuwächse z.B. für $t \in D^n$, $h \in D^m$ mit $m \geq n$ berechnen, schreibt man

$$B_{t+h} - B_t = \sum_{\substack{k_i \in D^m \\ k_i \in \{0, 2^{-m}, \dots, h\}}} (B_{t+k_i} - B_{t+k_{i-1}})$$

wobei $B_{t+k_i} - B_{t+k_{i-1}}$ Zuwächse mit D^m -Auflösung und damit unabhängig voneinander sind.

$$\Rightarrow \text{Var}(B_{t+h} - B_t) = \sum_{\substack{k_i \in D^m \\ k_i \in \{0, 2^{-m}, \dots, h\}}} \frac{1}{2^m} = h$$

Für

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \text{ mit } t_i \in D^{m_i}$$

gilt durch Übergang zum Gitter $D^{\max\{m_1, \dots, m_n\}}$, dass

$$\{B_{t_1} - B_0, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\}$$

eine n -elementige Menge von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit

$$B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \simeq \nu_{0, t_k - t_{k-1}}$$

ist.

$(B_t)_{t \in D}$ erfüllt also die in Definition 2.9 geforderten Eigenschaften 1 - 3, jedoch noch nicht die Stetigkeitseigenschaft. Diese werden wir durch Interpolieren zwischen den Gitterpunkten erreichen.

Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $F_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_0(t) = \begin{cases} 0 & , t = 0 \\ Z_1 & , t = 1 \\ \text{linear dazwischen} & \end{cases}$$

und

$$F_n(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} Z_t & , t \in D^n \setminus D^{n-1} \\ 0 & , t \in D^{n-1} \\ \text{linear dazwischen} & \end{cases}$$

\Rightarrow Für $t \in D^n$ gilt

$$B_t = \sum_{i=0}^n F_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(t)$$

Ferner gilt (siehe Lemma 2.11 unten) für $c > 0$ und n hinreichend groß ($c^2 n > 1$):

$$P(|Z_t| > c\sqrt{n}) \leq e^{-\frac{c^2 n}{2}}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P(\exists t \in D_n : |Z_t| > c \cdot \sqrt{n}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t \in D_n} P(|Z_t| > c \cdot \sqrt{n}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \cdot e^{-\frac{c^2 n}{2}} < \infty \end{aligned}$$

für $c > \sqrt{2 \log(2)}$. Das Borel-Cantelli-Lemma 2.12 (s. unten) liefert

$$P(\exists \text{ unendlich viele } t_n \in D_n : |Z_{t_n}| > c \cdot \sqrt{n}) = 0$$

\Rightarrow Zu P -fast jedem $\omega \in \Omega$ existiert $N = N(\omega)$, sodass

$$\forall n \geq N(\omega) : |Z_{t_n}|(\omega) \leq c \cdot \sqrt{n} \quad \forall t \in D_n$$

$\Rightarrow \|F_n\|_\infty \leq c \cdot \sqrt{n} \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$ für alle $n \geq N(\omega)$. Somit gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|F_i\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{N(\omega)} \|F_i\|_\infty + \sum_{i=N(\omega)+1}^{\infty} c \cdot \sqrt{n} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} < \infty \text{ } P\text{-fast sicher}$$

\Rightarrow Die Reihe $B(t) := \sum_{i=0}^{\infty} F_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, 1]$. Damit ist

$$t \mapsto B(t) = B_t$$

stetig und sie erfüllt auf D die Bedingungen 1-3 an die Brown'sche Bewegung.

Seien

$$0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$$

eine Menge von Zeitpunkten und

$$0 \leq t_1^{(k)} \leq \dots \leq t_n^{(k)} \leq 1$$

eine Folge von Intervallunterteilungen mit $t_i^{(k)} \in D$ und

$$t_i^{(k)} \rightarrow t_i$$

Dann gilt

$$B^{(k)} := (B_{t_1^{(k)}, \dots, t_n^{(k)}}) \rightarrow (B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) =: B \text{ } P\text{-fast sicher}$$

Insbesondere gilt für die Laplace-Transformierte

$$\mathbb{E}(e^{\langle z, B \rangle}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{\langle z, B^{(k)} \rangle})$$

Es folgen die Bedingungen 1-3 für $(B_t)_{t \in [0,1]}$.

- Für $t > 1$ setzen wir die BM einfach durch unabhängiges 'Verkleben' von Kopien von $(B_t)_{t \in [0,1]}$ fort. Sei $\{(B^{(k)})_{t \in [0,1]} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann definiere

$$\widehat{B}_t := \begin{cases} B_t^{(1)} & , t \in [0, 1] \\ \widehat{B}_{[t]} + B_{t-[t]}^{([t])} & , t > 1 \end{cases}$$

□

Bemerkung.

$$(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \curvearrowright \sum_{i=0}^{\infty} f_i =: F$$

ist definiert, falls

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|_\infty < \infty$$

denn dann konvergiert die Folge der Partialsummen

$$\sum_{i=0}^N f_i(t) = F_N(t)$$

mit $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen eine gewisse Funktion

$$F := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N f_i$$

Insbesondere ist die Funktion F als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen F_N stetig.

Lemma 2.11. *Sei $X \simeq \nu_{0,1}$. Dann gilt:*

$$P(|X| > c) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}}, \quad c \gg 1$$

Beweis.

$$\begin{aligned} P(|X| > c) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_c^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_c^\infty \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}} \end{aligned}$$

□

Lemma 2.12 (Borel-Cantelli). *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathfrak{F}$ eine Folge von Ereignissen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

Dann gilt

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) = 0$$

Beweis. Sei $C_n := \bigcup_{m \geq n} A_m$. Dann ist C_n eine fallende Folge von Mengen, d.h. es gilt

$$C_n \supseteq C_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Durch die Stetigkeit von Maßen folgt

$$P(C_n) \rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

Andererseits gilt auch

$$P(C_n) = P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) \leq \sum_{m \geq n} P(A_m) \rightarrow 0$$

Aus der Eindeutigkeit des Limes folgt die Behauptung. \square

Satz 2.13. Falls B_\bullet eine standard-BM ist, so auch

1. $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$
2. $(-B_t)_{t \geq 0}$
3. $t \mapsto c \cdot B_{\frac{1}{c^2}t} \quad \forall c > 0$
4. $X_t := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ t \cdot B_{\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \end{cases}$

Beweis. Wir beweisen nur 2 Aussagen:

3.:

- $t \mapsto cB_{\frac{1}{c^2}t}$ ist stetig.
- Für $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ sind

$$\left\{c(B_{\frac{1}{c^2}t_i} - B_{\frac{1}{c^2}t_{i-1}} \mid i = 1, \dots, n)\right\}$$

unabhängig und normalverteilt. Mit $s_i := \frac{1}{c^2}t_i$ gilt

$$\text{Var}(c(B_{\frac{1}{c^2}t_i} - B_{\frac{1}{c^2}t_{i-1}})) = c^2(s_i - s_{i-1}) = c^2\left(\frac{t_i}{c^2} - \frac{t_{i-1}}{c^2}\right) = t_i - t_{i-1}$$

4.:

Für $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ist

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = (t_1 B_{\frac{1}{t_1}}, \dots, t_n B_{\frac{1}{t_n}})$$

multidimensional Gauß'sch. Entsprechend ist

$$\underbrace{(X_{t_1} - X_0, \dots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}})}_{=: Z_1}, \dots, \underbrace{(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}_{=: Z_n}$$

multidimensional Gauß'sch. Es reicht also die Unkorreliertheit der Z_i 's zu überprüfen.

$$\text{Kov}(Z_i, Z_j) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall i \neq j$$

Wir wissen zunächst, dass

$$\mathbb{E}(Z_i) = 0 \quad \forall i$$

gilt. Weiter haben wir

$$\mathbb{E}(Z_i Z_j) = \mathbb{E}(X_{t_i} X_{t_j}) - \mathbb{E}(X_{t_{i-1}} X_{t_j}) - \mathbb{E}(X_{t_i} X_{t_{j-1}}) + \mathbb{E}(X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}})$$

Beachte, dass für (o.B.d.A. $t \geq s$) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_s B_t) &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s + B_s)) \\ &= \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)) + \mathbb{E}(B_s^2) \\ &= \mathbb{E}((B_s - B_0)(B_t - B_s)) + \text{Var}(B_s) \\ &= \mathbb{E}(B_s - B_0) \cdot \mathbb{E}(B_t - B_s) + s \\ &= s \\ \Rightarrow \mathbb{E}(B_s B_t) &= \min(s, t) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{E}(X_{t_i} \cdot X_{t_j}) = t_i \cdot t_j \cdot \mathbb{E}(B_{\frac{1}{t_i}} \cdot B_{\frac{1}{t_j}}) = \frac{t_i \cdot t_j}{\max(t_i, t_j)} = \min(t_i, t_j)$$

OBdA gelte $t_j < t_i$. Dann folgt:

$$\mathbb{E}(Z_i Z_j) = t_j - t_j - t_{j-1} + t_{j-1} = 0$$

Für $t \geq s$ gilt weiter

$$\text{Var}(X_t - X_s) = \mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}(X_t^2) - 2\mathbb{E}(X_t X_s) + \mathbb{E}(X_s^2) = t - 2s + s = t - s$$

\Rightarrow Die Zuwächse von $(X_t)_{t>0}$ sind unabhängig Gauß'sch mit $\text{Var}(X_t - X_s) = t - s$.

Zur Stetigkeit: Für $t > 0$ ist

$$t \mapsto X_t$$

offenbar stetig. Für $t = 0$ wissen wir:

- Zuwächse von X_\bullet haben dieselbe Verteilung wie die Zuwächse von B_\bullet .
- $X_0 = 0 = B_0$

Für alle $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Vert}(B_{t_0}, \dots, B_{t_n}) &= \text{Vert}(X_{t_0}, \dots, X_{t_n}) \\ \Rightarrow \text{Vert}((B_t)_{t \in \mathbb{Q}_+}) &= \text{Vert}((X_t)_{t \in \mathbb{Q}_+}) \end{aligned}$$

Wegen

$$t \mapsto B_t$$

stetig (fast sicher), gilt

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}_+}} B_t = 0$$

Wegen $(B_t)_{t \in \mathbb{Q}_+} \simeq (X_t)_{t \in \mathbb{Q}_+}$ gilt damit auch

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}_+}} X_t = 0$$

P -fast sicher. Es folgt damit (da die rationalen Zahlen dicht in \mathbb{R} sind und X_t für $t > 0$ stetig ist) schon die Stetigkeit von X_t in 0. \square

3 Das stochastische Integral

3.1 Der naive Zugang

$dB_u \hat{=} \text{Infinitesimales Inkrement} \hat{=} B'(u) du$

Problem: Die Brownschen Trajektorien sind (fast sicher) nirgendwo differenzierbar. $B'(u)$ existiert also nicht.

Erste Verbesserung: Stieltjes Integral (?)

Stieltjes-Integral für Funktionen von beschränkter Variation.

Definition 3.1. Man sagt eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ habe *beschränkte Variation*, falls

$$\sup_{\Delta} S_t^{\Delta}(f) < \infty \quad \forall t \in [0, 1]$$

Dabei durchläuft Δ alle $\Delta = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$ und es sei

$$S_t^{\Delta}(f) = \sum_{t_i \in \Delta} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

Satz 3.2. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine rechtsstetige Funktion mit beschränkter Variation, wenn ein signiertes Borel-Maß μ_f auf $[0, 1]$ existiert mit

$$f(t) - f(0) = \mu_f((0, t])$$

Definition 3.3. Für $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ messbar definiere

$$\int_0^T g(s) df_s := \int_0^T g(s) \mu_f(ds)$$

Dieses Integral heißt *Lebesgue-Stieltjes-Integral* für Integratoren von beschränkter Variation.

Dieser Ansatz verallgemeinert 1., denn $f \in C^1$ hat eine beschränkte Variation und es gilt

$$f(t) - f(0) = \int_0^T f'(s) ds$$

d.h. es gilt

$$\mu_f(ds) = f'(s) ds$$

Beispiel. Die verschobene Heaviside-Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

hat beschränkte Variation und es gilt

$$\mu_f(ds) = \delta_1(ds)$$

Problem: Die Brown'sche Bewegung hat keine endliche Variation.

2. Verbesserung: Quadratische Variation (!)

Definition 3.4. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von *endlicher quadratischer Variation*, falls eine Funktion

$$\langle f, f \rangle : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

existiert, sodass für jedes $t \in [0, 1]$ und jede Folge $\{\Delta^n\}$ von Partitionen

$$\Delta^n = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m_n} = t\}$$

mit

$$|\Delta^n| := \sup_i |t_{i+1} - t_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt:

$$T_t^\Delta(f) = \sum_{t_i \in \Delta^n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \xrightarrow{n} \langle f, f \rangle_t$$

Satz 3.5. *Fast jede Brown'sche Trajektorie $t \mapsto B_t$ ist von endlicher quadratischer Variation, insbesondere gilt*

$$\langle B, B \rangle_t(\omega) = t \text{ } P\text{-fast sicher}$$

Beweis. Sei $0 \leq t_0^{(k)} \leq \dots \leq t_{n_k}^{(k)} = t$ eine Folge von Partitionierungen von $[0, t]$ mit

$$\lim_k \sup_i |t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}| = 0$$

Dann gilt mit $X_i^{(k)} := (B_{t_{i+1}^{(k)}} - B_{t_i^{(k)}})^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - t \right|^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\left| \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + (t_{i+1} - t_i) \right|^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1, \dots, n_k} X_i^{(k)} - \mathbb{E}(X_i^{(k)}) \right|^2 \right) \\ &= \text{Var} \left(\sum_i X_i^{(k)} \right) \\ &= \sum_{i=1, \dots, n_k} \text{Var}(X_i^{(k)}) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1, \dots, n_k} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq 2 \cdot \underbrace{\sup_{i=1, \dots, n_k} |t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}|}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sum_i (t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)})}_{=t} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Insbesondere: $\forall \varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P} \left(|T_t^{\Delta^{(k)}} - t| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{E} \left(|T_t^{\Delta^{(k)}} - t|^2 \right)$$

d.h. $T_t^{\Delta(k)}(B) \rightarrow t$ in Wahrscheinlichkeit. Insbesondere existiert damit eine Teilfolge k' mit

$$T_t^{\Delta(k)}(\omega) \xrightarrow{k' \rightarrow \infty} t \text{ für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega$$

Zu (*): $X_i^{(k)} \simeq Z^2$ mit $Z \simeq \nu_{0, t_{i+1}^{(k)} - t_i^{(k)}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X^{(k)}) &= \text{Var}\left(\left(\sqrt{t_{i+1} - t_i} N\right)^2\right) \\ &= \text{Var}\left((t_{i+1} - t_i) N^2\right) \\ &= (t_{i+1} - t_i)^2 \cdot \text{Var}(N^2) = (t_{i+1} - t_i)^2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Dabei sei $N \simeq \nu_{0,1}$. □

Bemerkung. Gezeigt wurde:

Zu jeder Folge von Partitionierungen mit verschwindender maximaler Schrittweite existiert eine Teilfolge, s.d.

$$T_t^{\Delta(k)} \rightarrow t \text{ fast sicher}$$

gilt. Eigentlich wollen wir, dass dies für jede Folge von Partitionierungen richtig ist. Das werden wir später beweisen.

Korollar 3.6. *P-fast kein Brown'scher Pfad ist von endlicher Variation.*

Beweis. Sei $p < q, p, q \in \mathbb{Q}$. Dann existiert eine Folge Δ^n von Partitionierungen von $[p, q]$, s.d.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{p,q}^{\Delta}(B) = q - p \text{ } P\text{-fast sicher}$$

wobei

$$T_{p,q}^{\Delta}(B) = \sum_{i \in \Delta} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \quad (1)$$

Sei $\Omega_0 \subseteq \Omega$ die entsprechende 1-Menge auf Ω , d.h.

$$P(\Omega_0) = 1$$

und es gelte (1) für $(B_t(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega_0$.

Angenommen es existiert $\omega_0 \in \Omega_0$ und $V > 0$, sodass die Variation von $(B_t(\omega_0)) \leq V < \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T_{p,q}^{\Delta(k)}(B_t(\omega_0)) &= \sum_{i=1}^{n_k} (B_{t_{i+1}}(\omega_0) - B_{t_i}(\omega_0))^2 \\ &\leq \underbrace{\sup_{i=1, \dots, n_k} |B_{t_{i+1}}(\omega_0) - B_{t_i}(\omega_0)|}_{\xrightarrow{(**)} 0} \cdot \underbrace{\sum |B_{t_{i+1}}(\omega_0) - B_{t_i}(\omega_0)|}_{< \text{Var}(B_t(\omega))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(**) gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $t \mapsto B_t(\omega)$. Dies ist aber ein Widerspruch, da auf Ω_0

$$\lim T_{p,q}^{\Delta(k)}(B_t) = q - p > 0$$

gilt. Damit muss $\omega_0 \notin \Omega_0$ gelten. Es folgt die Behauptung. □

Aufgrund dieser Aussagen ist $\int_0^T f(s) dB_s$ nicht ohne weiteres als Stieltjes-Integral definierbar. \rightsquigarrow Ito-Integral.

3.2 Technischer Abschnitt: Filtration, Messbarkeit, Stoppzeiten

Definition 3.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine total geordnete Indexmenge. Dann heißt eine Familie von σ -Algebren $\mathfrak{F}_\bullet = (\mathfrak{F}_i) \subseteq \mathfrak{F}$ mit

$$\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j \quad \forall i \leq j$$

eine *Filtration*.

$(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_i)_{i \in I}, P)$ heißt *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Bezeichnungen:

- \mathfrak{F}_\bullet heißt *rechtsstetig*, falls

$$\mathfrak{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}_s$$

- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_\bullet, P)$ heißt *vollständig*, falls gilt:

$$\forall N \subseteq \Omega : [\exists A \in \mathfrak{F} : N \subseteq A \wedge P(A) = 0 \Rightarrow N \in \mathfrak{F}_0]$$

Kurz: \mathfrak{F}_0 enthält alle P -Nullmengen.

- Man sagt $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_\bullet, P)$ *genügt den üblichen Bedingungen*, falls es/er vollständig ist und \mathfrak{F}_\bullet rechtsstetig ist.

Beispiel. Das Standard-Beispiel zu Filtrationen:

Es sei $(X_t)_{t \geq 0} : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ein stochastischer Prozess. Dann ist die Familie aller

$$\mathfrak{F}_t := \sigma(\{X_s \mid s \leq t\})$$

für $t \geq 0$ eine Filtration. Man nennt sie *vom Prozess X erzeugte Filtration auf Ω* .

Notation:

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^X$$

Bemerkung. Sei \mathfrak{F}_\bullet gegeben. Durch Übergang zu

$$\mathfrak{F}'_t := \sigma(\mathfrak{F}_t \cup \{N \mid N \subseteq \Omega \text{ } P\text{-Nullmenge}\})$$

(augmentieren von \mathfrak{F}_\bullet) erhalten wir eine vollständige Filtrierung. Durch einen weiteren Übergang zu

$$\widehat{\mathfrak{F}}_t := \bigcap_{s>t} \mathfrak{F}'_s$$

erhalten wir eine Filtrierung $\widehat{\mathfrak{F}}_\bullet$, die den üblichen Bedingungen genügt.

Definition 3.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{F}_\bullet, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

- Ein Prozess $X_\bullet = (X_i)_{i \in I}$ heißt *an \mathfrak{F}_\bullet adaptiert*, falls X_i stets \mathfrak{F}_i -messbar ist.
- Für eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ heißt

$$\text{Vert}((X_{j_1}, \dots, X_{j_n}))$$

(als Wahrscheinlichkeitsmaß) eine endlich-dimensionale Verteilung von X_\bullet .

- Zwei Prozesse

$$(X_i)_{i \in I} : (\Omega, \mathfrak{F}, P) \rightarrow (E, \mathfrak{E})$$

$$(Y_i)_{i \in I} : (\Omega', \mathfrak{F}', P') \rightarrow (E, \mathfrak{E})$$

heißen *äquivalent*, falls X_\bullet und Y_\bullet dieselben endlichen Verteilungen haben.

- Falls $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = (\Omega', \mathfrak{F}', P')$ gilt, so heißen X_\bullet und Y_\bullet *Modifikationen voneinander*, falls für alle $i \in I$ gilt:

$$X_i(\omega) = Y_i(\omega) \text{ für } P\text{-fast alle } \omega \in \Omega$$

- Falls wieder $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = (\Omega', \mathfrak{F}', P')$ gilt, heißen X_\bullet und Y_\bullet *ununterscheidbar*, falls für P -fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$(t \mapsto X_t(\omega)) = (t \mapsto Y_t(\omega))$$

bzw.

$$\mathbb{P}(\{\omega \mid \exists t \in I : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}) = 0$$

Beispiel. Es gilt

$$X, Y \text{ ununterscheidbar} \Rightarrow X, Y \text{ Modifikationen} \Rightarrow X, Y \text{ äquivalent}$$

Die Umkehrungen sind im Allgemeinen falsch.

Seien $(\Omega, \mathfrak{F}, P) = ([0, 1], \mathfrak{B}([0, 1]), dx)$ und

$$X_s(\omega) = \begin{cases} 1 & s = \omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad s \in [0, 1]$$

$$Y_s(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in [0, 1], \quad s \in [0, 1]$$

Sei $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\{\omega \in [0, 1] \mid X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = \{t\}$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0, 1] : P(X_t = Y_t) = 1$$

d.h. X, Y sind Modifikationen voneinander. Es gilt aber

$$\{\omega \in [0, 1] \mid \exists t \in [0, 1] : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = [0, 1]$$

weswegen X, Y nicht ununterscheidbar sind.

Satz 3.9. X, Y Modifikationen $\Rightarrow X, Y$ äquivalent.

Beweis. Sei $\{j_1, \dots, j_n\} = J \subseteq I$. Da X, Y Modifikationen voneinander sind, existieren für jedes $k = 1, \dots, n$ Mengen

$$\begin{aligned} \Omega_k &\subseteq \Omega : P(\Omega_k = 1) \wedge X_{j_k}(\omega) = Y_{j_k}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_k \\ &\Rightarrow P\left(\tilde{\Omega} = \bigcap_{k=1}^n \Omega_k\right) = 1 \end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$ gilt dann

$$\vec{X}_j(\omega) = \begin{pmatrix} X_{j_1}(\omega) \\ \vdots \\ X_{j_n}(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{j_1}(\omega) \\ \vdots \\ Y_{j_n}(\omega) \end{pmatrix} = \vec{Y}_j(\omega)$$

$$\Rightarrow \text{Vert}(\vec{X}_j) = \text{Vert}(\vec{Y}_j). \quad \square$$

Satz 3.10. Seien X_\bullet und Y_\bullet ununterscheidbar, X_\bullet und \mathfrak{F}_\bullet adaptiert. Falls \mathfrak{F}_\bullet vollständig ist, dann ist Y_\bullet an \mathfrak{F}_\bullet adaptiert.

Beweis. Übung. □

Definition 3.11. Ein Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P)$ mit Werten in (E, \mathfrak{E}) heißt *progressiv messbar*, falls für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} X_{|t} &: [0, t] \times \Omega \rightarrow E \\ (s, \omega) &\mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar ist.

Satz 3.12. Sei (X_t) an (\mathfrak{F}_t) adaptiert, E sei ein topologischer Raum, \mathfrak{E} die Borel- σ -Algebra auf E . Dann ist (X_t) progressiv messbar, falls (X_t) rechts- (oder links-)stetige Pfade hat, d.h. falls

$$t \mapsto X_t(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

rechts- bzw. linksstetig ist.

Beweis. Sei $t > 0$ fix. Definiere für $n \in \mathbb{N}$:

$$X_s^n(\omega) := X_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \quad \text{falls } s \in \left(\frac{k}{2^n} \cdot t, \frac{k+1}{2^n} \cdot t\right]$$

für $s \in (0, t]$ und

$$X_0^n(\omega) = X_0(\omega)$$

Falls z.B. (X_t) rechtsstetig $\Rightarrow X_s^n(\omega) \rightarrow X_s(\omega) \quad \forall (s, \omega)$. Für alle $A \in \mathfrak{B}(E)$ gilt

$$(X_s^n)^{-1}(A) = \left(\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\frac{k}{2^n}t; \frac{k+1}{2^n}t\right] \times \left(X_{\frac{k+1}{2^n}t}\right)^{-1}(A)\right) \cup (\{0\} \times X_0^{-1}(A))$$

d.h. $X_{|t}^n(\cdot, \cdot)$ ist also $\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar. Wegen $X_{|t}^n(s, \omega) \rightarrow X_{|t}(s, \omega)$ folgt die Behauptung. □

Im Folgenden gelte stets $t \in I \subseteq \mathbb{N}$ oder $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 3.13. Seien $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und

$$T : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

Dann heißt T eine *Stoppzeit* bzgl. (\mathfrak{F}_t) falls für alle $t \geq 0$:

$$\{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$$

Falls nur

$$\{T < t\} \in \mathfrak{F}_t \quad \forall t \geq 0$$

gilt, so heißt T *schwache Stoppzeit*.

Beispiel. Seien $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathbb{R} -wertiger Prozess und $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^X$. Definiere

$$T = T_A := \inf \{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_k \in A\}$$

Dann gilt für $t \geq 0$:

$$\{T \leq t\} = \{\omega \in \Omega \mid \exists k \leq t : X_k(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^t (X_k)^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_t$$

Damit ist T eine Stoppzeit.

Satz 3.14. Seien S, T Stoppzeiten. Dann gilt

1. $S \vee T := \sup(S, T)$ und $S \wedge T := \inf(S, T)$ sind Stoppzeiten.
2. $S + T$ ist eine schwache Stoppzeit.

Bemerkung. Falls T eine schwache Stoppzeit und (\mathfrak{F}_t) rechtsstetig, so ist T bereits eine (starke) Stoppzeit.

Definition 3.15. Sei T eine Stoppzeit. Dann heißt

$$\mathfrak{F}_T := \{A \in \mathfrak{F}_\infty \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t\}$$

die σ -Algebra der T -Vergangenheit. Dabei sei $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\mathfrak{F}_t; t \geq 0)$.

Satz 3.16.

1. \mathfrak{F}_T ist eine σ -Algebra, $\mathfrak{F}_T \subseteq \mathfrak{F}$.
2. $S \leq T \Rightarrow \mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$
3. $\mathfrak{F}_{S \wedge T} = \mathfrak{F}_S \cap \mathfrak{F}_T$

Beweis.

1. Wir zeigen beispielhaft

$$A \in \mathfrak{F}_T \Rightarrow A^C \in \mathfrak{F}_T$$

Sei also $A \in \mathfrak{F}_T$. Dann gilt $A \in \mathfrak{F}_\infty$ und $A \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$.
 $\Rightarrow A^C \in \mathfrak{F}_\infty$ und

$$A^C \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \setminus (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathfrak{F}_t$$

Analog zeigt man

$$A_k \in \mathfrak{F}_T \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}_T$$

2. $S \leq T \Rightarrow \{T \leq t\} \subseteq \{S \leq t\}$ und es gilt für $A \in \mathfrak{F}_S$

$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$$

$\Rightarrow A \in \mathfrak{F}_T$.

3. folgt aus 2.

□

Definition 3.17. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess und T eine Stoppzeit.

1. Der an T gestoppter Prozess ist

$$X_t^T(\omega) := \begin{cases} X_t(\omega) & \text{falls } t < T(\omega) \\ X_{T(\omega)} & \text{falls } t \geq T(\omega) \end{cases} = X_{T(\omega) \wedge t}(\omega)$$

2. Der in T ausgewertete Pfad (für $T(\omega) < \infty$):

$$X_T : \Omega \rightarrow E$$

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$$

Satz 3.18. Falls (X_t) progressiv messbar und T eine Stoppzeit ist, so gilt

1. $X_T \cdot \mathbb{1}_{\{T < \infty\}} : \Omega \rightarrow E$ ist \mathfrak{F}_T -messbar.

2. $(X_t^T)_{t \geq 0}$ ist progressiv messbar.

Beweis.

1. Wir betrachten nur den Fall, dass $T(\omega) < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Definiere

$$T^* : \Omega \rightarrow [0, \infty] \times \Omega$$

$$T^*(\omega) = (T(\omega), \omega)$$

Falls $A \in \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ gilt, so auch

$$(T^*)^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_T$$

Denn für eine Elementarmenge A der Form

$$A = (a, b] \times f, \quad f \in \mathfrak{F}_t, a < b \leq t$$

gilt

$$\begin{aligned} (T^*)^{-1}(A) &= \{\omega \mid T(\omega) \in (a, b], \omega \in f\} \\ &= \{T \leq b\} \setminus \{T \leq a\} \cap f \in \mathfrak{F}_t \end{aligned}$$

Für beliebige Menge A folgt die Aussage durch Approximation mit Schnitten, Vereinigungen und Komplementen von Elementarmengen.

Sei nun $e \in \mathfrak{E}$. Dann ist zu zeigen, dass

$$(X_T)^{-1}(e) \cap \{T \leq t\} \stackrel{!}{\in} \mathfrak{F}_t$$

Auf $\{T \leq t\}$ gilt $X_T(\omega) = (X|_t \circ T^*)(\omega)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} (X_T)^{-1}(e) \cap \{T \leq t\} &= [X|_t \circ T^*]^{-1}(e) \cap \{T \leq t\} \\ &= (T^*)^{-1}(\underbrace{(X|_t)^{-1}(e)}_{\in \mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathfrak{F}_t}) \cap \{T \leq t\} \in \mathfrak{F}_t \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathfrak{F}_t} \end{aligned}$$

2. ○ Die Abbildung

$$\Omega \rightarrow [0, t]$$

$$\omega \mapsto T(\omega) \wedge t$$

ist $\mathfrak{F}_t/\mathfrak{B}([0, t])$ -messbar, denn für Elementarmengen $(a, b] \in \mathfrak{B}([0, t])$ gilt

$$\{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \wedge t \in (a, b]\} = \{T \leq b\} \setminus \{T \leq a\} \in \mathfrak{F}_t$$

- $\omega \mapsto \omega$ ist $\mathfrak{F}_t/\mathfrak{F}_t$ -messbar auf Ω .
- $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega) =: T_t(\omega)$ ist $\mathfrak{F}_t/\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar.
- Die Abbildung

$$[0, t] \times \Omega \rightarrow [0, t] \times \Omega$$

$$(s, \omega) \mapsto (s, \omega)$$

ist $\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t/\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar. Genauso ist

$$(s, \omega) \mapsto T_t(\omega)$$

$\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t/\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar. Es folgt, dass die Abbildung

$$T_t^* : [0, t] \times \Omega \rightarrow [0, t] \times \Omega$$

$$(s, \omega) \mapsto (T(\omega) \wedge t \wedge s, \omega)$$

$\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t/\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$ -messbar ist. Es gilt

$$T_t^*(s, \omega) = (T(\omega) \wedge s, \omega)$$

◦ Zu zeigen ist, dass

$$X_{|t}^T : [0, t] \times \Omega \rightarrow E$$

$\mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t/\mathfrak{E}$ -messbar ist mit

$$X_{|t}^T(s, \omega) = X_{s \wedge T(\omega)}(\omega) = (X_{|t} \circ T_t^*)(s, \omega)$$

Sei $e \in \mathfrak{E}$. Dann gilt:

$$(X_{|t}^T)^{-1}(e) = (T_t^*)^{-1}((X_{|t})^{-1}(e)) \in \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathfrak{F}_t$$

□

Definition 3.19. (X_t) sei ein (\mathfrak{F}_t) -progressiv messbarer Prozess. E sei eine gewisse Eigenschaft von stochastischen Prozessen (z.B. $E \hat{=}$ stetige Pfade, beschränkt von endlicher Variation). Dann sagen wir X_\bullet hat *lokal* die Eigenschaft E , falls eine Folge von (\mathfrak{F}_t) -Stoppzeiten (T_n) , sodass

1. $T_n(\omega) \nearrow \infty \forall \omega \in \Omega$ (monoton steigend)
2. $\forall n \in \mathbb{N} : X_{\bullet}^{T_n}$ hat die Eigenschaft E .

(T_n) heißt dann *lokalisierende Folge* für E .

Beispiel. Sei (X_t) ein stetiger reellwertiger Prozess mit $X(0) = 0$. Dann ist X_\bullet lokal beschränkt. Hier sei E also die Eigenschaft der Beschränktheit. Sei

$$T_n(\omega) := \inf \{ |X_t(\omega)| \geq n \}$$

$\Rightarrow T_n$ ist eine Stoppzeit mit $T_n(\omega) \nearrow \infty$. Zuletzt gilt

$$\sup_{t \geq 0} |X_t^{T_n}(\omega)| \leq n \forall \omega \in \Omega$$

d.h. der gestoppte Prozess ist beschränkt.

3.3 Martingale in stetiger Zeit

Definition 3.20. Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \in I}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum (typisch ist $t \in \{1, \dots, N\}$ oder $t \in [0, T]$ oder $t \geq 0$). Dann heißt $(X_t)_{t \in I}$ ein *Martingal*, falls

1. X_t ist \mathfrak{F}_t -messbar
2. $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$
3. $\mathbb{E}(X_t | \mathfrak{F}_s) = X_s \forall s, t \in I, s \leq t$

Falls in 3. "≥" (bzw. "≤") statt "=" gilt, heißt X_\bullet *Submartingal* (bzw. *Supermartingal*).

Bemerkung.

1. Zur Methode der bedingten Erwartung s. Vorlesungsskript *Finanzmathematik 1* vom Wintersemester 2012/2013.

2. Ein Martingal ist ein Prozess, dessen fernere künftige Entwicklung zu jedem Zeitpunkt im Mittel den aktuellen Wert ergibt.

Beispiel. $(X_t)_{t \geq 0} = (B_t)_{t \geq 0}$ sei die Standard-Brown'sche Bewegung und

$$\mathfrak{F}_t := \mathfrak{F}^{B_t}$$

Dann ist (B_t) ein (\mathfrak{F}_t) -Martingal. Wegen $\mathfrak{F}_s = \sigma\{B_u \mid u \leq s\}$ genügt es, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E}\left(\underbrace{(B_t - B_s)}_{\text{von } \mathfrak{F}_s \text{ unabhängig}} \mid \mathfrak{F}_s\right) + \mathbb{E}(B_s | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s \\ &= 0 + B_s = B_s \end{aligned}$$

gilt.

Bemerkung. Eigenschaften der bedingten Erwartung:

1. $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y | \mathfrak{G}) = \lambda \mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) + \mu \mathbb{E}(Y | \mathfrak{G})$.
2. Seien $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ ineinander enthaltene σ -Algebren. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X | \mathfrak{H}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) | \mathfrak{H})$$

3. Jensen'sche Ungleichung:
Sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt

$$\varphi(\mathbb{E}(X | \mathfrak{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X) | \mathfrak{G})$$

4. Falls Z schon \mathfrak{G} -messbar ist, gilt

$$\mathbb{E}(X \cdot Z | \mathfrak{G}) = Z \cdot \mathbb{E}(X | \mathfrak{G})$$

5. Falls X von \mathfrak{G} unabhängig ist, d.h. dass $\sigma(X)$ und \mathfrak{G} unabhängig sind, d.h.

$$P(S \cap G) = P(S) \cdot P(G) \quad \forall S \in \sigma(X), G \in \mathfrak{G}$$

dann gilt

$$\mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) = \mathbb{E}(X)$$

6. $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathfrak{G})$

Satz 3.21.

1. Falls X_\bullet ein \mathfrak{F}_\bullet -Martingal ist, $\mathfrak{G}_t \subseteq \mathfrak{F}_t \quad \forall t$ und X_\bullet schon \mathfrak{G}_\bullet -adaptiert ist, so ist X_\bullet ein \mathfrak{G}_\bullet -Martingal.
2. Sind M, N Martingale, so auch $\lambda M + \mu N$.
3. Sind X, Y Submartingale, so auch $X \vee Y$.

4. Falls X_\bullet ein Submartingal ist, φ konvex und monoton, so ist

$$Y_t := \varphi(X_t)$$

ein Submartingal.

5. Falls $(M_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal und φ konvex ist, so ist

$$(\varphi(M_t))_{t \geq 0}$$

ein Submartingal.

Beweis.

$$1. \mathbb{E}(X_t | \mathfrak{G}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t | \mathfrak{F}_s) | \mathfrak{G}_s) = \mathbb{E}(X_s | \mathfrak{G}_s) = X_s$$

$$2. X(\omega) \leq X(\omega) \vee Y(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) \leq \mathbb{E}(X \vee Y | \mathfrak{G})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X | \mathfrak{G}) \vee \mathbb{E}(Y | \mathfrak{G}) \leq \mathbb{E}(X \vee Y | \mathfrak{G})$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}(X_t \vee Y_s | \mathfrak{F}_s) \geq \mathbb{E}(X_t | \mathfrak{F}_s) \vee \mathbb{E}(Y_t | \mathfrak{F}_s) \geq X_s \vee Y_s$$

□

Lemma 3.22 (Doob-Zerlegung). Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal mit $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Dann existiert ein vorhersagbarer wachsender² Prozess $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein Martingal $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$X_n = M_n + A_n$$

Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis. Sei

$$S_i := \mathbb{E}(X_i | \mathfrak{F}_{i-1}) - X_{i-1}, \quad i \geq 1$$

Dann ist S_i \mathfrak{F}_{i-1} -messbar und es gilt $S_i \geq 0$. Definiere

$$A_i := \sum_{k=1}^i S_k$$

$$A_0 := 0$$

$$M_i := X_i - A_i, \quad i \geq 1$$

$$M_0 := X_0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} M_{i+1} - M_i &= X_{i+1} - X_i - (A_{i+1} - A_i) \\ &= X_{i+1} - X_i - S_{i+1} \\ &= X_{i+1} - X_i - [\mathbb{E}(X_{i+1} | \mathfrak{F}_i) - X_i] \\ &= X_{i+1} - \mathbb{E}(X_{i+1} | \mathfrak{F}_i) \end{aligned}$$

² $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, falls $A_{n+1}(\omega) \geq A_n(\omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_{i+1}|\mathfrak{F}_i) = M_i + [\mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i) - \mathbb{E}(X_{i+1}|\mathfrak{F}_i)] = M_i$$

d.h. M_i ist ein Martingal. A_i ist offensichtlich wachsend.

Zur Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} X_i - X_{i-1} &= M_i - M_{i-1} + A_i - A_{i-1} \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X_i|\mathfrak{F}_{i-1}) - X_{i-1} &= 0 + A_i - A_{i-1} \end{aligned}$$

Denn A_\bullet ist vorhersagbar, also ist A_i \mathfrak{F}_{i-1} -messbar.

\Rightarrow Die Zuwächse von A sind eindeutig durch die Zuwächse von X definiert.

$\Rightarrow A_\bullet$ ist für $A_0 = 0$ eindeutig.

$\Rightarrow M = X - A$ ist eindeutig. □

3.3.1 Optional Sampling

Satz 3.23 (Optional Sampling, zeitdiskret). *Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein (\mathfrak{F}_n) -Submartingal und seien $S \leq T \leq n_0 < \infty$ zwei beschränkte $(\mathfrak{F})_n$ -Stoppzeiten. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) \geq X_S \text{ } P\text{-fast sicher}$$

Bemerkung (Interpretation). Durch diese Aussage wird die Submartingals-Eigenschaft auf zufällige Zeiten $S \leq T$ verallgemeinert.

Beweis.

1. Schritt: X Martingal, $T = t$ deterministisch, $S \leq t$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_S) \geq X_S$$

Sei $A \in \mathfrak{F}_S$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_S \cdot \mathbb{1}_A) &= \sum_{k=0}^t \mathbb{E}(X_S \cdot \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{\{S=k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^t \mathbb{E}(X_k \cdot \mathbb{1}_{A \cap \{S=k\}}) \\ &\stackrel{X \text{ Mart.}}{=} \sum_{k=0}^t \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_{A \cap \{S=k\}}) \\ &= \mathbb{E}(X_t \cdot \mathbb{1}_A) \end{aligned}$$

d.h. X_S ist \mathfrak{F}_S -messbar und

$$\int_A X_S dP = \int_A X_t dP \quad \forall A \in \mathfrak{F}_S$$

$$\Rightarrow X_S = \mathbb{E}(X_t|\mathfrak{F}_S).$$

2. Schritt: X Martingal, $S \leq T \leq n_0$. Wegen $\mathbb{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_T$ und der Projektionseigenschaft der bedingten Erwartung gilt:

$$\mathbb{E}(X_T|\mathfrak{F}_S) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n_0}|\mathfrak{F}_T)|\mathfrak{F}_S) = \mathbb{E}(X_{n_0}|\mathfrak{F}_S) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} X_S$$

3. Schritt: X sei integrierbares Submartingal, $S \leq T \leq n_0$. Benutze die Doob-Zerlegung

$$X_n = M_n + A_n$$

$\Rightarrow X_T = M_T + A_T \geq M_T + A_S$. Daher gilt

$$\mathbb{E}(X_T | \mathfrak{F}_S) \geq \mathbb{E}(M_T | \mathfrak{F}_S) + A_S \stackrel{\text{Schritt 2}}{=} M_S + A_S = X_S$$

4. Schritt: Sei X ein beliebiges Submartingal, $S \leq T \leq n_0$.

\Rightarrow Zu $a \geq 0$ sei

$$X_t^{(a)} := \max(-a, X_t) = \varphi^{(a)}(X_t)$$

mit $\varphi^{(a)}$ konvex und monoton wachsend. Dann ist $X_t^{(a)}$ ein Submartingal mit $\mathbb{E}(|X_t^{(a)}|) < \infty$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^{(a)} | \mathfrak{F}_S) \geq X_S^{(a)}$$

Mit $a \rightarrow \infty$ folgt

$$\mathbb{E}(X_T | \mathfrak{F}_S) \geq X_S$$

□

Bemerkung (Erinnerung). $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt *rechtsstetig*, falls für P -fast alle Pfade gilt:

$$t \rightarrow X_t(\omega)$$

ist rechtsstetig.

Definition 3.24. 1. Wir sagen $(X_t)_{t \geq 0}$ hat *linksseitige Limiten*, falls für P -fast alle Pfade

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

in allen $t > 0$ einen linksseitigen Limes $X_{t-}(\omega)$ hat.

2. Wir sagen $(X_t)_{t \geq 0}$ ist *cadlag* (*continue à droite, limitée à gauche*), wenn X_\bullet rechtsstetig ist und linksseitige Limiten besitzt.

Satz 3.25 (Optional Sampling, zeitstetig). Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Submartingal, S, T Stoppzeiten mit $S \leq T \leq M < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X_T | \mathfrak{F}_S) \geq X_S \text{ } P\text{-fast sicher}$$

Beweisskizze. Es sei

$$T_n(\omega) := \frac{k+1}{2^n} \text{ für } T(\omega) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$$

S_n sei analog definiert. Dann gilt $S_n \searrow S$, $T_n \searrow T$ und S_n, T_n sind Stoppzeiten. S_n und T_n haben einen endlichen Wertebereich I_n mit

$$I_n = \left\{ \frac{k+1}{2^n} \mid k \in \mathbb{N}_0, \frac{k+1}{2^n} \leq M \right\}$$

Weiter ist $(X_t^{(n)})_{t \in I_n}$ mit $X_t^{(n)} = X_t$ ein zeitdiskretes Submartingal zur Filtrierung $(\mathfrak{F}_t^{(n)})_{t \in I_n}$ mit $\mathfrak{F}_t^{(n)} = \mathfrak{F}_t$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(X_{T_n}^{(n)} | \mathfrak{F}_{S_n}) \geq X_{S_n}^{(n)}$$

also

$$\mathbb{E}(X_{T_n} | \mathfrak{F}_{S_n}) \geq X_{S_n}$$

bzw.

$$\forall A \in \mathfrak{F}_{S_n} : \int_A X_{T_n} dP \geq \int_A X_{S_n} dP$$

Dies gilt insbesondere für $A \in \mathfrak{F}_S \subseteq \mathfrak{F}_{S_n}$. Wegen $T_n \searrow T$, $S_n \searrow S$ und der Rechtsstetigkeit von X_\bullet folgt mit $n \rightarrow \infty$

$$\forall A \in \mathfrak{F}_S : \int_A X_T dP \geq \int_A X_S dP$$

d.h.

$$\mathbb{E}(X_T | \mathfrak{F}_S) \geq X_S$$

□

Korollar 3.26 (Optional Stopping, aus Optional Sampling). *Wenn $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges Submartingal ist und T eine Stoppzeit, dann ist*

$$(X_t^T)_{t \geq 0}$$

ebenfalls ein Submartingal, sowohl bzgl. (\mathfrak{F}_t) als auch bzgl. (\mathfrak{F}_t^T) mit $\mathfrak{F}_t^T := \mathfrak{F}_{t \wedge T}$.

Lemma 3.27. *Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiger Prozess. Dann ist X_\bullet genau dann ein \mathfrak{F}_t -Submartingal, wenn die Aussagen*

1. $\mathbb{E}(X_t^+) < + \forall t \geq 0$
2. Für alle beschränkten Stoppzeiten $S \leq T \leq C < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}(X_S) \leq \mathbb{E}(X_T)$$

gelten.

Beweis.

” \Rightarrow ”: Nach Optional Sampling gilt:

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_T | \mathfrak{F}_S)) \geq \mathbb{E}(X_S)$$

” \Leftarrow ”: Die Integrierbarkeit des Positiv-Anteils von X_t gilt nach Voraussetzung. Sei $A \in \mathfrak{F}_u$, $u < v$. Dann definiere

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T(\omega) = u \cdot \mathbf{1}_A + v \cdot \mathbf{1}_{A^c}$$

Es gilt dann

$$\{T \leq w\} = \begin{cases} \emptyset & , w < u \\ A & , u \leq w < v \\ \Omega & , v \leq w \end{cases}$$

Damit ist T eine \mathfrak{F}_\bullet -Stopzeit mit $T \leq v < \infty$. Damit folgt mit 2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_v) &\geq \mathbb{E}(X_T) \\ &= \mathbb{E}(X_u \cdot \mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_v \cdot \mathbf{1}_{A^c}) \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_v \mathbf{1}_A) &\geq \mathbb{E}(X_u \mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow X_\bullet$ ist ein Submartingal. □

Beweis von 3.26 (Optional Stopping). Wir zeigen nur die Aussage für die Filtrierung \mathfrak{F}_t . Die andere Aussage ist eine leichte Übung.

Seien $\sigma \leq \tau \leq C < \infty$ zwei beschränkte \mathfrak{F}_\bullet -Stopzeiten.

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_\sigma^T &= X_{T \wedge \sigma} , X_\tau^T = X_{T \wedge \tau} , T \wedge \sigma \leq T \wedge \tau \leq C \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X_\tau^T) &= \mathbb{E}(X_{T \wedge \tau}) \geq \mathbb{E}(X_{T \wedge \sigma}) = \mathbb{E}(X_\sigma^T) \end{aligned}$$

Mit dem vorigen Lemma folgt, dass $(X_t^T)_{t \geq 0}$ ein Submartingal ist, da X_\bullet^T \mathfrak{F}_t -messbar ist. □

3.3.2 Konvergenzsätze und Abschließbarkeit von Martingalen

Satz 3.28 (Doob'sche L^p -Ungleichung). *Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges Martingal oder ein nichtnegatives Submartingal und sei $X_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|$. Dann gilt für alle $p \geq 1$, $\lambda > 0$:*

$$\lambda^p P(|X_T^*| > \lambda) \leq \mathbb{E}(|X_T|^p)$$

und im Fall $p > 1$

$$\mathbb{E}((X_T^*)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot \mathbb{E}(|X_T|^p)$$

Beweis. Sei $\lambda > 0$, $T \geq 0$.

$$\tau := \inf \{s \geq 0 \mid |X_s| \geq \lambda\} \wedge T$$

Wir wissen, dass $|X|_\bullet^p$ ein Submartingal ist, also auch der gestoppte Prozess

$$((|X_t^\tau|^p))_{t \geq 0}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_T|^p) &\geq \mathbb{E}(|X_\tau|^p) \\ &= \mathbb{E}(|X_\tau|^p \cdot \mathbf{1}_{\{X_\tau^* < \lambda\}}) + \mathbb{E}(|X_\tau|^p \cdot \mathbf{1}_{\{X_\tau^* \geq \lambda\}}) \\ &= \mathbb{E}(|X_T|^p \cdot \mathbf{1}_{\{X_T^* < \lambda\}}) + \mathbb{E}(|X_\tau|^p \cdot \mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \lambda\}}) \\ &= \mathbb{E}(|X_T|^p \cdot \mathbf{1}_{X_T^* < \lambda}) + \lambda^p \cdot P(X_T^* \geq \lambda) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda^p \cdot P(X_T^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E} \left(|X_T|^p \cdot \mathbb{1}_{\{X_T^* \geq \lambda\}} \right) \leq \mathbb{E}(|X_T|^p) \quad (*)$$

Seien nun $p > 1$ und $k > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_T^* \wedge k)^p) &= \int_0^k p \cdot \lambda^{p-1} \cdot P(X_T^* \geq \lambda) \, d\lambda \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^k p \cdot \lambda^{p-2} \mathbb{E}(|X_T| \cdot \mathbb{1}_{\{X_T^* > \lambda\}}) \, d\lambda \\ &= p \cdot \mathbb{E} \left(|X_T| \cdot \int_0^{k \wedge X_T^*} \lambda^{p-2} \, d\lambda \right) \\ &= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}(|X_T| \cdot (X_T^* \wedge k)^{p-1}) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}(|X_T|^p))^{1/p} \cdot (\mathbb{E}((X_T^* \wedge k)^p))^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\mathbb{E}((X_T^* \wedge k)^p) \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \cdot \mathbb{E}(|X_T|^p) \quad \forall k > 0$$

Mit $k \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Die Aussage des vorigen Satzes ist äquivalent zur Normenabschätzung im L^p :

$$\|X_T^*\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|X_T\|_{L^p}$$

Satz 3.29 (Submartingal-Konvergenzsatz). *Falls X_\bullet ein rechtsstetiges Submartingal mit*

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$$

ist, so existiert eine Zufallsvariable $X_\infty : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) = X_\infty(\omega) \quad P\text{-fast sicher}$$

Definition 3.30 (Überquerungszeiten). Für ein (rechtsstetiges) Submartingal $(X_t)_{t \geq 0}$ und reelle Zahlen a, b und $T \geq 0$ definieren wir die *Überquerungszeiten*

$$\begin{aligned} S_1 &:= \inf \{t \geq 0 \mid X_t > b\} \wedge T \\ S_2 &:= \inf \{t \geq S_1 \mid X_t < a\} \wedge T \\ &\vdots \\ S_{2n} &:= \inf \{t \geq S_{2n-1} \mid t < a\} \wedge T \\ S_{2n+1} &:= \inf \{t \geq S_{2n} \mid t > b\} \wedge T \end{aligned}$$

⋮

Dann ist $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten. Weiter definieren wir

$$D([a, b], T) := \sup \{n \mid S_{2n} < T\}$$

(mit der Konvention $\sup \emptyset := 0$). Dieser Wert entspricht der Anzahl der absteigenden Überquerungen des Wertintervalls $[a, b]$ durch den Prozess X im Zeitintervall $[0, T]$.

Lemma 3.31 (Doob).

$$\mathbb{E}(D([a, b], T)) \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}((X_T - b)^+)$$

Beweis. Setze $A_k := \{S_k < T\} \in \mathfrak{F}_{S_k}$. Dann gilt $A_{k+1} \subseteq A_k$ und

$$X_{S_{2k-1}} \geq b \text{ auf } A_{2k-1}$$

$$X_{S_{2k}} \leq a \text{ auf } A_{2k}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A_{2k-1}} (X_{S_{2k-1}} - b) dP \stackrel{\text{Submartingal}}{\leq} \int_{A_{2k-1}} (X_{S_{2k}} - b) dP \\ &= \int_{A_{2k}} (X_{S_{2k}} - b) dP + \int_{A_{2k-1} \setminus A_{2k}} (X_{S_{2k}} - b) dP \\ &\leq (a - b)P(A_{2k}) + \int_{A_{2k-1} \setminus A_{2k}} (X_{S_{2k}} - b) dP \\ &\Rightarrow (b - a) \underbrace{P(A_{2k})}_{=P(D([a,b],T) \geq k)} \leq \int_{A_{2k-1} \setminus A_{2k}} (X_T - b)^+ dP \quad (+) \end{aligned}$$

Die Mengen $A_{2k-1} \setminus A_{2k}$ sind paarweise disjunkt, d.h. wir können die Ungleichung (+) bzgl. $k \in \mathbb{N}$ summieren und es folgt

$$(b - a) \sum_{k=0}^{\infty} P(D([a, b], T) \geq k) \leq \int_{\Omega} (X_T - b)^+ dP$$

bzw.

$$(b - a) \cdot \mathbb{E}(D([a, b], T) \geq k) \leq \mathbb{E}((X_T - b)^+)$$

□

Beweis des Submartingal-Konvergenzsatzes 3.29. Sei $X(\omega) := \liminf_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega)$. Nach Fatou ist dann

$$\mathbb{E}(X) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_t) < \infty$$

$\Rightarrow X < \infty$ P -fast sicher. Sei $\bar{X} := \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t$. Falls die Aussage falsch ist, so ist

$$N := \{X \neq \bar{X}\}$$

eine Menge mit positivem P -Maß. Dann gilt

$$\forall \omega \in N \exists a < b : \lim_{T \rightarrow \infty} D([a, b], T)(\omega) =: D([a, b])(\omega) = \infty$$

Gleichzeitig gilt aber mit monotoner Konvergenz

$$\mathbb{E}(D([a, b])) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(D([a, b], T)) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \mathbb{E}((X_T - b)^+) < \infty$$

d.h.

$$P(N) \leq P \left(\bigcup_{\substack{a, b \in \mathbb{Q} \\ a < b}} \{D([a, b]) = \infty\} \right) = 0$$

Wir erhalten also

$$P(X \neq \bar{X}) = 0$$

□

Satz 3.32 (Abschließbarkeit von Martingalen). *Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsstetiges Martingal. Dann sind äquivalent:*

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existiert im Sinne der L^1 -Konvergenz.
2. $\exists X_\infty \in L^1$, sodass $X_t = \mathbb{E}(X_\infty | \mathfrak{F}_t) \forall t \geq 0$.
3. Die Menge der Zufallsvariablen $\{X_t \mid t \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Im positiven Fall ist $(X_t)_{t \in [0, \infty]}$ ein Martingal mit $\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\mathfrak{F}_t; t \geq 0)$. Es wird der Abschluss von X_\bullet genannt.

Bemerkung (Gleichgradige Integrierbarkeit). Seien $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{X_k\}_{k \in \kappa}$ eine Menge von Zufallsvariablen. Dann heißt $\{X_k\}_{k \in \kappa}$ *gleichgradig integrierbar*, falls

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} \int_{\{|X_k| > c\}} |X_k| dP = 0$$

Kovertgenzatz von Vitali: Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von L^1 -Variablen. Dann sind äquivalent:

1. $X_n \rightarrow X_\infty$ in L^1
2. $X_n \rightarrow X_\infty$ im Maß-Sinne und $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis von Satz 3.32.

1 \Rightarrow 2: Es gilt

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$$

Mit 3.29 folgt $X_t \rightarrow X_\infty$ P -fast sicher. Für alle $h \geq 0$ gilt außerdem

$$\mathbb{E}(X_{t+h} | \mathfrak{F}_t) = X_t$$

Mit $h \rightarrow \infty$ gilt dann

$$\mathbb{E}(X_\infty | \mathfrak{F}_t) = X_t$$

2 \Rightarrow 3: Da X_t ein Martingal und $|\cdot|$ konvex ist, ist $|X_t|$ ein Submartingal.

$$\Rightarrow \int_{|X_t| \geq C} |X_t| dP \leq \int_{|X_t| \geq C} |X_\infty| dP$$

Es gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung

$$P(|X_t| \geq C) \leq \frac{1}{C} \mathbb{E}(|X_t|) \leq \frac{1}{C} \mathbb{E}(|X_\infty|) \rightarrow 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{|X_t| > C} |X_\infty| dP &\leq \int_{|X_t| > C; |X_\infty| \geq \beta} |X_\infty| dP + \beta \cdot P(|X_t| \geq C) \\ &\leq \int_{|X_\infty| \geq \beta} |X_\infty| dP + \beta \cdot \frac{1}{C} \cdot \mathbb{E}(|X_\infty|) \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von Maßen wähle zu $\delta > 0$ ein $\beta \gg 1$, sodass

$$\int_{|X_\infty| \geq \beta} |X_\infty| dP \leq \frac{\delta}{2}$$

Wähle weiter $C_0 \geq \frac{\delta}{2\mathbb{E}(|X_\infty|)\beta}$. Dann gilt

$$\int_{|X_t| \geq C} |X_t| dP \leq \int_{|X_\infty| \geq \beta} |X_\infty| dP + \frac{\beta}{C} \leq \delta \quad \forall C \geq C_0$$

3 \Rightarrow 1: Aus $\{X_t\}$ gleichgradig integrierbar folgt

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$$

und nach dem Konvergenzsatz von Vitali folgt, dass X_t in L^1 gegen ein X_∞ konvergiert. \square

3.3.3 Anwendung bei der Brown'schen Bewegung

Sei $t \mapsto B_t^x = x + B_t$ eine Brown'sche Bewegung mit Start in $B_0^x = x$. Dann gilt für $a < x < b$ mit

$$T_a := \inf \{t \mid B_t^x < a\}$$

$$T_b := \inf \{t \mid B_t^x > b\}$$

1. $\mathbb{E}_x(T_a) = \mathbb{E}_x(T_b) = \infty$

$$2. \mathbb{E}_x(T_a \wedge T_b) = (x - a) \cdot (b - x)$$

$$3. P_x(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}$$

$$4. P_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a}$$

Beweis.

1. folgt aus 2. mit $b \rightarrow \infty$ oder $a \rightarrow -\infty$.

2. Zunächst zeigen wir, dass $B_t^2 - t$ ebenfalls ein Martingal ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 | \mathfrak{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 | \mathfrak{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathfrak{F}_s) + 2\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s) | \mathfrak{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^2 | \mathfrak{F}_s) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}((B_t - B_s)^2)}_{=t-s} + 2B_s \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathfrak{F}_s)}_{=0} + B_s^2 \\ &= t + B_s^2 - s \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathfrak{F}_s) = B_s^2 - s$. Damit ist

$$M_t = (B_{t \wedge T_a \wedge T_b}^x)^2 - t \wedge T_a \wedge T_b$$

ein Martingal. Es folgt

$$\begin{aligned} x^2 &= \mathbb{E}(M_0) \\ &= \mathbb{E}(M_t) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(B_{t \wedge T_a \wedge T_b}^x\right)^2 - t \wedge T_a \wedge T_b\right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} a^2 \cdot P(T_a < T_b) + b^2 \cdot P(T_b < T_a) - \mathbb{E}(T_a \wedge T_b) \end{aligned}$$

Durch Umstellen nach $\mathbb{E}(T_a \wedge T_b)$ und verwenden von 3. bzw. 4. folgt die Behauptung.

3. Es gilt

$$P(T_a < T_b) + P(T_b < T_a) = 1$$

und

$$t \mapsto B_{t \wedge T_a \wedge T_b}^x = (B_t^x)^{T_a \wedge T_b}$$

ist ein stetiges Martingal.

$$\Rightarrow t \mapsto \mathbb{E}\left((B_t^x)^{T_a \wedge T_b}\right) = \text{const}$$

Daher gilt, da $T_a \wedge T_b < \infty$ fast sicher gilt, auch

$$\begin{aligned} x &= \mathbb{E}\left((B_0^x)^{T_a \wedge T_b}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(B_{t \wedge T_a \wedge T_b}^x\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(B_{T_a \wedge T_b}^x\right) \\ &= \mathbb{E}\left(B_{T_a}^x \cdot \mathbf{1}_{T_a < T_b} + B_{T_b}^x \cdot \mathbf{1}_{T_b < T_a}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(a \cdot \mathbf{1}_{T_a < T_b} + b \cdot \mathbf{1}_{T_b < T_a}\right) \\ &= a \cdot P(T_a < T_b) + b \cdot P(T_b < T_a) \\ &= a \cdot P(T_a < T_b) + b \cdot (1 - P(T_a < T_b)) \\ &= b + (a - b) \cdot P(T_a < T_b) \end{aligned}$$

4. siehe 3.

□

3.4 Quadratische Variation von Semi-Martingalen

Definition 3.33.

- X_\bullet ist ein *wachsender Prozess*

$$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} t \mapsto X_t(\omega)$$

ist nicht-fallend für alle ω .

- X_\bullet ist von beschränkter Variation

$$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} S_t(\omega) := \sup_{\substack{\Delta \subset \mathbb{R} \\ \Delta \text{ diskret}}} \sum_{t_i \in \Delta} |X_{t_i \wedge t} - X_{t_{i-1} \wedge t}| < \infty$$

Schreibweise: $X_\bullet \in \mathcal{A}^+$ bzw. $X_\bullet \in \mathcal{A}$.

Lemma 3.34.

$$X_\bullet \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X = Y - Z$$

mit $Y, Z \in \mathcal{A}^+$.

Beweis. Setze

$$Y = \frac{1}{2}(S + X), \quad Z = \frac{1}{2}(S - X)$$

□

Definition 3.35 (Stetiges lokales Martingal). Ein Prozess X_\bullet heißt

- *stetiges lokales Martingal* (kurz $X_\bullet \in \mathcal{M}_{loc}$), wenn X_\bullet stetig ist und eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, s.d. $X_\bullet^{T_n}$ ein Martingal ist für alle n .
- *stetiges Semi-Martingal*, wenn

$$\exists M \in \mathcal{M}_{loc}, A \in \mathcal{A} : X_t = M_t + A_t$$

- $X \in \mathcal{M}_{loc}^0 \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{loc}$ und $X(0) = 0$.

Bemerkung. X ist genau dann ein Martingal, wenn $X \in \mathcal{M}_{loc}$ und für alle $s > 0$ die Menge $\{X_{T \wedge s} \mid T \text{ Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Satz 3.36. *Es gilt*

$$\mathcal{M}_{loc}^0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$$

Insbesondere ist die Zerlegung eines Semi-Martingals eindeutig.

Beweis. Sei $X \in \mathcal{M}_{loc}^0 \cap \mathcal{A}$. Angenommen es existieren Zahlen C_1, C_2

$$X_t < C_1, S_t < C_2 \quad \forall t \geq 0$$

Sei $\varepsilon > 0$, $T_0 := 0$ und

$$T_i := \inf \{t \geq T_{i-1} \mid |X_t - X_{T_{i-1}}| \geq \varepsilon\}$$

Da X_\bullet stetig ist, gilt $T_i \nearrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$. Sei $t > 0$ fix und

$$T'_i := T_i \wedge t$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{T'_n}^2) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (X_{T'_{i+1}}^2 - X_{T'_i}^2) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (X_{T'_{i+1}} - X_{T'_i})^2 \right) + \underbrace{2 \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{n-1} X_{T'_i} (X_{T'_{i+1}} - X_{T'_i}) \right)}_{=0} \\ &\leq \varepsilon \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |X_{T'_{i+1}} - X_{T'_i}| \right) \\ &\leq \varepsilon \cdot \mathbb{E}(S_t) \\ &\leq \varepsilon \cdot C_2 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathbb{E}(X_{T_n \wedge t}^2) \leq C_2 \cdot \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Mit $n \rightarrow \infty$ und dominierter Konvergenz ($|X_t| \leq C_1$) gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &\leq C_2 \cdot \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(X_t^2) = 0 \\ &\Rightarrow X_t = 0 \end{aligned}$$

Allgemeiner Fall: Sei $T_n \nearrow \infty$, X^{T_n} ist ein Martingal. Setze

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_n &:= \inf \{s \geq 0 \mid |X_s| \geq n\} \\ \widetilde{\widetilde{T}}_n &:= \inf \{t \geq 0 \mid S_t \geq n\} \\ \widehat{T}_n &:= \inf(T_n, \widetilde{T}_n, \widetilde{\widetilde{T}}_n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow X^{\widehat{T}_n}$ erfüllt die Eingangsbedingungen mit $C_1 = C_2 = n$.

$\Rightarrow X^{\widehat{T}_n} = 0$. Es gilt

$$\widehat{T}_n \nearrow \infty$$

denn $T_n \nearrow \infty$, da $X \in \mathcal{M}_{loc}$, $\widetilde{T}_n \nearrow \infty$ wegen der Stetigkeit von X und $\widetilde{\widetilde{T}}_n \nearrow \infty$, da X eine lokal beschränkte Variation hat. Mit $n \rightarrow \infty$ folgt $X_t = 0$. \square

Definition 3.37. Für $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots\}$ sei

$$T_t^\Delta(X) := \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

mit $k = \max \{j \mid t_j \leq t\}$. Wir sagen X_\bullet ist von beschränkter quadratische Variation, falls es einen Prozess $\langle X, X \rangle_\bullet$ gibt, sodass

$$P - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} T_t^\Delta(X) = \langle X, X \rangle_t \quad \forall t \geq 0$$

d.h. für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|T_t^\Delta(X) - \langle X, X \rangle_t| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

Satz 3.38 (über die Existenz der quadratischen Variation). *Sei M ein beschränktes stetiges Martingal. Dann ist M von endlicher quadratischer Variation und $\langle M, M \rangle_\bullet$ ist der eindeutig bestimmte wachsende Prozess (mit Start in 0), sodass*

$$t \mapsto M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$$

ein Martingal ist.

Bemerkung.

1. $t \mapsto M_t$ Martingal $\Rightarrow t \mapsto M_t^2$ Submartingal. $\langle M, M \rangle_t$ ist also ein Kompensator, um ein Martingal mit Anteil M_t^2 zu erhalten.
2. $\langle B, B \rangle_t = t$, denn $B_t^2 - t$ ist ein Martingal.

Beweis. Zur Eindeutigkeit:

Seien

$$X_1 = M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathcal{M}$$

$$X_2 = M^2 - \widetilde{\langle M, M \rangle} \in \mathcal{M}$$

$\Rightarrow \underbrace{\langle M, M \rangle}_{\in \mathcal{A}^+} - \underbrace{\widetilde{\langle M, M \rangle}}_{\in \mathcal{A}^+} = X_1 - X_2 \in \mathcal{M}$. Die Differenz zweier wachsender Prozesse ist mindestens von beschränkter Variation, d.h.

$$X_1 - X_2 \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \langle M, M \rangle = \widetilde{\langle M, M \rangle}.$$

Zur Existenz:

Sei $t_i < s < t_{i+1}$. Dann gilt (mit quadratischer Ergänzung)

$$\mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_s) = \mathbb{E}((M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_s) + (M_s - M_{t_i})^2$$

Analog:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_t^\Delta(M) | \mathfrak{F}_s) &= T_s^\Delta(M) + \mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathfrak{F}_s) \\ &= T_s^\Delta(M) + \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathfrak{F}_s) \\ &= T_s^\Delta(M) - M_s^2 + \mathbb{E}(M_t^2 | \mathfrak{F}_s) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2 - T_t^\Delta(M) | \mathfrak{F}_s) = M_s^2 - T_s^\Delta(M)$$

$\Rightarrow (M_t^2 - T_t^\Delta(M))_{t \geq 0}$ ist ein Martingal.

Bemerkung. (T_t^Δ) ist auch ein Kompensator, aber nicht wachsend. Es gilt nämlich

$$T_t^\Delta(M) = \sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

Variiert nun t zwischen t_{k+1} und t_k , so ändert sich nur der letzte Summand

$$(X_t - X_{t_k})^2$$

Dieser muss sich allerdings keineswegs monoton verhalten.

Zeige daher: $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} T_t^\Delta(M)$ existiert.

Sei $a > 0$: Für Δ und Δ' sei $\Delta\Delta'$ die Vereinigung der Zwischenpunkte aus Δ und Δ' .

$$\Rightarrow X_t := T_t^\Delta - T_t^{\Delta'}$$

ist als Differenz zweier Martingale selbst ein Martingal. Mit dem gleichen Argument wie oben ist

$$X_t^2 - T_t^{\Delta\Delta'}(X)$$

ein Martingal mit Start in 0. Insbesondere gilt:

$$\mathbb{E}(X_a^2) = \mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(X))$$

Ziel ist zu zeigen, dass $\mathbb{E}(X_a^2) \rightarrow 0$ für $\|\Delta\Delta'\| \rightarrow 0$.

Wegen $(X + Y)^2 \leq 2 \cdot (X^2 + Y^2)$ gilt nun

$$T_a^{\Delta\Delta'}(X) \leq 2 \cdot \left(T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta) + T_a^{\Delta\Delta'}(T^{\Delta'}) \right)$$

Damit genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)) \rightarrow 0$ für $\|\Delta\Delta'\| \rightarrow 0$. Sei $s_k \in \Delta\Delta'$, $s_k < a$ und sei $t_l = \max\{t \in \Delta \mid t \leq s_k\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_{s_{k+1}}^\Delta - T_{s_k}^\Delta &= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 \\ &= (M_{s_{k+1}} - M_{s_k}) \cdot (M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}) \end{aligned}$$

weil $s_k \leq s_{k+1} \leq t_{l+1}$ gilt. Damit folgt

$$|T_{s_{k+1}}^\Delta - T_{s_k}^\Delta|^2 \leq \left(\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}| \right)^2 \cdot (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})^2$$

Summieren wir über s_k folgt

$$T_a^{\Delta\Delta'}(T_a^{\Delta\Delta'}) \leq (\sup(\dots)) \cdot T_a^{\Delta\Delta'}$$

Nach Voraussetzung existiert C , sodass

$$\sup_t |M_t| \leq C$$

Ferner ist $t \mapsto M_t$ gleichmäßig stetig auf $[0, a]$, d.h.

$$\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}| \xrightarrow{\|\Delta\| \rightarrow 0} 0$$

Mit dominierter Konvergenz gilt dann

$$\mathbb{E}((\sup_k |M_{s_{k+1}} + M_{s_k} - 2M_{t_l}|)^2) \rightarrow 0$$

d.h. der Beweis ist erbracht, falls

$$\sup_{\|\Delta\|, \|\Delta'\| \rightarrow 0} \mathbb{E}((T_a^{\Delta\Delta'})^2) < \infty$$

denn dann gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\mathbb{E}(T_a^{\Delta\Delta'}(T^\Delta)) \leq [\mathbb{E}((\sup(\dots))^2)]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{E}((T_a^{\Delta\Delta'})^2)^{\frac{1}{2}}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [T_a^{\tilde{\Delta}}(M)]^2 &= \left[\sum_k (M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \right]^2 \\ &= \sum_{k,l} (M_{t_k} - \dots)^2 \cdot (M_{t_l \wedge a} - M_{t_{l-1} \wedge a})^2 \\ &= \sum_{k=l} (M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^4 + 2 \cdot \sum_k \sum_{l>k} (M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \cdot (M_{t_l \wedge a} - M_{t_{l-1} \wedge a})^2 \\ &= \sum_{k=l} ((\dots)^4 + 2 \cdot \sum_k (M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \cdot (T_a^{\tilde{\Delta}} - T_{t_k \wedge a}^{\tilde{\Delta}})) \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Erwartungswert ergibt sich

$$\mathbb{E}([T_a^{\tilde{\Delta}}(M)]^2) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=l} (\dots)^4 \right) + 2 \sum_k \underbrace{\mathbb{E}((M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \cdot (T_a^{\tilde{\Delta}} - T_{t_k \wedge a}^{\tilde{\Delta}}))}_{=\eta_k}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}(\eta_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\eta_k | \mathfrak{F}_{t_k})) = \mathbb{E}((M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \cdot \mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}} - T_{t_k \wedge a}^{\tilde{\Delta}} | \mathfrak{F}_{t_k}))$$

Da $T_t^{\tilde{\Delta}} - M_t^2$ ein Martingal ist folgt

$$\mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}} - T_{t_k \wedge a}^{\tilde{\Delta}} | \mathfrak{F}_{t_k}) = \mathbb{E}(M_a^2 - M_{t_k \wedge a}^2 | \mathfrak{F}_{t_k}) = \mathbb{E}((M_a - M_{t_k \wedge a})^2 | \mathfrak{F}_{t_k})$$

Zusammengesetzt ergibt das

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\eta_k) &= \mathbb{E}((M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2 \cdot (M_a - M_{t_k \wedge a})^2) \\ &\leq \sup_{t_k} (M_a - M_{t_k \wedge a})^2 \cdot \mathbb{E}((M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2) \\ &\leq 2 \cdot C^2 \cdot \mathbb{E}((M_{t_k \wedge a} - M_{t_{k-1} \wedge a})^2) \end{aligned}$$

falls $C \geq 0$ s.d. $\sup_{t \geq 0} |M_t| \leq C$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((T_a^{\tilde{\Delta}}(M))^2) &\leq 2 \cdot C^2 \cdot \mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}}(M)) + 4 \cdot C^2 \cdot \mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}}(M)) \\ &\leq 6 \cdot C^2 \cdot \mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}}(M)) \end{aligned}$$

Mit $\mathbb{E}(T_a^{\tilde{\Delta}}(M)) = \mathbb{E}(M_a^2) \leq C^2$ gilt folglich

$$\mathbb{E}([T_a^{\tilde{\Delta}}(M)]^2) \leq 6 \cdot C^4 < \infty$$

unabhängig von der Partition $\tilde{\Delta}$.

$\Rightarrow \mathbb{E}((T_a^{\tilde{\Delta}}(M) - T_a^{\Delta'}(M))^2) \rightarrow 0$, falls $\|\Delta\|, \|\Delta'\| \rightarrow 0$.

$\Rightarrow \exists \langle M, M \rangle_a$, s.d.

$$\mathbb{E}(|T_a^{\tilde{\Delta}}(M) - \langle M, M \rangle_a|^2) \rightarrow 0 \quad \forall a$$

Insbesondere folgt mit Tschebyschev:

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|T_a^{\tilde{\Delta}}(M) - \langle M, M \rangle_a| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}(|\dots|^2) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow a \mapsto \langle M, M \rangle_a$ ist die quadratische Variation von M .

Zur Stetigkeit von $\langle M, M \rangle_\bullet$:

Die Doob'sche L^2 -Ungleichung liefert

$$\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq a} |T_s^{\Delta_n}(M) - T_s^{\Delta_m}(M)|^2 \right) \leq 2 \cdot \mathbb{E}((T_a^{\Delta_n}(M) - T_a^{\Delta_m}(M))^2) \rightarrow 0$$

für jede Folge $\{\Delta_n\}$ mit $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Für eine Teilfolge n' gilt dann, dass

$$s \mapsto T_s^{\Delta_{n'}}(M)(\omega)$$

auf $[0, a]$ in der sup-Norm gegen eine gewisse Funktion

$$s \mapsto \eta_s(\omega)$$

konvergiert für P -fast jedes $\omega \in \Omega$. Weil $T_\bullet^{\Delta_{n'}}(\omega)$ stetig ist, ist $\eta_\bullet(\omega)$ ebenfalls stetig. Wegen

$$T_s^{\Delta_{n'}} \rightarrow \langle M, M \rangle_s$$

in L^2 gilt

$$\eta_s = \langle M, M \rangle_s \quad P\text{-fast sicher}$$

Wegen der Eindeutigkeit von

$$\langle M, M \rangle_\bullet = P - \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} T_\bullet^{\Delta}(M)$$

ist $\eta_\bullet = \langle M, M \rangle_\bullet$ und insbesondere (trajektorienweise) fast sicher stetig.

Zur Martingaleigenschaft: Wir haben

$$\mathbb{E}(M_t^2 - \underbrace{T_t^{\Delta_n}(M)}_{\rightarrow \langle M, M \rangle_t} | \mathfrak{F}_s) = M_s^2 - \underbrace{T_s^{\Delta_n}(M)}_{\rightarrow \langle M, M \rangle_s}$$

Die bedingte Erwartung ist mit L^2 -Konvergenz verträglich

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2 - \langle M, M \rangle_t | \mathfrak{F}_s) = M_s^2 - \langle M, M \rangle_s$$

$\Rightarrow (M_t^2 - \langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal.

Zur Monotonie:

Sei $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n \forall n$.

$$\bar{\Delta} := \bigcup_{n \geq 0} \Delta_n$$

Für $s, t \in \Delta_n, s \leq t$, gilt

$$T_s^{\Delta_m}(M) \leq T_t^{\Delta_m}(M) \forall m \geq n$$

Wegen

$$T_x^{\Delta_m} \rightarrow \langle M, M \rangle_x$$

folgt

$$\langle M, M \rangle_s \leq \langle M, M \rangle_t \forall s \leq t \in \bar{\Delta}$$

Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \langle M, M \rangle_t$ folgt hieraus die Monotonie von $\langle M, M \rangle_\bullet$. \square

Bemerkung.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n} - \langle M, M \rangle_s|^2) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \mathbb{E}(|T_t^{\Delta_n} - \langle M, M \rangle_t|^2) = 0$$

Insbesondere: Für alle $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n} - \langle M, M \rangle_s| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

In Worten: $(t \mapsto T_t^{\Delta_n}(M))$ konvergiert gegen $(t \mapsto \langle M, M \rangle_t)$ P -stochastisch (in ω) lokal gleichmäßig in t .

Lemma 3.39.

$$\langle M^T, M^T \rangle_\bullet = \langle M, M \rangle_\bullet^T$$

Beweis. $M^2 - \langle M, M \rangle$ Martingal $\Rightarrow (M^T)^2 - \langle M, M \rangle^T$ ist ein Martingal.

Da auch $(M^T)^2 - \langle M^T, M^T \rangle$ ein Martingal ist, folgt

$$\langle M, M \rangle^T = \langle M^T, M^T \rangle$$

\square

Satz 3.40. Sei $M \in \mathcal{M}_{loc}$ stetig. Dann existiert ein eindeutiger wachsender Prozess $\langle M, M \rangle_\bullet$, sodass $\langle M, M \rangle_0 = 0$ und

$$M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$$

Ferner: $\langle M, M \rangle_\bullet = P - \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} T_\bullet^{\Delta_n}(M)$ gilt lokal gleichmäßig auf $[0, a)$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt wie in Satz 3.38 aus $\mathcal{M}_{loc}^0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Zur Existenz: O.B.d.A. existiere $T_n \nearrow \infty$, sodass für alle $n \geq 0$

$$M^n := M^{T_n}$$

ein beschränktes Martingal ist. Damit existiert $\langle M^n, M^n \rangle$ und

$$(M^n)^2 - \langle M^n, M^n \rangle$$

ist ein Martingal. Für $n \leq m$ gilt

$$(M^m)^{T_n} = M^n$$

Daher folgt

$$\langle M^m, M^m \rangle^{T_n} = \langle M^n, M^n \rangle$$

d.h. für alle ω ist

$$\langle M, M \rangle(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n, M^n \rangle_t(\omega) = \langle M^m, M^m \rangle_t(\omega)$$

falls $T_m(\omega) \geq t$. Daher ist $\langle M, M \rangle$ ein wohldefinierter Prozess. Ferner ist

$$(M^{T_n})^2 - \langle M, M \rangle^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^n, M^n \rangle$$

offensichtlich ein Martingal und somit

$$M^2 - \langle M, M \rangle$$

ein lokales Martingal.

Zur Konvergenz: Sei $\delta > 0$: Wegen $T_n \nearrow \infty$ existiert zu $t > 0$ $T = T_k$, sodass

$$P(T < t) \leq \delta$$

Auf $\{s \leq T\}$ gilt

$$\langle M, M \rangle_s = \langle M, M \rangle_s^T = \langle M^T, M^T \rangle_s$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq T} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M, M \rangle_s| \geq \varepsilon\right) &\leq \delta + P\left(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M, M \rangle_s| \geq \varepsilon; T \geq t\right) \\ &= \delta + P\left(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M^T) - \langle M^T, M^T \rangle_s| \geq \varepsilon; T \geq t\right) \\ &\leq \delta + P\left(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M^T) - \langle M^T, M^T \rangle_s| \geq \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Da M^T ein beschränktes stetiges Martingal ist, folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{s \leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M, M \rangle_s| \geq \varepsilon\right) \leq \delta$$

Da dies für alle $\delta \geq 0$ gilt, folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz. \square

Satz 3.41. $M, N \in \mathcal{M}_{loc} \Rightarrow \exists ! \langle M, N \rangle_{\bullet} \in \mathcal{A}$, sodass $\langle M, N \rangle_0 = 0$ und

$$M \cdot N - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$$

Ferner gilt

$$T_{\bullet}^{\Delta_n}(M, N) \rightarrow \langle M, N \rangle_{\bullet}$$

lokal gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit mit

$$T_s^{\Delta_n}(M, N) = \sum_{i \in \Delta_n} (M_{t_i \wedge s} - M_{t_{i-1} \wedge s}) \cdot (N_{t_i \wedge s} - N_{t_{i-1} \wedge s})$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} M \cdot N &= \frac{1}{4} [(M + N)^2 - (M - N)^2] \\ \Rightarrow \langle M, N \rangle &:= \frac{1}{4} (\langle M + N, M + N \rangle - \langle M - N, M - N \rangle) \\ &\Rightarrow M \cdot N - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{loc} \end{aligned}$$

Der Rest funktioniert analog. □

Definition 3.42. Wir sagen X_{\bullet} ist ein *stetiges Semi-Martingal* ($X_{\bullet} \in \mathcal{S}$), falls

$$X = M + A$$

für $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}$.

Satz 3.43.

$$X \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\bullet}^{\Delta_n}(X) = \langle M, M \rangle$$

Beweis.

$$\begin{aligned} T_s^{\Delta_n}(X) &= \sum_i (X_{t_i \wedge s} - X_{t_{i-1} \wedge s})^2 \\ &= T_s^{\Delta_n}(M) + 2 \cdot T_s^{\Delta_n}(M, A) + T_s^{\Delta_n}(A) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} T_s^{\Delta_n}(M, A) &= \sum (M_{t_i \wedge s} - M_{t_{i-1} \wedge s}) \cdot (A_{t_i \wedge s} - A_{t_{i-1} \wedge s}) \\ &\leq \sup_{\substack{t_i \in \Delta_n \\ t_i \leq s}} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}| \cdot \sum_i |A_{t_i \wedge s} - A_{t_{i-1} \wedge s}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $t \mapsto M_t$. Analog folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_s^{\Delta_n}(A, A) = 0$$

□

Satz 3.44. Für $X, Y \in \mathcal{S}$ existiert

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim T^{\Delta_n}(X, Y)_t$$

und es gilt

$$|\langle X, Y \rangle_t| \leq \sqrt{\langle X, X \rangle_t} \cdot \sqrt{\langle Y, Y \rangle_t}$$

Definition 3.45. Es sei

$$\mathcal{H} := \left\{ M \in \mathcal{M} \mid \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|M_t|^2) < \infty \right\}$$

die Menge der L^2 -beschränkten Martingale.

Satz 3.46.

1. $M \in \mathcal{H} \Rightarrow M_\infty$ existiert, d.h. M ist ein abschließbares Martingal mit $M_\infty \in L^2$.
2. \mathcal{H} ist ein Hilbert-Raum mit der Norm

$$\|M\|_{\mathcal{H}} := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|M_t|^2)^{1/2} = \mathbb{E}(|M_\infty|^2)^{1/2}$$

3. Äquivalent dazu ist die Norm

$$\mathbb{E}(|M_\infty^*|^2)^{1/2} = \mathbb{E}(\sup_{t \geq 0} |M_t|^2)^{1/2}$$

4. Für $M \in \mathcal{H}_0 := \{M \in \mathcal{H} \mid M_0 = 0\}$ existiert $\langle M, M \rangle_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle M, M \rangle_t$ mit

$$\|M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty)$$

Beweis.

1. $(|M_t|)_{t \geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar:

$$\begin{aligned} \int_{|M_t| \geq \alpha} |M_t| \, dP &\leq (\mathbb{E}(|M_t|^2))^{1/2} \cdot (P(|M_t| \geq \alpha))^{1/2} \\ &\leq (\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|M_t|^2))^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} \mathbb{E}(|M_t|^2) \right)^{1/2} \\ &\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \int_{|M_t| \geq \alpha} |M_t| \, dP = 0 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|M_t^+|) &\leq \mathbb{E}(|M_t|) \leq (\mathbb{E}(|M_t|^2))^{1/2} < \infty \\ &\Rightarrow \exists M_\infty : \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = M_\infty \text{ } P\text{-fast sicher} \end{aligned}$$

Mit Vitali folgt dann $M_t \rightarrow M_\infty$ in $L^1(\Omega, P)$.

$$\Rightarrow M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathfrak{F}_t) \quad (*)$$

d.h. (M_t) ist abschließbar und nach Fatou gilt

$$\mathbb{E}(M_\infty^2) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_t^2) < \infty$$

2. Aus (*) und $M_\infty \in L^2$ folgt, dass $(|M_t|^2)_{t \geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist. Nach Vitali folgt dann

$$M_t \rightarrow M_\infty$$

in L^2 . Zusammen mit der Monotonie von

$$t \mapsto \mathbb{E}(|M_t|^2)$$

folgt hieraus

$$\mathbb{E}(M_\infty^2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(M_t^2)$$

Also ist in der Tat

$$\|M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}(M_\infty^2)$$

Zur Vollständigkeit von \mathcal{H} :

Sei $\{M^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathcal{H} -Cauchy-Folge. $\Rightarrow M_\infty^n$ ist eine L^2 -Cauchy-Folge, d.h. es existiert

$$\overline{M_\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} M_\infty^n$$

in L^2 . Ferner gilt mit der Doob'schen Maximal-Ungleichung

$$\mathbb{E} \left(\sup_s |M_s^n - M_s^m|^2 \right) \leq 4 \cdot \mathbb{E}(|M_\infty^n - M_\infty^m|^2) \rightarrow 0$$

Nach Wahl einer Teilfolge n' gilt

$$M_{\bullet}^{n'}(\omega) \rightarrow \widetilde{M}_{\bullet}(\omega)$$

(lokal) gleichmäßig in t für P -fast jedes $\omega \in \Omega$.

$\Rightarrow t \mapsto \widetilde{M}_t(\omega)$ ist stetig für P -fast jedes ω . Ferner folgt durch Grenzübergang $n' \rightarrow \infty$ in

$$\mathbb{E}(M_\infty^{n'} | \mathfrak{F}_s) = M_s^{n'}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\overline{M_\infty} | \mathfrak{F}_s) &= \widetilde{M}_s \\ \Rightarrow \overline{M_\infty} &= \widetilde{M_\infty} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\widetilde{M}_s)_{s \in [0, \infty]}$ ist ein abgeschlossenes Martingal mit $(\widetilde{M}_s)_{s \geq 0} \in \mathcal{H}$ und

$$\left\| \widetilde{M} - M^n \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}((\widetilde{M_\infty} - M_\infty^n)^2) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow \mathcal{H}$ ist vollständig.

3. Es gilt

$$\mathbb{E}((M_t^*)^2) \leq 4 \cdot \mathbb{E}(M_t^2)$$

dabei sei $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$. Mit $t \rightarrow \infty$ folgt

$$\mathbb{E}((M_\infty^*)^2) \leq 4 \cdot \mathbb{E}(M_\infty^2) = 4 \cdot \|M\|_{\mathcal{H}}^2$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} |M_t|^2 &\leq (M_t^*)^2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(|M_t|^2) &\leq \mathbb{E}((M_t^*)^2) \end{aligned}$$

und mit $t \rightarrow \infty$

$$\|M\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathbb{E}((M_\infty^*)^2)$$

4. $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t \in \mathcal{M}_{(loc)}$. Es gilt

$$\begin{aligned} M_0^2 - \langle M, M \rangle_0 &= 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2) - \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t) &= 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_t) \end{aligned}$$

Wegen Fatou und mit monotoner Konvergenz für $\langle M, M \rangle_t \rightarrow \langle M, M \rangle_\infty$ gilt dann auch

$$\|M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}(M_\infty^2) = \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty)$$

□

Erinnerung an das Stieltjes-Integral

Es gilt genau dann

$$t \mapsto f(t)$$

mit $f \in \mathcal{A}$, wenn f von beschränkter Variation ist mit

$$\forall s : \sup_{\Delta \subset [0,s]} \sum |f(t_{i+1}) - f(t_i)| =: S_s(f) < \infty$$

Dies ist äquivalent zu einer Zerlegung

$$f = g_1 - g_2$$

mit g_1, g_2 monoton.

Falls zudem f rechtsstetig ist, ist dies wiederum äquivalent zur Existenz eines signierten Maßes μ auf \mathbb{R} mit

$$f(t) = \mu((0, t])$$

Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann definiere

$$(h \bullet f)_t := \int_0^t h(s) df_s = \int_{\mathbb{R}} h(s) \cdot \mathbf{1}_{(0,t]}(s) \mu(ds)$$

Dies ist das *Lebesgue-Stieltjes-Integral*.

Satz 3.47. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{A}$ und rechtsstetig.

1. Falls $f \in C^1$ ist, gilt

$$(h \bullet f)_t = \int_0^t h(s) df_s = \int_0^t h(s) \cdot f'(s) ds$$

2. $(h \bullet f) \in \mathcal{A}$ und rechtsstetig und es gilt

$$g \bullet (h \bullet f) = (g \cdot h) \bullet f$$

3. Falls h linksstetig und beschränkt

$$(h \bullet f)_t = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{\substack{t_i \in \Delta \\ t_i > 0}} h(t_i) \cdot (f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

Beweis.

zu 3.: Definiere $h^\Delta(s) := \sum_{t_i \in \Delta} h(t_i) \cdot \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s)$. Die Linksstetigkeit von h liefert

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} h^\Delta(s) = h(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Weiter sei

$$S^\Delta(h, f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0, t]}(s) \cdot h^\Delta(s) \mu(ds)$$

Nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt dann mit $\|\Delta\| \rightarrow 0$

$$S^\Delta(h, f)(t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0, t]}(s) \cdot h(s) \mu(ds) = (h \bullet f)_t$$

□

Definition 3.48. X_\bullet heißt als reellwertiger Prozess *messbar*, falls

$$X_\bullet : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathfrak{F}_\infty(\Omega) / \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist.

Lemma 3.49. X_\bullet ist genau dann messbar, wenn es eine Folge $(X_\bullet^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Prozessen der Form

$$X_t^{(n)}(\omega) = \mathbf{1}_{\{0\}}(t) K_0^{(n)} + \sum_{i=1}^{N^{(n)}} \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) K_i^{(n)}(\omega)$$

gibt, wobei $K_1^{(n)}, \dots, K_{N^{(n)}}^{(n)}$ \mathfrak{F}_∞ -messbare Zufallsvariablen seien, sodass für alle $(t, \omega) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega$

$$X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)}(\omega)$$

gilt.

Bemerkung. X_\bullet progressiv messbar $\Rightarrow X_\bullet$ messbar.

Definition 3.50. Seien X_\bullet messbar, $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$. Dann definiere

$$(X \bullet \langle M, N \rangle)_t(\omega) := \left(\int_0^t X_s d\langle M, N \rangle_s \right) (\omega)$$

Lemma 3.51. Für X, Y messbar, $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ gilt

$$\left| \int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s \right| \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}$$

P -fast sicher.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Approximation durch X^n, Y^n wie in obigem Lemma und

$$\sum_i K_i K'_i \cdot (\Delta_i M)(\Delta_i N) \leq \left(\sum_i (K_i)^2 (\Delta_i M)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_i (K'_i)^2 (\Delta_i N)^2 \right)^{1/2}$$

mit

$$\Delta_i M = M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}$$

und $\Delta_i N$ analog. □

Korollar 3.52 (Kunita-Watanabe-Ungleichung).

$$\left| \mathbb{E} \left(\int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s \right) \right| \leq \left[\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t X_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{p/2} \right) \right]^{1/p} \cdot \left[\mathbb{E} \left(\left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{q/2} \right) \right]^{1/q}$$

für alle $t \in [0, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bemerkung. Mit der Kunita-Watanabe-Ungleichung ist meist der Fall mit $t = \infty$ gemeint.

Definition 3.53.

◦ Sei $M \in \mathcal{H}$. Dann sei

$$L^2(M) := \left\{ X_\bullet \text{ progressiv messbar} \mid \|X\|_{L^2(M)} < \infty \right\}$$

mit

$$\|X\|_{L^2(M)}^2 := \mathbb{E} \left(\int_0^\infty X_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)$$

die Menge der bzgl. M quadratintegrierbaren progressiv messbaren Prozesse.

Bemerkung. Mit dem neuen Maß auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega$

$$P_M(\Gamma) := \mathbb{E} \left(\int_0^\infty \mathbf{1}_\Gamma(s, \omega) d\langle M, M \rangle_s \right) = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathbf{1}_\Gamma(s, \omega) \cdot d\langle M, M \rangle_s(\omega) P(d\omega)$$

für $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathfrak{F}_\infty$ ist $L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega, P_M, \Pi)$ mit der progressiven σ -Algebra

$$\Pi := \sigma(X_\bullet; X_\bullet : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ progressiv messbar})$$

3.5 Konstruktion des stochastischen Integrals

Satz 3.54. Sei $M \in \mathcal{H}$, $K \in L^2(M)$. Dann existiert ein eindeutiges Element

$$K \bullet M \in \mathcal{H}_0$$

sodass

$$\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle \quad \forall N \in \mathcal{H} \quad (*)$$

Ferner ist die Zuordnung

$$K \mapsto K \bullet M$$

eine Isometrie von $L^2(M)$ nach \mathcal{H}_0 .

Definition 3.55. $K \bullet M$ heißt *Ito-Integral* (bzw. *stochastisches Integral*) von K nach M .

Beweis von Satz 3.54.

Eindeutigkeit: Angenommen es existieren L, \tilde{L} mit (*). Dann gilt

$$\langle L - \tilde{L}, N \rangle_{\bullet} = 0_{\bullet} \quad \forall N \in \mathcal{H}$$

Insbesondere für $N = L - \tilde{L}$:

$$\Rightarrow \left\| L - \tilde{L} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}(\langle L - \tilde{L}, L - \tilde{L} \rangle_{\infty}) = 0$$

$$\Rightarrow L = \tilde{L} \text{ in } \mathcal{H}$$

Existenz: Falls zunächst $M \in \mathcal{H}_0$ gilt, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} K_s d\langle M, N \rangle_s \right) &\leq \left[\mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right) \right]^{1/2} \cdot \left[\mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} 1 d\langle N, N \rangle_s \right) \right]^{1/2} \\ &= \|K\|_{L^2(M)} \cdot \mathbb{E}(\langle N, N \rangle_{\infty})^{1/2} \\ &= \|K\|_{L^2(M)} \cdot \|N\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung $\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$N \mapsto \mathbb{E} \left(\int_0^{\infty} K_s d\langle M, N \rangle_s \right)$$

ist linear und stetig bzgl. der \mathcal{H}_0 -Norm. $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ist ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums \mathcal{H} . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz existiert genau ein Element $L \in \mathcal{H}_0$, sodass für alle $N \in \mathcal{H}_0$

$$\mathbb{E}(\langle K \bullet \langle M, N \rangle \rangle_{\infty}) = \mathbb{E}(L_{\infty} \cdot N_{\infty}) \quad (**)$$

Wir bezeichnen L auch mit $K \bullet M$. $K \bullet M$ erfüllt (*): Sei $N \in \mathcal{H}_0$ und T eine Stoppzeit. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(K \bullet M)_T \cdot N_T] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[K \bullet M]_\infty | \mathfrak{F}_T] \cdot N_T \\
&= \mathbb{E}[(K \bullet M)_\infty \cdot N_T] \\
&= \mathbb{E}[\underbrace{(K \bullet M)_\infty}_{=L_\infty} \cdot N_\infty^T] \\
&\stackrel{(**)}{=} \mathbb{E}[(K \bullet \langle M, N^T \rangle)_\infty] \\
&= \mathbb{E}[(K \bullet \langle M, N \rangle^T)_\infty] \\
&= \mathbb{E}[(K \bullet \langle M, N \rangle)_\infty^T] \\
&= \mathbb{E}[(K \bullet \langle M, N \rangle)_T]
\end{aligned}$$

\Rightarrow Für den Prozess $(K \bullet M)_\bullet N_\bullet - (K \bullet \langle M, N \rangle)_\bullet = Z_\bullet$ gilt also:

$$\mathbb{E}(Z_T) = 0 \quad \forall \text{ Stoppzeiten } T$$

$\Rightarrow Z_\bullet$ ist ein Martingal, $(K \bullet \langle M, N \rangle)_\bullet \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\|K \bullet M\|_{\mathcal{H}}^2 &= \mathbb{E}[(K \bullet M)_\infty^2] \\
&= \mathbb{E}[\langle K \bullet M, K \bullet M \rangle_\infty] \\
&\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}[\langle K \bullet \langle M, K \bullet M \rangle \rangle_\infty] \\
&\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E}[\langle K^2 \bullet \langle M, M \rangle \rangle_\infty] \\
&= \|K\|_{L^2(M)}^2
\end{aligned}$$

d.h. $K \mapsto K \bullet M$ ist eine Isometrie (genannte *Ito-Isometrie*).

Sei nun $N \in \mathcal{H}$ beliebig. Setze $\tilde{N} = N - N_0 \in \mathcal{H}_0$. Dann gilt

$$\langle K \bullet M, \tilde{N} \rangle = \langle K \bullet M, N \rangle, \quad K \bullet \langle M, \tilde{N} \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$$

und somit

$$\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$$

Für $M \in \mathcal{H}$ beliebig setze $\tilde{M} = M - M_0 \in \mathcal{H}_0$. Dann gilt

$$\langle K \bullet M, N \rangle = \langle K \bullet \tilde{M}, N \rangle = K \bullet \langle \tilde{M}, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$$

Die beiden Rechnungen sind leichte Übungen. □

Definition 3.56. $K = K_\bullet$ heißt *Elementarprozess*, falls

$$K_t(\omega) = Z_{-1}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$$

mit $Z_i \mathfrak{F}_{t_i}$ -messbar ist.

Satz 3.57. Seien $M \in \mathcal{H}$, K Elementarprozess mit $|Z_i| \leq C < \infty$. Dann gilt $K \in L^2(\mathcal{H})$ und

$$\begin{aligned} (K \bullet M)_t &= \sum_{i=0}^{\infty} Z_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + Z_n (M_t - M_{t_n}) \text{ falls } t \in (t_n, t_{n+1}] \end{aligned}$$

und

$$\|K \bullet M\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^{\infty} K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} (Z_i)^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \right]$$

Beweis. Sei

$$(K * M)_t := \sum_{i=0}^{\infty} Z_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

Dann ist $(K * M)$ ein Martingal, denn für $s \in [t_{k+1}, t_k)$, $t \in [t_n, t_{n+1})$, $s \leq t$ gilt:

$$(K * M)_t - (K * M)_s = \underbrace{\sum_{i=k}^{n-1} Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})}_{=:I} + \underbrace{Z_n (M_t - M_{t_n})}_{=:II} + \underbrace{Z_{k-1} (M_s - M_{t_k})}_{=:III}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I | \mathfrak{F}_s] &= \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) | \mathfrak{F}_{t_i}] | \mathfrak{F}_s \right] \\ &= \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{E} [Z_i \cdot \mathbb{E} [M_{t_{i+1}} - M_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}] | \mathfrak{F}_s] = 0 \end{aligned}$$

da M ein Martingal ist. Analog gilt $\mathbb{E}[II | \mathfrak{F}_s] = 0$. Weiter gilt

$$\mathbb{E}[III | \mathfrak{F}_s] = Z_{k-1} \cdot \mathbb{E}[M_s - M_{t_k} | \mathfrak{F}_s]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[(K * M)_t - (K * M)_s | \mathfrak{F}_s] = 0$. Das "diskrete" stochastische Integral von Elementarprozessen bzgl. einem Martingal ist wieder ein Martingal. $t \mapsto (K * M)_t$ ist stetig.

Hierzu sei o.B.d.A. $s = t_k$, $t = t_n$ (andernfalls ergänze die Partition t_i). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(K * M)_t^2 - (K * M)_s^2 | \mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E} [((K * M)_t - (K * M)_s)^2 | \mathfrak{F}_s] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=k}^n Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \right)^2 | \mathfrak{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=k}^n (Z_i)^2 (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 | \mathfrak{F}_s \right] \\
&\quad + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{i,j=k \\ i>j}}^n Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) (M_{t_{j+1}} - M_{t_j}) | \mathfrak{F}_s \right]}_{=0} \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=k}^n (Z_i)^2 (M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2) | \mathfrak{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=k}^n (Z_i)^2 (\langle M, M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M, M \rangle_{t_i}) | \mathfrak{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} [(K^2 \bullet \langle M, M \rangle)_t - (K^2 \bullet \langle M, M \rangle)_s | \mathfrak{F}_s]
\end{aligned}$$

Insgesamt bedeutet das

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(K * M)_t^2 - (K^2 \bullet \langle M, M \rangle)_t | \mathfrak{F}_s] &= (K * M)_s^2 - (K^2 \bullet \langle M, M \rangle)_s \\
&\Rightarrow \langle K * M, K * M \rangle = K^2 \bullet \langle M, M \rangle
\end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\|K * M\|_{\mathcal{H}}^2 = E[(K^2 \bullet \langle M, M \rangle)_\infty] \leq C^2 \cdot \mathbb{E}(\langle M, M \rangle_\infty) \leq C^2 \cdot \|M\|_{\mathcal{H}}$$

$\Rightarrow K * M \in \mathcal{H}$. Durch Polarisation folgt

$$\langle K * M, \widehat{K} * N \rangle = K \widehat{K} \bullet \langle M, N \rangle$$

für Elementarprozesse K, \widehat{K} und $M, N \in \mathcal{H}$. Insbesondere wähle $\widehat{K} = \mathbf{1}$. Dann gilt

$$\widehat{K} * N = N \quad \forall N \in \mathcal{H}_0$$

und somit

$$\langle K * M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle \quad \forall N \in \mathcal{H}_0$$

$\Rightarrow K * M = K \bullet M$ im Sinne des vorigen Satzes. □

Bemerkung. Die Ito-Isometrie für eine Folge $(K^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Normen

$$\|(K^n \bullet M)\|_{\mathcal{H}} = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty (K_s^n)^2 d\langle M, M \rangle_s \right]$$

erlaubt $K \bullet M := \lim_{n \rightarrow \infty} (K^n \bullet M)$ im Sinne eines Limes im Raum \mathcal{H} zu definieren. Somit kann man beliebige Prozesse durch Elementarprozesse approximieren.

Satz 3.58. Seien $K \in L^2(M), H \in L^2(K \bullet M)$. Dann gilt

$$HK \in L^2(M)$$

und

$$(H \cdot K) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$$

Beweis. Es gilt mit der Assoziativität des Stieltjes-Integrals

$$\langle (HK) \bullet M, N \rangle = (HK) \bullet \langle M, N \rangle = H \bullet (K \bullet \langle M, N \rangle) = H \bullet \langle K \bullet M, N \rangle = \langle H \bullet (K \bullet M), N \rangle$$

$\Rightarrow (HK) \bullet M = H \bullet (K \bullet M)$ im Raum \mathcal{H}_0 und damit auch in \mathcal{H} . \square

Satz 3.59. Sei T eine Stoppzeit. Dann gilt

$$K \bullet M^T = (K \cdot \mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet M = (K \bullet M)^T$$

Beweis. Klar. \square

Definition 3.60. Sei K progressiv messbar. K heißt *lokal beschränkt*, falls eine lokalisierende Folge (T_n) von Stoppzeiten und $c_n > 0, c_n \nearrow \infty$ existieren mit

$$|K_{\bullet}^{T_n}| < c_n$$

Definition 3.61. Sei $M \in \mathcal{M}_{loc}$ ein lokales Martingal. Dann bezeichne $L_{loc}^2(M)$ die Menge aller K_{\bullet} , s.d. K progressiv messbar und lokal beschränkt ist und eine lokalisierende Folge $(T_n)_n$ von Stoppzeiten existiert, s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T_n} K_s^2 d\langle M, M \rangle \right] < \infty$$

$L_{loc}^2(M)$ heißt *Menge der lokal nach M integrierbaren Prozesse*.

Satz 3.62. Falls $K \in L_{loc}^2(M)$, so existiert ein eindeutiges stetiges lokales Martingal $(K \bullet M)$ mit Start in 0, s.d.

$$\langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle \quad \forall N \in \mathcal{M}_{loc}$$

Beweis. Es existiert eine Folge von Stoppzeiten

$$\widehat{T}_n := T_n \wedge S_n$$

mit z.B. $S_m := \inf \{t \geq 0 \mid |M_t| \geq m\}$, s.d.

1. $M^{\widehat{T}_n} \in \mathcal{H}$

2. $\mathbb{E} \left[\int_0^{\widehat{T}_n} K_s^2 d\langle M, M \rangle \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{\widehat{T}_n} K_s^2 d\langle M^{\widehat{T}_n}, M^{\widehat{T}_n} \rangle \right] < \infty$, d.h. $K \in L^2(M^{\widehat{T}_n})$.

$\Rightarrow \exists ! K \bullet M^{\widehat{T}_n}$ welches die Behauptung erfüllt. Wegen dem vorigen Satz gilt

$$(K \bullet M^{\widehat{T}_n})^{\widehat{T}_m} = K \bullet (M^{\widehat{T}_n})^{\widehat{T}_m} = K \bullet M^{\widehat{T}_m}$$

falls $m \leq n$, d.h. für $t > 0$ gilt

$$(K \bullet M^{\widehat{T}_m})_t = (K \bullet M^{\widehat{T}_n})_t \quad \forall n > m$$

falls $\widehat{T}_m > t$. Damit existiert

$$(K \bullet M)_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} (K \bullet M^{\widehat{T}_n})_t(\omega) = (K \bullet M^{\widehat{T}_m})_t(\omega)$$

für $\widehat{T}_m > t$. Der Prozess $K \bullet M$ hat dann die geforderte Eigenschaft und ist eindeutig. \square

Bemerkung (Erinnerung). \mathcal{S} ist die Klasse der stetigen Semi-Martingale, d.h. es gilt genau dann $X \in \mathcal{S}$, wenn

$$X = M + A$$

mit $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A \in \mathcal{A}$. Falls nicht explizit erwähnt, werden X, M, A als pfadweise stetig vorausgesetzt.

Definition 3.63. Für ein (stetiges) Semimartingal $X \in \mathcal{S}$, $X = M + A$ definiere

$$(K \bullet X) = (K \bullet M) + (K \bullet A)$$

Dabei ist $K \bullet A$ ein konventionelles Stieltjes-Integral.

3.6 Zusammenfassung

Für K lokal beschränkt und $X = M + A \in \mathcal{S}$ existiert das eindeutig bestimmt *stochastische Integral* von K nach X

$$K \bullet X$$

mit

1. $K \bullet X = K \bullet M + K \bullet A$ mit $K \bullet A \in \mathcal{A}$, d.h. $K \bullet X \in \mathcal{S}$
2. Für einen weiteren lokal beschränkten Prozess H gilt

$$H \bullet (K \bullet X) = (H \cdot K) \bullet X$$

3. Für $N \in \mathcal{M}_{loc}$ gilt

$$\langle K \bullet X, N \rangle = \langle K \bullet M, N \rangle = K \bullet \langle M, N \rangle$$

4. Falls K ein vorhersagbarer Elementarprozess. Dann gilt

$$(K \bullet X)_t = \sum_{t_k} Z_k \cdot (X_{t_{k+1} \wedge t} - X_{t_k \wedge t})$$

4 Weitere Eigenschaften des stochastischen Integrals

4.1 Satz von der Dominierten Konvergenz

Satz 4.1. Seien $X \in \mathcal{S}$ und $(K_\bullet^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von lokal beschränkten Prozessen, s.d. ein lokal beschränkter Prozess K_\bullet mit $|K^n| \leq K$ punktweise (in t und ω) existiert und

$$K_t^n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall t, \omega$$

Dann gilt

$$(K^n \bullet X)_\bullet \rightarrow 0$$

in Wahrscheinlichkeit lokal gleichmäßig in der Zeit.

Beweisskizze. Es gilt $K^n \bullet X = K^n \bullet M + K^n \bullet A$.

Für $K^n \bullet A$ gilt die Behauptung nach der dominierten Konvergenz bzgl. dA : Sei (T_l) die lokalisierende Folge von K . Dann gilt

$$|(K^n)^{T_l}| \leq K^{T_l} \leq c_l < \infty$$

Dominierte Konvergenz auf $[0, T_l]$:

Für $t \in [0, T_l]$ gilt

$$(K^n \bullet A)_t = \int_0^t K_s^n dA_s = \int_0^t K_s^n \mu_A(ds)$$

Wegen $|K_s^n| \leq c_l \forall n$ und $K_s^n \rightarrow 0$ konvergiert der obige Ausdruck gegen

$$\int_0^t 0_s \mu_A(ds) = 0$$

Wegen

$$T > 0 : P(T_l < T) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

folgt die Aussage im Falle, dass $X = A$.

Für das stochastische Integral:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq T_l} |(K^n \bullet M)_s|^2 \right] &\leq 4 \cdot \mathbb{E} [(K^n \bullet M)_{T_l}^2] \\ &= \mathbb{E} [\langle K^n \bullet M, K^n \bullet M \rangle_{T_l}] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{T_l} (K^n)^2 d\langle M, M \rangle \right] \end{aligned}$$

Wieder mit dominierter Konvergenz für das Stieltjes-Integral bzgl. $d\langle M, M \rangle$ konvergiert das gegen

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{T_l} 0^2 d\langle M, M \rangle \right] = 0$$

Benutze nun das Stoppargument (wie im Falle der quadratischen Variation für Semimartingale) um zu zeigen, dass

$$(K^n \bullet M) \rightarrow 0$$

lokal gleichmäßig in t in Wahrscheinlichkeit. \square

Korollar 4.2. Seien K ein linksstetiger lokal beschränkter Prozess und $X \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$(K \bullet X)_t = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta} K_{t_i} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t})$$

im Sinne der lokal gleichmäßigen Konvergenz in t in Wahrscheinlichkeit.

Beweis. $K_t^n(\omega) := \sum_{t_i} K_{t_i}(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t)$. Dann gilt

$$K_t^n(\omega) \rightarrow K_t(\omega)$$

wegen der Linksstetigkeit von K . Damit lässt sich Satz 4.1 anwenden. \square

Satz 4.3 (Partielle Integrationsformel für die stochastische Integration). Für $X, Y \in \mathcal{S}$ gilt

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Beweis. Für $\Delta \subset [0, t]$, $t_0 = 0$, $t_{max} = t$ gilt

$$\sum_{t_i \in \Delta} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_t^2 - X_0^2 - 2 \sum_{t_i \in \Delta} X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

Mit $\|\Delta\| \rightarrow 0$ folgt

$$\langle X, X \rangle_t = X_t^2 - X_0^2 - 2(X \bullet X)_t$$

Das ist die Behauptung für $X = Y$. Der Fall $X \neq Y$ folgt durch Polarisierung. \square

4.2 Ito-Formel (Kettenregel)

Satz 4.4 (Ito-Formel). Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $X_\bullet = (X_\bullet^1, \dots, X_\bullet^d)$ mit

$$X_\bullet^i \in \mathcal{S} \quad \forall i = 1, \dots, d$$

$\Rightarrow F(X^1, \dots, X^d) \in \mathcal{S}$ und es gilt

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t \sum_{k=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_s) dX_s^k + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X_s) d\langle X^k, X^l \rangle_s$$

Bemerkung. Die Aussage des Satzes: Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung gilt auch für Semi-Martingale durch Hinzufügen der Terme 2. Ordnung in der Taylor-Approximation.

Beweis. Falls F ein Polynom 2.Ordnung ist, d.h.

$$F(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k,l=0}^d \alpha_{kl} \cdot x_k \cdot x_l, \quad x_0 := 1$$

Betrachte $F(x_k, x_l) = x_k x_l$. Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = x_l, \quad \frac{\partial F}{\partial x_l} = x_k$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{\partial F}{\partial x_l^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} = 1$$

\Rightarrow Die Ito-Formel entspricht in diesem Fall genau der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} F(X_t) - F(X_0) &\stackrel{!}{=} \int_0^t X_s^l dX_s^k + \int_0^t X_s^k dX_s^l + \frac{1}{2} \left(\int_0^t 1 d\langle X^k, X^l \rangle_s + \int_0^t 1 d\langle X^l, X^k \rangle_s \right) \\ &= \int_0^t X_s^l dX_s^k + \int_0^t X_s^k dX_s^l + \langle X^l, X^k \rangle_t \\ &= X_t^l X_t^k - X_0^l X_0^k \end{aligned}$$

Falls die Ito-Formel korrekt ist für F , dann folgt auch, dass sie für

$$G(x^1, \dots, x^d) = \underbrace{\left(\sum \alpha_k x^k \right)}_{=U} \underbrace{F(x)}_{=V}$$

Begründung (mit partieller Integration und Summenkonvention³):

$$\begin{aligned} G(X_t) - G(X_0) &= U_t V_t - U_0 V_0 \\ &= (U \bullet V)_t + (V \bullet U)_t + \langle U, V \rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^d \int_0^t \alpha_k F(X_s) dX_s^k + \sum_{k=1}^d \int_0^t \alpha_k X_s^k d(F(X))_s + \sum_{k=1}^d \alpha_k \langle X^k, F(X) \rangle_t \\ &= \alpha_k F(X) \bullet X^k + \alpha_k X^k \bullet (F(X_\bullet)) + \alpha_k \langle X^k, F(X_\bullet) \rangle \end{aligned}$$

Mit der Schreibweise $F|_k(x) := \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$ gilt

$$F(X_\bullet) = F(X_0) + F|_l(X) \bullet X^l + \frac{1}{2} F|_{lm}(X) \bullet \langle X^l, X^m \rangle$$

³Kommen in einem Produkt zwei gleiche Indizes vor, wird über diesen Index summiert.

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
G(X_t) - G(X_0) &= \alpha_k F(X) \bullet X^k + \alpha_k X^k \bullet (F_{|l} \bullet X^l + \frac{1}{2} F_{|lm} \bullet \langle X^l, X^m \rangle) \\
&+ \alpha_k \langle X^k, F_{|l} \bullet X^l + \frac{1}{2} F_{|lm} \bullet \langle X^l, X^m \rangle \rangle \\
&= \alpha_k F(X) \bullet X^k + \alpha_k X^k F_{|l}(X) \bullet X^l + \frac{1}{2} \alpha_k X^k F_{|lm}(X) \bullet \langle X^l, X^m \rangle \\
&+ \alpha_k \langle X^k, F_{|l}(X) \bullet X^l \rangle \\
&= \alpha_k F(X) \bullet X^k + \alpha_k X^k F_{|l}(X) \bullet X^l + \frac{1}{2} \alpha_k X^k F_{|lm}(X) \bullet \langle X^l, X^m \rangle \\
&+ \alpha_k F_{|l}(X) \bullet \langle X^k, X^l \rangle
\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Berechne die partielle Ableitung von

$$\begin{aligned}
G(x) &= (\alpha_k X^k) F(x) \\
G_{|l}(x) &= \frac{\partial G}{\partial x_l}(x) = \alpha_l F(x) + (\alpha_k X^k) F_{|l}(x) \\
G_{|lj}(x) &= \alpha_l F_{|j}(x) + \alpha_j F_{|l}(x) + (\alpha_k X^k) F_{|lj}(x)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$G(X_t) - G(X_0) = \sum_{k=1}^d G_{|k} \bullet X^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d G_{|kl} \bullet \langle X^k, X^l \rangle$$

Anhand einer Induktion folgt also, dass die Ito-Formel für alle Polynom gilt. Falls $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$, können wir den Approximationssatz von Weierstraß in einer kompakten Kugel $B_R(0)$ benutzen, s.d. eine Folge F_n von Polynomen, die auf $B_R(0)$ gleichmäßig gegen F konvergieren (im Sinne der C^2 -Konvergenz). Für die Polynome gilt die Ito-Formel und mit

$$T = T_R = \inf \{s \geq 0 \mid \|X_s\| > R\}$$

gilt sie mit Hilfe des Konvergenzsatzes für das Stochastische Integral auch für den gestoppten Prozess $F(X^T)$. Da das stoch. Integral eines gestoppten Prozesses genau dem gestoppten Integral entspricht, erhalten wir

$$F(X_t^T) - F(X_0^T) = \int_0^{t \wedge T} F_{|k}(X) dX^k + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T} F_{|kl}(X) d\langle X^k, X^l \rangle$$

Daraus folgt die gewünschte Aussage, wenn wir nur R groß genug wählen. \square

Bemerkung.

$$df(X_s) = f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Dabei ist dX_s das "Ito"-Differential (und steht für ein stochastisches Integral). Im Mehrdimensionalen Fall ist dies

$$dF(x) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_k}(X) dX^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X) d\langle X^k, X^l \rangle$$

Auch diese Formel kann man in eine "gewohnte" Schreibweise übersetzen:

$$(\nabla F(x)) dX + [(\text{Hess } F)(X)]_{kl} d\langle X^k, X^l \rangle$$

5 Erste Anwendungen

5.1 Lösung des Poisson-Problems der Elektrostatik

Definition 5.1. $X_\bullet = (X_\bullet^1, \dots, X_\bullet^d)$ heißt *d-dimensionale Brown'sche Bewegung*, wenn

$$\{X_\bullet^1, \dots, X_\bullet^d\}$$

eine Familie von stochastische unabhängigen Prozessen ist und X_\bullet^i für alle i eine Brown'sche Bewegung in \mathbb{R} ist.

Alternative Schreibweise: $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d)$ bei Start in $0 \in \mathbb{R}^d$ bzw. $B_t^x = ((B_t^{x,1}, \dots, (B_t^{x,d}))$ bei Start in $x \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 5.2. Falls (B_t^x) eine *d-dimensionale Brown'sche Bewegung* ist, so gilt mit der zugehörigen Filtration $\mathfrak{F}_t = \sigma(B_s^x; s \leq t)$:

1. $(B_t^{x,i})_t$ ist ein Martingal.
2. $\langle B^{x,i}, B^{x,j} \rangle_t = \delta_{ij}t$

Beweis. Sei $\mathfrak{F}_t^i := \sigma(B_s^{x,i}; s \leq t)$. Dann gilt $\mathfrak{F}_t^i \subset \mathfrak{F}_t$. Wegen der Unabhängigkeit von $B^{x,i}$ und $\{B^{x,j} \mid j \neq i\}$ gilt

$$\mathbb{E}[B_t^{x,i} | \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^{x,i} | \mathfrak{F}_s^i] = B_s^{x,i}$$

Für $i \neq j$ ist

$$t \mapsto B_t^{x,i} \cdot B_t^{x,j}$$

ein Martingal. (Allgemeines Lemma: Falls M, N unabhängige Martingale sind, so ist $M \cdot N$ ein Martingal)

$\Rightarrow \langle B^{x,i}, B^{x,j} \rangle = 0$ für $i \neq j$. □

Definition 5.3.

1. Falls $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, so heißt

$$(\Delta f)(x) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x)$$

der *Laplace-Operator*, angewandt auf die Funktion f .

2. Eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ heißt *harmonisch*, falls $(\Delta f)(x) = 0 \forall x$.

Satz 5.4. $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ ist genau dann harmonisch, wenn

$$(f(B_t^x))_{t \geq 0}$$

ein Martingal für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist.

Beweis. Sei f harmonisch. Dann gilt nach der Ito-Formel:

$$\begin{aligned} f(B_t^x) &= f(x) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s^x) dB_s^{x,i} + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(B_s^x) d\langle B^{x,i}, B^{x,j} \rangle_s \\ &= f(x) + \underbrace{\int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s^x) dB_s^{x,i}}_{\in \mathcal{M}} + \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{(\Delta f)(B_s^x)}_{=0} ds \end{aligned}$$

□

Das Poisson-Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir suchen $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \in C^2$ und

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \varphi \upharpoonright \partial\Omega = g \end{cases}$$

Angenommen wir hätten φ gefunden. Für ein $x \in \Omega$ ist dann

$$t \mapsto \varphi(B_{t \wedge T_{\partial\Omega}}^x)$$

ein Martingal, wenn $T_{\partial\Omega} := \inf\{t \geq 0 \mid B_t^x \notin \Omega\}$. Dann gilt für $t < T_{\partial\Omega}$ mit Ito:

$$\begin{aligned} d\varphi(B_t^x) &= (\nabla\varphi)(B_t^x) dB_t^x + \frac{1}{2} [(\text{Hess } \varphi)(B_t^x)]_{kl} \underbrace{d\langle B^{x,k}, B^{x,l} \rangle_t}_{=\delta_{kl} dt} \\ &= (\nabla\varphi)(B_t^x) dB_t^x + \underbrace{\frac{1}{2} (\Delta\varphi)(B_t^x) dt}_{=0} \\ &= \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(B_t^x) dB_t^{x,k} \end{aligned}$$

⇒ Der gestoppt Prozess $\varphi(B_{t \wedge T_{\partial\Omega}}^x)$ ist ein Martingal. Damit folgt

$$\varphi(x) = \mathbb{E} [g(B_{t \wedge T_{\partial\Omega}}^x)]$$

⇒ stochastische Darstellung für die Lösung einer PDE zweiter Ordnung.

5.2 Finanzmathematik: Black-Scholes-Modell

Es sei

$$S_t := S_0 \cdot \exp\left(\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right)$$

wobei B_t eine reelle Brown'sche Bewegung mit Start in 0 sei, $\sigma > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \leq S_0$ ein Startwert. Dann ist S_\bullet eine *geometrische Brown'sche Bewegung* und es entsteht das Standardmodell für die mathematische Behandlung eines Aktienkurses, das sogenannte *Black-Scholes-Modell*.

Es gilt $S_t = f(B_t, t)$ mit

$$f(x, y) = S_0 \cdot \exp \left(\sigma \cdot x + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} y \right) \right)$$

bzw. $S_t = f(X_t)$ mit $X_t = \begin{pmatrix} B_t \\ t \end{pmatrix}$. Es ist also die Ito-Formel anwendbar:

$$dS_t = f(X) \cdot \sigma dB_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot f(X) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot f(X) dt$$

d.h. es gilt

$$dS_t = S_t \cdot \sigma dB_t + \alpha \cdot S_t dt \quad (*)$$

$\Rightarrow \alpha$ entspricht der mittleren Verzinsung von S (*Trend*) und σ der Schwankungsintensität um den Trend (*Volatilität*).

(*) ist ein Beispiel für eine stochastische Differentialgleichung.

Angebot: Auszahlung der Form $f(S_T)$ zum Zeitpunkt $T > 0$ mit $f \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

Frage: Welchen Preis sollen wir zum Zeitpunkt $t = 0$ dafür bezahlen?

Idee 1: Vergleiche mit einem alternativen Investment in ein festverzinsliches Wertpapier und einem gewissen Anteil an S_\bullet -Papieren \rightsquigarrow Portfolio-Strategie (ausführlich s. neues Jahr).

Idee 2: Sei $C_\bullet = (C_t)_{t \in [0, T]}$ der zufällige Prozess, der den fairen Wert des Anspruches $f(S_T)$ beschreibt.

$$\Rightarrow C_T = f(S_T)$$

Gedächtnisloser Ansatz:

$$C_t = c(t, S_t)$$

mit $c : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $c = c(t, x)$. Anwenden der Ito-Formel liefert:

$$\begin{aligned} dC_t &= c_{|t}(t, S_t) dt + c_{|x}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) d\langle S_t, S_t \rangle \\ &= c_{|t}(t, S_t) + c_{|x}(t, S_t) [S_t \cdot \alpha dt + S_t \cdot \sigma dB_t] + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \cdot \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

denn aus $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$ folgt

$$\begin{aligned} d\langle S_t, S_t \rangle &= d\langle (\alpha S_t) \bullet t + (\sigma S_t) \bullet B_t, (\alpha S_t) \bullet t + (\sigma S_t) \bullet B_t \rangle = d\langle (\sigma S_t) \bullet B_t, (\sigma S_t) \bullet B_t \rangle \\ &= \sigma^2 S_t^2 \cdot d\langle B_t, B_t \rangle = \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

Es gilt also

$$dC_t = \left[c_{|t}(t, S_t) + c_{|x}(t, S_t) S_t \alpha + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right] dt + c_{|x}(t, S_t) \sigma S_t dB_t$$

Dies ist wieder ein stochastisch gestörtes Wachstumsgesetz. Ökonomisches Argument: Es kann nur ein eindeutiges (deterministisches) Wachstumsgesetz für alle Anlagen auf dem Wertpapiermarkt geben, nämlich α . Daraus folgt

$$\alpha \cdot c(t, x) = c_{|t}(t, x) + c_{|x}(t, x)\alpha x + \frac{1}{2}c_{|xx}(t, x)\sigma^2 x^2 \quad \forall t \in [0, T], \quad x \geq 0$$

Dies ist die *Black-Scholes-PDE*. Sie hat die Randbedingungen

$$c(t, 0) = 0 \quad \forall t$$

$$c_T(x) = f(x) \quad \forall x$$

Durch Lösung dieser Gleichung erhält man die Funktion $c(t, x)$. Dann ist

$$C_t = c(t, S_t)$$

der faire Preis des Anspruchs $f(S_T)$ zum Zeitpunkt t .

Zur Idee 1:

Angenommen: Jemand bietet eine Zahlung in $T > 0$ der Form

$$C_T = (S_T - K)_+$$

Wobei S_T dem Wert der Aktie zum Zeitpunkt T entspricht. $K \geq 0$ nennt man auch *Strike-Niveau*.

↪ Welchen Preis soll man für dieses Versprechen in $t = 0$ zahlen?

Finanzmodell:

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left(\sigma \cdot W_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t\right)$$

mit den Parametern

- S_0 ... Aktienstand bei $t = 0$ (heute)
- σ ... Volatilität
- α ... Drift / mittlere Rendite

und einer standard Brown'schen Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$.

⇒ (S_t) ist ein stochastischer Prozess, $S_t \geq 0$.

Behauptung: $(S_t)_{\geq 0}$ ist ein Semi-Martingal und erfüllt

$$S_t = S_0 + \int_0^t \alpha \cdot S_u \, du + \int_0^t \sigma \cdot S_u \, dW_u$$

Dies ist die *Semi-Martingal-Darstellung* von (S_t) . In der Tat gilt

$$S_t = f(t, W_t)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$f(t, x) = S_0 \cdot e^{\sigma \cdot x + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot t}$$

⇒ Mit der Ito-Formel gilt

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= S_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(u, W_u) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(u, W_u) dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u, W_u) d\langle W, W \rangle_u \\ &= S_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^t f(u, W_u) du + \sigma \cdot \int_0^t f(u, W_u) dW_u + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t f(u, W_u) du \\ &= S_0 + \alpha \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u \end{aligned}$$

In infinitesimaler Schreibweise:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Ohne den zweiten Summanden wäre das eine gewöhnliche DGL für exponentielles Wachstum. Der zweite Summand stellt eine zufällige Störung dieser durch einen infinitesimalen (normalverteilten) "Stoß" dW_t . Die Gleichung ist ein Beispiel für eine stochastische DGL mit expliziter Lösung

$$S_t = S_0 \cdot \exp \left(\sigma \cdot W_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t \right)$$

Zweite Komponente des Black-Scholes-Modells:

Die zweite Komponente des BS-Modells ist die *Spareinlage/festverzinsliches Konto* $(B_t)_t$ gemäß

$$dB_t = r \cdot B_t dt$$

$$B_0 = 1$$

$r > 0$ ist der feste Zinssatz (ein weiterer Parameter des Modells).

Arbitrage-Ansatz zur Optionsberatung: Vergleich mit alternative Investment-Strategien, d.h. mit Kombinationen von Investitionen in (B_t) und (S_t) .

Definition 5.5. $(\Pi_t) = ((\eta_t, \beta_t))_{t \geq 0}$ mit $(\eta_t, \beta_t) \in \mathbb{R}^2$ heißt *Portfolio-Prozess* oder *-Strategie*, falls η_\bullet und β_\bullet reelle Semi-Martingale sind, die vorhersagbar sind, d.h. η_t und β_t seien \mathfrak{F}_{t-} -messbar für alle $t > 0$.

Der *Portfolio-Wert(-Prozess)* ist dann

$$X_\Pi(t) = \eta_t \cdot S_t + \beta_t \cdot B_t$$

Die Strategie heißt *selbstfinanzierend*, falls

$$dX_\Pi(t) = \eta_t dS_t + \beta_t dB_t$$

Bemerkung. $t \mapsto \xi_t$ stetig $\Rightarrow (\xi_t)$ vorhersagbar

Frage: Gibt es eine selbstfinanzierende Strategie (Π_t) , s.d. $X_\Pi(T) = C_T = (S_T - K)_+$?

Bemerkung. Π ist genau dann selbstfinanzierend, wenn die Wertänderungen (von X_Π) nur von den Veränderungen der Prozesse S und B herrühren. Falls es also eine selbstfinanzierende Strategie mit

$$X_\Pi(T) = C_T = (S_T - K)_+$$

so ist $X_\Pi(0)$ der einzige angemessene Preis für die Option C .

Analog für Zwischenzeitpunkte $t < T$: Falls c_t der Wiederverkaufswert der Option C beim Verkauf in t ist, muss

$$c_t = X_\Pi(t)$$

gelten, falls Π eine Strategie mit $C_T = X_\Pi(T)$ ist.

Ansatz: $c_t = c(t, S_t)$ mit $c \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Wegen $c_t = X_\Pi(t)$ gilt

$$dc_t = dX_\Pi(t) = \eta_t dS_t + \beta_t dB_t$$

Gehen wir zu $b_t = \beta_t \cdot B$ über, haben wir

$$dc_t = \eta_t dS_t + b_t \cdot r dt = (\eta_t \cdot \alpha \cdot S_t + b_t \cdot r) dt + \eta_t \cdot \sigma \cdot S_t dW_t$$

Andererseits gilt mit $dS_t = \sigma S_t dW_t + \alpha S_t dt$ und $d\langle S, S \rangle = \sigma^2 \cdot S^2 dt$

$$\begin{aligned} dc_t &= c_{|t}(t, S_t) dt + c_{|x}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) d\langle S, S \rangle_t \\ &= \left(c_{|t}(t, S_t) + c_{|x}(t, S_t) \cdot \alpha \cdot S_t + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \cdot S^2 \cdot \sigma^2 \right) dt + c_{|x}(t, S_t) \cdot \sigma dW_t \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung eines Semi-Martingals in Martingal- und BV-Anteil, können wir einen Koeffizientenvergleich durchführen. Es folgt

$$\begin{aligned} \eta_t \cdot \alpha \cdot S_t + b_t \cdot r &= c_{|t}(t, S_t) + c_{|x}(t, S_t) \cdot \alpha \cdot S_t + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \cdot S_t^2 \cdot \sigma^2 \\ c_{|x}(t, S_t) \cdot \sigma \cdot S_t &= \eta_t \cdot \sigma \cdot S_t \end{aligned}$$

Damit gilt

$$c_{|x}(t, S_t) = \eta_t$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} c_{|x}(t, S_t) \cdot \alpha \cdot S_t + (c(t, S_t) - c_{|x}(t, S_t)) \cdot r &= \eta_t \cdot \alpha \cdot S_t + b_t \cdot r \\ &\stackrel{!}{=} c_{|t}(t, S_t) + c_{|x}(t, S_t) \cdot \alpha \cdot S_t + \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \cdot S_t^2 \cdot \sigma^2 \\ \Rightarrow c_{|t}(t, S_t) &= r \cdot c(t, S_t) - c_{|x}(t, S_t) \cdot S_t \cdot r - \frac{1}{2} c_{|xx}(t, S_t) \cdot \sigma^2 \cdot S^2 \end{aligned}$$

In Kurzform:

$$c_{|t} = r \cdot c - r \cdot x \cdot c_{|x} - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \sigma^2 \cdot c_{|xx} \quad (*)$$

Satz 5.6. Falls $(t, x) \mapsto c(t, x)$ eine C^2 -Lösung der Black-Scholes-DGL (*) ist, so definiert

$$\Pi_t := (c_{|x}(t, S_t), \beta_t)$$

mit $\beta_t := \frac{c(t, S_t) - c_{|x}(t, S_t) \cdot S_t}{B_t}$ eine selbstfinanzierende Portfolio-Strategie mit

$$X_{\Pi}(t) = c(t, S_t)$$

Beweis. Übung: Nachrechnen mit Ito-Formel. □

Korollar 5.7. Falls c eine Lösung der Black-Scholes-DGL ist und zusätzlich

$$c(T, x) = (x - K)_+$$

gilt, so folgt

$$X_{\Pi}(T) = c(T, S_T) = (S_T - K)_+$$

d.h. das Portfolio Π löst die Aufgabe, die Auszahlung C_T selbstfinanzierend zu reproduzieren. Dann ist der faire Preis für die Option C_T gegeben durch

$$c(0, S_0) = X_{\Pi}(0)$$

Explizite Berechnung des BS-Preises mit Hilfe des stochastischen Kalküls

Lemma 5.8. Sei $(t, x) \mapsto c(t, x)$ eine Lösung des BS-PDE und sei

$$S_t := S_0 \cdot \exp\left(\sigma \cdot W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

Dann ist $t \mapsto e^{-rt}c(t, S_t)$ ein (lokales) Martingal.

Beweis. Benutze die Ito-Formel und setze $\tilde{c}(t, S_t) := e^{-rt}c(t, S_t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}c(t, S_t)) &= d(\tilde{c}(t, S_t)) \\ &= \tilde{c}_{|t}(t, S_t) dt + \tilde{c}_{|x}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2}\tilde{c}_{|xx}(t, S_t) d\langle S, S \rangle \\ &= -re^{-rt}c(t, S_t) + e^{-rt}c_{|t}(t, S_t) dt + e^{-rt}c_{|x}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2}e^{-rt}c_{|xx}(t, S_t) d\langle S, S \rangle \\ &= e^{-rt}(-r \cdot c) dt + e^{-rt}\left(r \cdot c - r \cdot S \cdot c_{|x} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 c_{|xx}\right) dt \\ &\quad + e^{-rt}c_{|x} \cdot \sigma \cdot S dW_t + e^{-rt}c_{|x} \cdot r \cdot S dt + \frac{1}{2} \cdot c_{|xx} \cdot \sigma^2 \cdot S^2 dt \\ &= e^{-rt}c_{|x} \cdot \sigma \cdot S dW_t \\ &\Rightarrow e^{-rt}c(t, S_t) = e^{-r \cdot 0} \cdot c(0, S_0) + \sigma \int_0^t e^{-r \cdot u} c_{|x}(u, S_u) \cdot S_u dW_u \end{aligned}$$

Das stochastische Integral können wir auch schreiben als $(X \bullet W)_t \in \mathcal{M}_{loc}$. Dann ist auch $e^{-rt} \cdot c(t, S_t) =: M_t$ ein lokales Martingal. □

Korollar 5.9. Falls $c(t, x)$ Lösung der BS-PDE ist, gilt

$$\begin{aligned} c(0, S_0) &= e^{-r \cdot 0} \cdot c(0, S_0) \\ &= M_0 = \mathbb{E}[M_T] \\ &= \mathbb{E} [e^{-rT} \cdot c(T, S_T)] \\ &= e^{-rT} \cdot \mathbb{E} [(S_T - K)_+] \end{aligned}$$

falls $c(T, x) = (x - K)_+$.

Also: Der Preis einer Call-Option im BS-Modell ist

$$\begin{aligned} X_{\Pi}(0) &= c(0, S_0) \\ &= e^{-rT} \cdot \mathbb{E} \left[\left(S_0 \cdot \exp \left(\sigma W_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right) - K \right)_+ \right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{T} \cdot u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T} - K \right)_+ \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_M^{\infty} \left(S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{T} \cdot u + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T} - K \right) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_M^{\infty} e^{-\frac{(u - \sigma\sqrt{T})^2}{2}} du - \frac{K \cdot e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_M^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

mit $M = \frac{1}{\sqrt{T} \cdot \sigma} \left[\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - r \left(T - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$. Das heißt es gilt mit $\nu \sim \nu_{0,1}$

$$\begin{aligned} X_{\Pi}(0) &= S_0 \cdot \mathbb{P}(\nu + \sigma \cdot \sqrt{T} > M) + K e^{-rT} \mathbb{P}(\nu > M) \\ &= S_0 \cdot \mathbb{P}(\nu > M - \sigma\sqrt{T}) - K e^{-rT} \mathbb{P}(\nu > M) \\ &= S_0 \cdot \mathbb{P}(\nu < \sigma\sqrt{T} - M) - K e^{-rT} \mathbb{P}(\nu < -M) \\ &= S_0 \cdot \Phi(\sigma\sqrt{T} - M) - K e^{-rT} \Phi(-M) \end{aligned}$$

Dabei sei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

6 Transformations- und Darstellunseigenschaften von Semimartingalen

6.1 Exponentielle Martingale und Levy-Charakterisierung der Brown'schen Bewegung

Lemma 6.1. Sei $F = F(\cdot, \cdot)$ eine C^2 -Funktion mit

$$F|_t = -\frac{1}{2} F|_{xx}$$

Dann ist für jedes stetige Martingal M der Prozess

$$N_t = F(\langle M, M \rangle_t, M_t)$$

ein lokales Martingal.

Beweis. Es gilt mit der Ito-Formel:

$$\begin{aligned} dN_t &= \underbrace{F|_t(\langle M, M \rangle_t, M_t)}_{=-\frac{1}{2}F|_{xx}(\langle M, M \rangle_t, M_t)} d\langle M, M \rangle_t + F|_x(\langle M, M \rangle_t, M_t) dM_t + \frac{1}{2}F|_{xx}(\langle M, M \rangle_t, M_t) d\langle M, M \rangle \\ &= F|_x(\langle M, M \rangle_t, M_t) dM_t \end{aligned}$$

□

Beispiel. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt für

$$F(t, x) = \exp\left(\lambda \cdot x - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$$

die Gleichung

$$F|_t = -\frac{1}{2}F|_{xx}$$

Also erfüllen insbesondere die reellen Funktionen $\Re(F)$, $\Im(F)$ die Voraussetzung des Lemmas. Daher ist für jedes Martingal M

$$t \mapsto \varepsilon_t(M) = \exp\left(\lambda \cdot M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M, M \rangle_t\right)$$

wieder ein (komplexwertiges) Martingal. $\Re(\varepsilon_t(M))$ und $\Im(\varepsilon_t(M))$ sind reelle Martingale.

$\varepsilon_t(M)$ ist das sogenannte *exponentielle Martingal zum Parameter λ* .

Beispiel. 1. Brown'sche Bewegung:

Wähle $\lambda = i$, $M_t = B_t$. Dann ist

$$\exp\left(iB_t + \frac{t}{2}\right)$$

ein Martingal. Insbesondere sind

$$e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t), \quad e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$$

reellwertige Martingale.

2. Sei $(X_s)_{s \geq 0}$ ein stetiger stochastischer Prozess, $(X_s) \in L_{loc}^2(M)$ für ein Martingal M . Dann ist

$$t \mapsto \int_0^t X_s dM_s$$

ein lokales Martingal mit der quadratischen Variation

$$t \mapsto \int_0^t X_s^2 d\langle M, M \rangle_s$$

Das zugehörige exponentielle Martingal (mit $\lambda = 1$) ist dann

$$\varepsilon_t(X \bullet M) = \exp \left(\int_0^t X_s dM_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)$$

Für $X_s = f(s)$ eine deterministische Funktion und $M_s = B_s$ gilt

$$\varepsilon_t(f \bullet B) = \exp \left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds \right)$$

Satz 6.2 (Levy-Charakterisierung der Brown'schen Bewegung). *Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptierter, stetiger stochastischer Prozess. Dann sind äquivalent:*

1. (X_t) ist eine Standard-Brown'sche-Bewegung
2. (X_t) ist ein lokales Martingal und $\langle X, X \rangle_t = t$
3. $\forall f \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; dx)$ ist

$$\varepsilon_t^{if} = \exp \left(i \int_0^t f_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_s^2 ds \right)$$

ein lokales Martingal.

Beweis.

1 \Rightarrow 2: klar.

2 \Rightarrow 3: Sei X ein lokales Martingal. Dann ist

$$M_t := \int_0^t f_s dX_s$$

ein lokales Martingal mit quadratischer Variation

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t f_s^2 ds$$

$\Rightarrow \varepsilon_t^{if} = \varepsilon_t(i \cdot M)$ ist das zugehörige exponentielle Martingal.

3 \Rightarrow 1: Wähle $f(t, \omega) = \mathbb{1}_A(\omega) \cdot \mathbb{1}_{(u,v]}(t)$ mit $A \in \mathfrak{F}_u$, $u < v$. Dann gilt

$$\int_0^t f_s dX_s = \mathbb{1}_A \cdot \begin{cases} 0 & , t < u \\ X_{v \wedge t} - X_u & , t \geq u \end{cases}$$

Wegen 3. folgt dann

$$\mathbb{E}[\varepsilon_v^{if} \cdot \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\varepsilon_u^{if} \cdot \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$$

Andererseits ist

$$\varepsilon_v^{if} = \exp\left(\mathbf{1}_A \cdot i\left((X_v - X_u) + \frac{1}{2}(v - u)\right)\right)$$

Daher gilt

$$\mathbb{E}[\varepsilon_v^{if} \cdot \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i(X_v - X_u) + \frac{1}{2}(v - u)\right) \cdot \mathbf{1}_A\right]$$

Analog für $f(t, \omega) = \lambda \cdot \mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(u, v]}(t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt also

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_v - X_u)) \cdot \mathbf{1}_A] = P(A) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}(v - u)\right) \quad \forall A \in \mathfrak{F}_u \quad (*)$$

Für $A = \Omega$ folgt insbesondere

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda(X_v - X_u))] = e^{-\frac{\lambda^2}{2}(v - u)}$$

Aus der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion folgt, dass

$$X_v - X_u$$

normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $v - u$. (*) besagt ferner, dass $(X_v - X_u)$ stochastisch unabhängig ist von \mathfrak{F}_u . Da die Zuwächse $\{X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\}$, $t_k \leq u$ darstellbar sind in der σ -Algebra \mathfrak{F}_u folgt, dass $X_v - X_u$ unabhängig von den Zuwächsen vor X_u ist. Damit ist (X_t) eine Standard-Brown'sche-Bewegung, da die Stetigkeit von X zudem vorausgesetzt war. \square

6.2 Martingale als zeittransformierte Brown'sche Bewegung

Definition 6.3.

- Eine *Zeittransformation* (oder *Zeitwechsel*) C ist eine Familie $\{C_s, s \geq 0\}$ von Stoppzeiten, so das für fast jedes $\omega \in \Omega$

$$s \mapsto C_s(\omega)$$

wachsend und rechtsstetig ist.

- Ein Prozess X heißt *C-stetig* für einen Zeitwechsel C , falls

$$t \mapsto X_{C_t(\omega)}(\omega)$$

fast sicher stetig ist.

Bemerkung. Falls X stetig ist, so ist X C -stetig, falls X_t konstant ist auf dem Intervall

$$[C_{s-}, C_s]$$

Einschub: Verallgemeinerte Inverse von nicht-fallenden (rechtsstetigen) Funktionen

Für eine nicht-fallende Funktion A sei

$$c_s := \inf \{t \mid A(t) > s\}$$

das verallgemeinerte Inverse von A .

Lemma 6.4.

1. c ist rechtsstetig
2. $A(c_s) \geq s$
3. $A_t = \inf \{s \mid c_s > t\}$

Anwendung auf Brown'sche Bewegung/Martingale. (X_t) sein ein stetiges Martingal, $\langle X, X \rangle_t$ die zugehörige quadratische Variation.

Lemma 6.5. (X_t) ist konstant auf $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \langle X, X \rangle_b = \langle X, X \rangle_a$$

bzw. für Stoppzeiten gilt: (X_t) konstant auf $[\tau, \sigma]$

$$\Leftrightarrow \langle X, X \rangle_\tau = \langle X, X \rangle_\sigma$$

Zeitwechsel, induziert von $\langle X, X \rangle$:

$$C_s := \inf \{t \mid \langle X, X \rangle_t > s\}$$

Somit ist $Y_s := X_{C_s}$ wieder ein stetiger Prozess.

Lemma 6.6. Sei A eine Funktion von beschränkter Variation. dA sei das zugehörige Variationsmaß auf \mathbb{R} :

$$(dA)([u, v]) = A(v) - A(u)$$

$\int f_s dA_s$ ist dann ein Stieltjes-Integral. Sei $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine rechtsstetige, nicht-fallende Funktion. Dann gilt für alle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Borel-messbar:

$$\int_{[a, b]} f(u(s)) dA_{u(s)} = \int_{[u(a), u(b)]} f(t) dA_t$$

mit $dA_{u(s)} = d(A \circ u)$.

Beweisskizze. Die Behauptung ist äquivalent zu der Aussage: dA ist das Bildmaß von $d(A \circ u)$ unter der messbaren Abbildung u .

O.B.d.A. A wachsend. Bildmaß von $A \circ u$ unter u , für den Fall, dass u strikt monoton und stetig:

$$\begin{aligned} (u_*)(d(A \circ u))([s, t]) &= d(A \circ u)(\{x \mid s \leq u(x) \leq t\}) \\ &= d(A \circ u)([u^{-1}(s), u^{-1}(t)]) \\ &= (A \circ u)(u^{-1}(t)) - (A \circ u)(u^{-1}(s)) \\ &= A(t) - A(s) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Gelesen für pfadweise gebildete stochastische Integrale, C nichtfallend und rechtsstetig mit $C(0) = 0$ ergibt das die Aussage:

Für $(X_t), (Y_t) \rightsquigarrow (\widehat{X}_t, \widehat{Y}_t)$ mit $\widehat{X}_t = X_{C_t}, \widehat{Y}_t = Y_{C_t}$ gilt

$$\int_0^t \widehat{X}_s d\widehat{Y}_s = \int_0^{C_t} X_s dY_s$$

Lemma 6.7. Sei (A_\bullet) ein nicht-fallender, rechtsstetiger stochastischer Prozess mit $A(0) = 0$. Dann definiert $(C_s)_{s \geq 0}$ mit

$$C_s := \inf \{t \mid A_t > s\}$$

einen Zeitwechsel, d.h. insbesondere ist für $s \geq 0$ C_s eine \mathfrak{F}_t -Stopppzeit falls (A_\bullet) \mathfrak{F} -adaptiert ist.

Satz 6.8. Falls H ein (\mathfrak{F}_t) -progressiv messbarer Prozess ist und X ein C -stetiger Prozess von endlicher Variation ist, sind \widehat{H}, \widehat{X} jeweils $\widehat{\mathfrak{F}}$ -progressiv messbar, wobei

$$\begin{aligned} \widehat{X}_t &= X_{C_t}, \quad \widehat{H}_t = H_{C_t} \\ \widehat{\mathfrak{F}}_t &= \mathfrak{F}_{C_t} \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\int_{C_0}^{C_t} H_s dX_s = \int_0^t \widehat{H}_s d\widehat{X}_s$$

Satz 6.9. Ist C fast sicher endlich, X ein C -stetiges lokales \mathfrak{F}_t -Martingal, so gelten folgende Aussagen:

1. \widehat{X} ist ein stetiges lokales $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ -Martingal und

$$\langle \widehat{X}, \widehat{X} \rangle_t = \langle X, X \rangle_{C_t}$$

2. Falls H (\mathfrak{F}_t) -progressiv messbar ist und

$$\int H^2 d\langle X, X \rangle_s < \infty \text{ fast-sicher}$$

dann ist

$$(\widehat{H} \bullet \widehat{X})_t = (H \bullet X)_{C_t}$$

Beweisskizze. (\widehat{X}_t) ist ein $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ -Martingal nach Optional Stopping.

$X^2 - \langle X, X \rangle$ ist ein \mathfrak{F}_t -Martingal.

$\Rightarrow \widehat{X}_t^2 - \langle \widehat{X}, \widehat{X} \rangle$ ist ein $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ -Martingal. $\Rightarrow \langle \widehat{X}, \widehat{X} \rangle_t = (\langle \widehat{X}, \widehat{X} \rangle)_t = \langle X, X \rangle_{C_t}$

Die weitere Behauptung folgt durch die zugehörigen quadratischen Variationen und der definierenden Eigenschaft von $(H \bullet X)$. □

Theorem 6.10 (Dubins,Schwarz). *Seien $(M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ und*

$$T_t := \inf \{s \geq 0 \mid \langle M, M \rangle_s > t\}$$

Dann ist $B_t := M_{T_t}$ eine Brown'sche Bewegung. Umgekehrt gilt

$$M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}$$

Beweis. (T_t) ist ein Zeitwechsel.

$$\Rightarrow B_t := \widehat{M}_t = M_{T_t}$$

ist ein $\widehat{\mathfrak{F}}_t$ -Martingal mit

$$\langle B, B \rangle_t = \langle \widehat{M}, \widehat{M} \rangle_t = \langle M, M \rangle_{T_t} = t$$

\Rightarrow Behauptung 1 mit Levý-Charakterisierung: (B_t) ist eine Brown'sche Bewegung. Umgekehrt gilt dann

$$B_{\langle M, M \rangle_t} = \widehat{M}_{\langle M, M \rangle_t} = M_{T_{\langle M, M \rangle_t}}$$

Sei $t \in [t_0, t_1]$ wobei $\langle M, M \rangle_{t'} = m \forall t' \in [t_0, t_1]$ und $[t_0, t_1]$ sei diesbzgl. maximal. Dann folgt $T_m = t_1$. Allgemein gilt also $T_{\langle M, M \rangle_t} \geq t$, aber es gilt wegen der Konstanz auf dem Intervall

$$M_{T_{\langle M, M \rangle_t}} = M_{t_1} = M_t$$

□

6.2.1 Vorhersagbare Integraldarstellung von Pfadfunktionalen

Lemma 6.11. *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brown'sche-Bewegung mit der zugehörigen Filtration (\mathfrak{F}_t) mit*

$$\mathfrak{F}_t = \overline{(\mathfrak{F}_{t+}^{B \bullet})}$$

Dann ist die Menge

$$\{\varepsilon_\infty^{f \cdot B} \mid f \in J\}$$

ist total in $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$, d.h.

$$\overline{\text{lin} \{ \varepsilon_\infty^{f \cdot B} \mid f \in J \}}^{L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)} = L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$$

wobei J die Klasse der Funktionen/Prozesse f vom Typ

$$f(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}$$

mit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n, \lambda_j \in \mathbb{R}$.

Beweis. Angenommen, die Annahme wäre falsch.
 $\Rightarrow \exists Y \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$, ($Y \neq 0$) mit

$$Y \perp \varepsilon_\infty^{f \cdot B} \quad \forall f \in J$$

Wir zeigen, dass $Y = 0$ gilt. Dafür reicht es zu zeigen, dass $Y \cdot P$ das Nullmaß auf allen
 $(\Omega, \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}))$

ist. Sei

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n z_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \cdot Y \right]$$

Dann ist $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \mapsto \varphi(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$ holomorph, denn es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, \dots, z_n) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{j=1}^n z_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y | B_{t_1}, \dots, B_{t_n}]}_{=g(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(\sum_{j=1}^n z_j (x_j - x_{j-1}) \right) \cdot g(x_1, \dots, x_n) \mu_N(dx_1, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

mit der Verteilung μ_N von $(B_{t_1} - B_0, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$.

\Rightarrow Holomorphie, da $\exp(\dots)$ holomorph und nach dem Lebesgue'schen Konvergenzatz. Es gilt $Y \perp \varepsilon_\infty^{f \cdot B}$ genau dann, wenn

$$\mathbb{E} \left[Y \cdot \exp \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\lambda_j)^2 (t_j - t_{j-1}) \right) \right] = 0$$

$\Rightarrow Y|_{\mathbb{R}^n} = 0 \Rightarrow Y : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist identisch Null.

$\Rightarrow \varphi(iz_1, \dots, iz_n) = 0 \quad \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Das ist aber genau die charakteristische Funktion von $Y \cdot P$ auf

$$(\Omega, \sigma(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}; j = 1, \dots, n))$$

\Rightarrow Nach der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion ist $Y \cdot P$ das Null-Maß. Weil $B_0 = 0$ gilt

$$\sigma(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}; j = 1, \dots, n) = \sigma(B_{t_j}; j = 1, \dots, n)$$

Damit folgt die Behauptung. □

Theorem 6.12 (Integraldarstellungssatz). $\forall F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P) \exists ! H \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega, \text{Prod}, dx \otimes P)$ sodass

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H(s, \omega) dB_s(\omega) \quad P\text{-fast sicher} \quad (*)$$

hierbei ist $\text{Prod} = \sigma \{ \text{Elementarintegranden} \}$. Ein Elementarintegrand ist dabei

$$X(t, \omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega) \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]}(t)$$

mit $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ und $X_j \mathfrak{F}_{t_j}$ -messbar.

Beweis. Sei $\mathcal{H} := \{F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P) \mid \exists \text{ vorhersagbares } H \text{ mit } (*)\}$ Sei $F \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(F)^2] &= \mathbb{E}[(c + (H \bullet B)_\infty)^2] \text{ mit } c = \mathbb{E}[F] \\ &= c^2 + 2c\mathbb{E}[(H \bullet B)_\infty] + \mathbb{E}[(H \bullet B)_\infty^2] \\ &= (\mathbb{E}[F])^2 + \mathbb{E}[\langle H \bullet B, H \bullet B \rangle_\infty] \\ &= (\mathbb{E}[F])^2 + \mathbb{E} \left[\int_0^\infty H^2(s, \omega) ds \right] \end{aligned}$$

Das bedeutet: Falls $(F^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ -Cauchy-Folge von Elementen $F^n \in \mathcal{H}$ ist, so $\exists H : H^n \rightarrow H$ in $L^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega, Prod, dx \otimes P)$ s.d.

$$F^n \rightarrow F, H^n \rightarrow H$$

$$F(\omega) = \mathbb{E}[F] + \int_0^\infty H(s, \omega) dB_s(\omega)$$

$\Rightarrow \mathcal{H} \subseteq L^2(\dots)$ ist abgeschlossen. Ferner gilt $\mathcal{H} \supset \{\varepsilon_\infty^{f \cdot B} \mid f \in J\}$ denn für $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und

$$\varepsilon_t(M) = \exp \left(M_t - \frac{1}{2} \langle M, M \rangle_t \right)$$

gilt

$$d\varepsilon_t(M) = \varepsilon_t(M) dM_t$$

nach der Ito-Formel. Somit gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty^{f \cdot B} &= \varepsilon_0^{f \cdot B} + \int_0^\infty \varepsilon_s^{f \cdot B} d(f \cdot B)_s \\ &= 1 + \int_0^\infty \underbrace{\varepsilon_s^{f \cdot B} \cdot f}_{:= H(s, \omega)} dB_s \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{H} = L^2(\dots)$ □

6.3 Satz von Girsanov

Definition 6.13. Sei $(\Omega, (\mathfrak{F})_{t \geq 0}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. $(M_t)_{t \geq 0}$ ein (\mathfrak{F}_t) -Martingal mit $M_t > 0, M_0 = 1$. Dann definiert

$$Q_t(A) = \int_A M_t dP, A \in \mathfrak{F}_t$$

eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ im Sinne von

$$Q_t(A) = Q_s(A) \forall s \leq t \forall A \in \mathfrak{F}_s$$

Bemerkung. Typische Situation: Fixiere T als Horizont und benutze nur Q_T .
Sprechweise: *Martingaltransformation des Maßes P auf das Maß Q vermöge des exponentiellen (lokalen) Martingals M_\bullet .*

Lemma 6.14. *Sei (umgekehrt) Z_t ein stetiges Martingal mit $Z_t > 0$ fast sicher $\forall t$. Dann existiert ein lokales Martingal $(L_t)_{t \geq 0}$ mit*

$$Z_t = \varepsilon_t(L)$$

Beweis. Benutze die Ito-Formel für $\log Z_t$. □

Bemerkung. Warum "umgekehrt"? Falls Q_t und $P|_{\mathfrak{F}_t}$ "äquivalent" sind für alle t , so folgt, dass die Radon-Nikodym-Dichte

$$Z_t := \frac{dQ_t}{dP|_{\mathfrak{F}_t}}$$

existiert. Aus der Konsistenz folgt, dass Z ein P -Martingal ist und aus der Äquivalenz folgt $Z_t > 0$ P -fast sicher.

$\Rightarrow Z = \varepsilon(L)$.

Lemma 6.15. *Seien $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $dQ_t = Z_t dP$ mit einem P -Martingal $Z_t > 0$. Weiter sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathfrak{F}_t -messbar, $0 \leq s \leq t \leq T$ mit*

$$\mathbb{E}_P[|Y|] < \infty$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}_{Q_T}[Y | \mathfrak{F}_s] = \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}_P[Z_t \cdot Y | \mathfrak{F}_s] \text{ } P\text{-fast sicher}$$

(Vergleiche: Wechsel des Numeraires in der Finanzmathematik)

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{F}_s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{Z_s} \cdot \mathbb{E}_P[Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s] dQ_T &= \int_A \frac{1}{Z_s} \cdot \mathbb{E}_P[Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s] dQ_s \\ &= \int_A \mathbb{E}_P[Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s] dP \\ &= \int_A (Y \cdot Z_t) dP \\ &= \int_A Y dQ_t = \int_A Y dQ_T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_s} \cdot \mathbb{E}_P[Y \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}_{Q_T}[Y | \mathfrak{F}_s]$$

□

Lemma 6.16. Sei $M \in \mathcal{M}_{loc}(P)$, $Q_t = Z_t \cdot P$ mit $Z_t = \varepsilon(L)_t$. Dann ist

$$\widehat{M}_t = M_t - \langle M, L \rangle_t \in \mathcal{M}_{loc}(Q_T)$$

und $\langle \widehat{M}, \widehat{M} \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$ Q_T -fast sicher.

Beweis.

$$\begin{aligned} d(Z\widehat{M}) &= \widehat{M} dZ + Z d\widehat{M} + d\langle Z, \widehat{M} \rangle \\ &= \widehat{M} dZ + Z dM - Z d\langle M, L \rangle_t + d\langle Z, M \rangle \end{aligned}$$

Wegen $Z = \varepsilon(L) = \exp(L - \frac{1}{2}\langle L, L \rangle)$ gilt $dZ = \varepsilon(L) dL = Z dL$ folgt weiter

$$\begin{aligned} d(Z\widehat{M}) &= \widehat{M} dZ + Z dM - Z d\langle M, L \rangle + Z d\langle L, M \rangle \\ &= \widehat{M} dZ + Z dM \end{aligned}$$

$\Rightarrow Z\widehat{M} \in \mathcal{M}_{loc}(P)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q_T}[\widehat{M}_t | \mathfrak{F}_s] &= \frac{1}{Z_s} \mathbb{E}_P[\widehat{M}_t \cdot Z_t | \mathfrak{F}_s] \\ &= \frac{1}{Z_s} \cdot \widehat{M}_s \cdot Z_s \\ &= \widehat{M}_s \end{aligned}$$

□

Satz 6.17 (Girsanov, Cameron, Martin). Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung mit zugehöriger Filtrierung

$$(\mathfrak{F}_t) = \overline{(\mathfrak{F}_{t+}^{B_t})}$$

Sei $X \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Prod}, \lambda \otimes P)$ und

$$Z_t := \varepsilon_t^{(X \cdot B)} = \exp \left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds \right)$$

Sei ferner $\widehat{B}_t := B_t - \int_0^t X_s ds$. Falls (Z_t) ein Martingal ist, ist $(\widehat{B}_t)_{t \in [0, T]}$ eine Standard-Brown'sche Bewegung unter $Q_T = Z_T \cdot P$.

Beweis. $Z = \varepsilon(L)$ mit $L_t = \int_0^t X_s dB_s$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{B} &= B - \langle B, L \rangle \\ &= B - \langle B, X \bullet B \rangle \\ &= B - X \bullet \langle B, B \rangle \end{aligned}$$

Also ist

$$\widehat{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds$$

ein Q_T -Martingal mit quadratischer Variation t . Aus der Levý-Charakterisierung folgt, dass \widehat{B}_t eine Q_T -Brown'sche Bewegung ist. □

Bemerkung (Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen). Sei $Y : \Omega \rightarrow [0, 1]$, $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$. Für $\mathbb{E}_P[Y] = 1$ definiere ein neues Maß

$$Q(\omega_i) = P(\omega_i) \cdot Y(\omega_i)$$

Analog: Brown'sche Bewegung mit Drift.

6.4 Nachtrag zum Unterschied zwischen "echten" und lokalen Martingalen

$$(M_t) \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathbb{E}[|M_t|] < \infty ; \mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s] = M_s \quad \forall s \leq t$$

$$(M_t) \in \mathcal{M}_{loc} \Leftrightarrow \exists (\tau_n) \nearrow \infty \text{ Stoppzeit} : (M_t^{\tau_n}) \in \mathcal{M}$$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{loc}$ mit $\tau_n \equiv \infty \quad \forall n$.

Lemma 6.18.

$M \in \mathcal{M} \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_{loc}$, $\forall s > 0$ ist $\{M_{\tau \wedge s} \mid \tau \text{ Stoppzeit}\}$ gleichgradig integrierbar

Beweis.

" \Rightarrow ": $\tau \wedge s \leq s$. Daher gilt

$$M_{\tau \wedge s} = \mathbb{E}[M_s | \mathfrak{F}_{\tau \wedge s}]$$

$\Rightarrow \{M_{\tau \wedge s} \mid \tau \text{ Stoppzeit}\}$ ist abschließbar mit "Abschluss" M_s .

\Rightarrow Die Menge ist gleichgradig integrierbar.

" \Leftarrow ": Sei $\tau_n \nearrow \infty$ eine lokalisierende Folge.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[M_t^{\tau_n} | \mathfrak{F}_s] = M_s^{\tau_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_s$$

da M stetig. Analog gilt

$$M_t^{\tau_n} = M_{\tau_n \wedge t}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_t(\omega)$$

Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von

$$\{M_t^{\tau_n} \mid \tau_n \text{ Stoppzeit}\}$$

gilt mit dem Vitali'schen Konvergenzsatz

$$M_t^{\tau_n} \rightarrow M_t$$

in $L^1(P)$. Das bedeutet

$$\mathbb{E}[M_t^{\tau_n} | \mathfrak{F}_s] \rightarrow \mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s]$$

und damit folgt

$$\mathbb{E}[M_t | \mathfrak{F}_s] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_t^{\tau_n} | \mathfrak{F}_s] = \lim_{n \rightarrow \infty} M_s^{\tau_n} = M_s$$

Die Integrierbarkeit von M_t folgt aus der gleichgradigen Integrierbarkeit Menge $\{M_t^{\tau_n} \mid \tau_n \text{ Stoppzeit}\}$ für $\tau = t$. \square

Beispiel. (B_t) sei eine Standard-Brown'sche Bewegung. Sei $g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton und bijektiv (z.B. $t \mapsto \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$).

$$M_t := B_{g(t)}$$

Dann ist $(M_t)_{t \in [0,1]}$ mit $\mathfrak{G}_t = \mathfrak{F}_{g(t)}$ ein \mathfrak{G}_t -Martingal. Sei $\tau := \inf \{s \geq 0 \mid M_s > 1\}$.
 $\Rightarrow \tau < 1$ P -fast sicher. Dann ist der gestoppte Prozess

$$N_t := \begin{cases} M_t^\tau & , t < 1 \\ M_\tau & , t = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (N_t)_{t \in [0,1]}$ ist ein lokales \mathfrak{H}_t -Martingal mit $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{G}_{\tau \wedge t}$, jedoch kein "echtes". Hier reicht natürlich eine lokalisierende Folge mit $\tau_n \nearrow 1$.

N_\bullet ist keine Martingal, da

$$0 = N_0 = \mathbb{E}[N_0] \neq \mathbb{E}[N_1 | \mathfrak{F}_0] = \mathbb{E}[N_1] = 1$$

7 Stochastische Differentialgleichungen

Gegeben: $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ - Borel-messbar, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$ - Borel-messbar und $B_t = \vec{B}_t = (B_t^1, \dots, B_t^k) \in \mathbb{R}^k$ eine k -dimensionale Standard-Brown'sche Bewegung.⁴ Weiter sei ξ eine \mathbb{R}^d -wertige von \vec{B} unabhängige Zufallsvariable. Dann heißt $(X_t)_{t \geq 0}$ mit $X_t \in \mathbb{R}^d$ (*starke*) Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX &= b(X) dt + \sigma(X) d\vec{B}_t \\ X_0 &= \xi \end{aligned}$$

falls gilt:

1. $t \mapsto X_t$ stetig und an $\left(\overline{\mathfrak{F}_{t+}^{\vec{B}}}\right)$ adaptiert.
2. $X_0 = \xi$
3. $\forall t > 0 : X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) d\vec{B}_s$

Bemerkung.

1. $\int_0^t \sigma(X_s) d\vec{B}_s \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\left[\int_0^t \sigma(X_s) d\vec{B}_s \right]^l = \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{lj}(X_s) dB_s^j$$

2. Bezeichnungen:

⁴Das heißt: B_t^i ist eine Standard-Brown'sche für $i = 1, \dots, k$ und $\{B_t^1, \dots, B_t^k\}$ sei eine unabhängige Familie stochastischer Prozesse.

- \vec{B}_\bullet - Signal
- b - Drift
- σ - Dispersionsmatrix

3. **Lemma:** Sei $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, $\mathfrak{F} := \sigma(Z)$. Sei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ \mathfrak{F} -messbar. Dann folgt

$$\exists h : Y = h(Z)$$

Mit diesem Lemma bedeutet die Adaptiertheit von X_\bullet an $(\overline{\mathfrak{F}_\bullet^B})$, dass in einem abstrakten Sinne eine Funktion H existiert mit

$$H : \vec{B}_\bullet \mapsto X_\bullet = H(B_\bullet)$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} dS &= r \cdot S \, dt + \sigma \cdot S \, dB_t \\ S_0 &= \xi \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $k = d = 1$, $b(x) = r \cdot x$, $\sigma(x) = \sigma \cdot x$.

$$\Rightarrow S_t = \xi_0 \cdot \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot t + \sigma B_t \right)$$

Verallgemeinerung:

1. Zufällige Koeffizienten, Zeitabhängigkeit:

$$(t, x, \omega) \mapsto b(t, x, \omega)$$

$$(t, x, \omega) \mapsto \sigma(t, x, \omega)$$

Damit hätten wir die Gleichung

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t b(s, X_s, \omega) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \omega) \, dB_s$$

2. Koeffizienten von der Vergangenheit der Lösung abhängig:

$$b : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma : C([0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

Z.B. $b(X_\bullet) = \int_0^T X_s \cdot \sin(s) \, ds$. Eine mögliche DGL wäre dann

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X \upharpoonright [t-T, t]) \, dt + \sigma(X \upharpoonright [t-T, t]) \, dB_t \\ X_{[-T, 0]} &= \xi_{[-T, 0]} \end{aligned}$$

Dies ist eine *stochastische Delay Gleichung*.

7.1 Pfadweise Eindeutigkeit unter lokaler Monotoniebedingung

Im folgenden: Autonomer Fall, d.h. σ, b hängen nicht von t ab, $b(x) = b(x)$, $\sigma = \sigma(x)$.

Satz 7.1 (Autonomer Fall). *Falls die Koeffizienten die lokale Monotoniebedingung, nämlich*

$$\forall R > 0 \exists c = c_R : 2\langle b(x) - b(y), x - y \rangle_{\mathbb{R}^d} + \|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{HS}^2 \leq c_R \cdot \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^d$$

erfüllen, sind zwei Lösungen von

$$\begin{aligned} dX &= b(x) dt + \sigma(X) dB_t \\ X_0 &= \xi \end{aligned}$$

ununterscheidbar, d.h. falls eine Lösung existiert, ist diese eindeutig.

Beweis. Falls (X_t) ein \mathbb{R}^d -wertiger Prozess mit

$$dX_t = U_t dt + V_t dB_t = U dt + dM_t$$

ist mit $U_t \in \mathbb{R}^d$, $V_t \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und B_t eine k -dimensionale Brown'sche Bewegung, so gilt:

$$\begin{aligned} d\|X_t\|^2 &= d \sum_{j=1}^d (X_t^j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^d 2 \cdot X_t^j dX_t^j + \sum_{j=1}^d d\langle X^j, X^j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^d 2U_t^j dt + \sum_{j=1}^d 2X_t^j dM_t^j + \sum_{j=1}^d d\langle (V \bullet B)^j, (V \bullet B)^j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^d 2U_t^j dt + \sum_{j=1}^d 2X_t^j dM_t^j + \sum_{j=1}^d d \left(\sum_{l,m=1}^k V_{jl} \cdot V_{jm} \bullet \langle B^l, B^m \rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^d 2U_t^j dt + \sum_{j=1}^d 2X_t^j dM_t^j + \sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^k (V_{jl})^2 dt \\ &= 2\langle U_t, X_t \rangle_{\mathbb{R}^d} dt + 2(V^T X) dB_t + \|V_t\|_{HS}^2 dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\|X_t\|^2] = \mathbb{E}[\|X_0\|^2] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sum_j 2X_s^j U_s^j ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \|V_s\|_{HS}^2 ds \right]$$

wobei

$$\|V\|_{HS} = \sqrt{\sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^k (V_{jl})^2}$$

Weitere Vorbereitung:

Lemma 7.2 (Gronwall-Lemma). Seien $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und stetig, $\beta \geq 0$. Falls für alle $t \in [0, T]$

$$g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t g(s) ds$$

gilt, folgt

$$g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t h(s) \cdot e^{\beta(t-s)} ds$$

Falls ferner $t \mapsto h(t)$ nicht fallend ist, gilt

$$g(t) \leq h(t) \cdot e^{\beta \cdot t}$$

Beweis des Lemmas:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-\beta t} \int_0^t g(s) ds \right) &= e^{-\beta t} \cdot \left(g(t) - \beta \int_0^t g(s) ds \right) \\ &\leq e^{-\beta t} \cdot h(t) \\ \Rightarrow \int_0^t g(s) ds &\leq e^{\beta t} \int_0^t h(s) \cdot e^{-\beta s} ds \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} g(t) &\leq h(t) + \beta \cdot \int_0^t g(s) ds \\ &\leq h(t) + \beta \cdot e^{\beta t} \cdot \int_0^t h(s) e^{-\beta s} ds \\ \text{Falls } h \text{ nichtfallend: } &\leq h(t) + \beta \cdot e^{\beta t} \cdot h(t) \cdot \int_0^t e^{-\beta s} ds \\ &= h(t) \cdot e^{\beta t} \end{aligned}$$

Insbesondere: $g \geq 0$, $g(t) \leq c + \beta \int_0^t g(s) ds \Rightarrow g(t) \leq c \cdot e^{\beta t}$.

Zurück zum Eindeutigkeitsbeweis:

Seien $(X_t^1), (X_t^2)$ zwei Lösungen von

$$\begin{aligned} dX &= b(X) dt + \sigma(X) dW_t \\ X_0 &= \xi \text{ } P\text{-fast sicher} \end{aligned}$$

Betrachte $Z = (X_1 - X_2)$. Dann gilt

$$dZ = \underbrace{(b(X_1) - b(X_2))}_{=:B} dt + \underbrace{(\sigma(X_1) - \sigma(X_2))}_{=:S} dW_t$$

Wir führen die Stoppzeit

$$\tau_R := \inf \{u \geq 0 \mid \max \{\|X_u^1\|, \|X_u^2\|\} \geq R\}$$

ein. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\|Z_t^{\tau_R}\|^2 &= 2\underbrace{\langle b((X^1)^{\tau_R}) - b((X^2)^{\tau_R}), Z^{\tau_R} \rangle}_{=: \beta} dt + \langle Z^{\tau_R}, S^{\tau_R} dW_t \rangle + \|S^{\tau_R}\|_{HS}^2 dt \\ &= 2\langle b(X_t^1) - b(X_t^2), X_t^1 - X_t^2 \rangle dt + \langle Z_t, S dW_t \rangle + \|\sigma(X_t^1) - \sigma(X_t^2)\|_{HS}^2 dt \end{aligned}$$

Insbesondere ist Z^{τ_R} beschränkt

$$\Rightarrow \left(\int_0^{\tau_R \wedge t} Z_u \cdot S_u dW_u \right)_{t \geq 0}$$

ist ein echtes Martingal und hat damit den Erwartungswert Null. Damit gilt mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|Z_t^{\tau_R}\|^2] &= \mathbb{E} [\|Z_0\|^2] + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_R \wedge t} 2\langle b(X_u^1) - b(X_u^2), X_u^1 - X_u^2 \rangle + \|\sigma(X_u^1) - \sigma(X_u^2)\|_{HS}^2 du \right] \\ &\leq \mathbb{E} [\|Z_0\|^2] + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau_R \wedge t} c_R \cdot \|X_u^1 - X_u^2\|^2 du \right] \\ &= 0 + c_R \cdot \int_0^t \underbrace{\mathbb{E} [\mathbb{1}_{u \leq \tau_R} \|X_u^1 - X_u^2\|^2]}_{=: g(u)} du \\ &= c_R \cdot \int_0^t g(u) du \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\mathbb{E} [\|X_{\tau_R \wedge t}^1 - X_{\tau_R \wedge t}^2\|^2] \geq \mathbb{E} [\mathbb{1}_{t \leq \tau_R} \|X_t^1 - X_t^2\|^2] = g(t)$$

Insgesamt haben wir also

$$g(t) \leq c_R \int_0^t g(u) du$$

d.h. wir können das Gronwall-Lemma mit $h \equiv 0$ anwenden.

$$\Rightarrow 0 \leq g(t) \leq h(t) \cdot e^{c_R \cdot t} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E} \left[\|X_t^1 - X_t^2\|^2 \cdot \mathbf{1}_{t \leq \tau_R} \right] = 0 \quad \forall t$$

Da X_\bullet^1 und X_\bullet^2 stetig sind, folgt, dass $X_{\tau_R \wedge \bullet}^1$ und $X_{\tau_R \wedge \bullet}^2$ ununterscheidbar $\forall R > 0$. Mit $R \rightarrow \infty$ folgt, dass X^1 und X^2 ununterscheidbar sind. \square

Bemerkung. Falls $x \mapsto b(x)$ und $x \mapsto \sigma(x)$ lokal Lipschitz, d.h. $\forall R > 0 \exists c_R$:

$$\|b(x) - b(y)\|_{\mathbb{R}^d} \leq \|x - y\| \cdot c_R, \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\|_{HS} \leq \|x - y\| \cdot c_R \quad \forall x, y \in B_R$$

so erfüllen sie auch die lokale Monotoniebedingung.

Bemerkung. Seien $\dot{x} = b(x)$, $x(0) = x_0$, $\dot{y} = b(y)$, $y(0) = y_0$ zwei Lösungstrajektorien einer gewöhnlichen DGL. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\|X_t - Y_t\|^2) &= 2\langle X_t - Y_t, dX_t - dY_t \rangle \\ &= 2\langle X_t - Y_t, b(X_t) - b(Y_t) \rangle dt \\ &\leq 2 \cdot c_R \cdot \|X_t - Y_t\|^2 dt \end{aligned}$$

(hier: $X_t = x(t)$ und $Y_t = y(t)$). Aus dem Gronwall-Lemma folgt dann

$$\|X_t - Y_t\|^2 \leq e^{2 \cdot c_R \cdot t} \cdot \|X_0 - Y_0\|^2$$

$\Rightarrow X_t = Y_t$, falls $X_0 = Y_0$.

7.2 Existenz starker Lösungen unter Lipschitz-Bedingung

Satz 7.3 (Existenz von Lösungen unter globalen Lipschitz-Bedingungen). *Es sei $\mathbb{E}[\|\xi\|^2] < \infty$ und es existiere $K > 0$ mit*

$$\|b(X) - b(Y)\|_{\mathbb{R}^d} + \|\sigma(X) - \sigma(Y)\|_{HS} \leq K \cdot \|X - Y\| \quad \forall X, Y$$

und

$$\|b(X)\| + \|\sigma(x)\| \leq K \cdot (1 + \|X\|) \quad (WB)$$

Dann existiert eine starke Lösung der stochastischen DGL

$$\begin{aligned} dX &= b(X) dt + \sigma(X) dW_t \\ X_0 &= \xi \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\exists C \quad \forall t \in [0, T] : \mathbb{E}[\|X_t\|^2] \leq C \cdot (1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2])$$

Beweis. Picard-Iteration: Definiere Folge $X_\bullet^{(k)}$ von Prozessen durch

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &:= \xi \quad \forall t \\ X_t^{(k+1)} &:= \xi + \int_0^t b(X_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(k)}) dW_s \end{aligned}$$

Zunächst: Einschränkung auf $t \in [0, T]$ mit $T > 0$.

1. Behauptung:

$$\exists C > 0 \forall k \forall t \leq T : \mathbb{E} \left[\left\| X_t^{(k)} \right\|^2 \right] \leq C \cdot (1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2])$$

Beweis:

$k = 0$: klar.

$k \rightarrow k + 1$: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| X_t^{(k+1)} \right\|^2 \right] &\leq 3\mathbb{E}[\|\xi\|^2] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t b(X_s^{(k)}) ds \right)^2 \right] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \sigma(X_s^{(k)}) dW_s \right)^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[\|\xi\|^2] + 3 \int_0^t \mathbb{E} \left[\|b(X_s^{(k)})\|^2 \right] ds + 3 \int_0^t \mathbb{E} \left[\|\sigma(X_s^{(k)})\|^2 \right] ds \\ &\stackrel{(WB)}{\leq} 3\mathbb{E}[\|\xi\|^2] + 3(T+1)K^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\left\| X_s^{(k)} \right\|^2 \right] dt + 3(T+1)K^2 \cdot T \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists C_0 : \forall t \in [0, T] \forall k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\left\| X_t^{(k+1)} \right\|^2 \right] \leq C_0(1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2]) + C_0 \cdot \int_0^t \mathbb{E} \left[\left\| X_u^{(k)} \right\|^2 \right] du$$

Iteratives Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| X_t^{(k+1)} \right\|^2 \right] &\leq C_0 \cdot (1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2]) \cdot \left(1 + C_0 t + \frac{(C_0 t)^2}{2} + \dots + \frac{(C_0 t)^{k+1}}{(k+1)!} \right) \\ &\leq C_0(1 + \mathbb{E}[\|\xi\|^2]) \cdot e^{C_0 T} \forall t \in [0, T] \forall k \end{aligned}$$

2. Ähnlich für die Unterschiede in k :

$$X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} = \underbrace{\int_0^t (b(X_s^{(k)}) - b(X_s^{(k-1)})) ds}_{=: B_t} + \underbrace{\int_0^t (\sigma(X_s^{(k)}) - \sigma(X_s^{(k-1)})) dW_s}_{=: M_t}$$

Mit der Lipschitz-Stetigkeit folgt dann

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|B_s\|^2 \right] \leq K^2 \cdot T \cdot \mathbb{E} \left[\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds \right]$$

und mit der Maximalungleichung für Martingale

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|M_s\|^2 \right] &\leq C_1 \cdot \mathbb{E} \left[\int_0^t \|\sigma(X_s^{(k)}) - \sigma(X_s^{(k-1)})\|^2 ds \right] \\ &\leq C_1 \cdot k^2 \cdot \mathbb{E} \left[\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds \right] \end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt das

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2 \right] \leq C_2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 \right] ds$$

Iteration in k ergibt

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2 \right] \leq \frac{(C_2 \cdot t)^2}{k!} \cdot C_3$$

mit

$$C_3 = \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{E} \left[\|X_s^{(1)} - \xi\|^2 \right]$$

Mit Tschebyschev folgt

$$P \left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2 \geq \frac{1}{2^{k+1}} \right) \leq \underbrace{\frac{(C_2 \cdot 4 \cdot T)^k}{k!}}_{\alpha_k} \cdot C_3$$

Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = e^{4 \cdot C_2 \cdot T}$ folgt aus Borell-Cantelli:

$$\exists X^\infty : X_\bullet^{(k)}(\omega) \rightarrow X_\bullet^\infty(\omega)$$

gleichmäßig auf $[0, T]$ für fast jedes $\omega \in \Omega$. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} X_t^{(k+1)} &= \xi + \int_0^t b(X_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(X_s^{(k)}) dW_s \\ &\downarrow \\ X_t^\infty &= \xi + \int_0^t b(X_s^\infty) ds + \int_0^t \sigma(X_s^\infty) dW_s \end{aligned}$$

Der Grenzübergang in der Integralgleichung (genauer in den stochastischen Integralen) ist gerechtfertigt durch:

$X_t^{(k)} \rightarrow X_t^\infty \Rightarrow b(X_t^{(k)}) \rightarrow b(X_t^\infty)$ und $\sigma(X_t^{(k)}) \rightarrow \sigma(X_t^\infty)$, da b und σ stetig, und die Anwendung vom stochastischen Konvergenzsatz der dominierten Konvergenz unter Verwendung der unter 1. gewonnenen Schranken.

$\Rightarrow (X_t^\infty)_{t \in [0, T]}$ löst die stochastische DGL. Für zwei auf $[0, T]$ bzw. $[0, \widehat{T}]$ definierte Lösungen X bzw. \widehat{X} gilt wegen der Eindeutigkeit

$$\widehat{X}_{|[0, T \wedge \widehat{T}]} = X_{|[0, T \wedge \widehat{T}]}$$

\Rightarrow Wir erhalten eine globale Lösung durch Fortsetzung.

□

7.3 Schwache Lösungen

Definition 7.4. Gegeben: Koeffizientenfunktionen

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto b(x) \in \mathbb{R}^d$$

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathbb{R}^{d \times k}$$

Dann heißt ein Paar (X_\bullet, W_\bullet) von Prozessen auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), P)$ eine *schwache Lösung* der stochastischen DGL

$$dX = b(X) dt + \sigma(X) dW_t$$

falls

1. W_\bullet ist eine Brown'sche Bewegung

$$2. \quad \forall t \geq 0 : X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

Bemerkung. Unterschied zum Konzept der starken Lösung: W als antreibende Brown'sche Bewegung wählbar!

7.3.1 Beispiel: Schwache Lösung durch Girsanov-Transformation

$$dX = b(X) dt + dW_t, \quad X \in \mathbb{R}$$

mit b beschränkt und messbar.

Falls b nicht Lipschitz-stetig ist, ist die Existenz von starken Lösungen (zu gegebenen W) nicht klar.

Konstruktion einer schwachen Lösung mit Girsanov-Transformation:

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung definiert auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Wir schreiben

$$dB = b(B_t) dt \underbrace{- b(B_t) dt}_{=: d\tilde{W}_t} + dB_t$$

Girsanov:

$$\tilde{W}_t = - \int_0^t b(B_s) dB_s + B_t$$

ist eine Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), \tilde{P})$ mit

$$\tilde{P} = \varepsilon \left(\int_0^\bullet b(B_s) dB_s \right) P$$

$\Rightarrow (B_\bullet, \tilde{W}_\bullet)$ als Prozesse auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), \tilde{P})$ erfüllen die stochastische DGL

$$dB = b(B_t) dt + d\tilde{W}_t$$

und \tilde{W}_t ist eine Brown'sche Bewegung.

7.3.2 Verteilungs- vs. Pfadweise Eindeutigkeit

Schwache Lösungen geben Aufschluss über die ("statistischen" bzw.) Verteilungseigenschaften von Lösungen, jedoch keine Information über den pfadweisen Zusammenhang von Eingangs- und Ausgangssignal.

Definition 7.5.

- Die stochastische DGL

$$dX = b(X) dt + \sigma(X) dW_t$$

heißt *verteilungseindeutig*, wenn je zwei schwache Lösungen (X, W) und (X', W') dieselben Verteilungen (als Prozesse mit Werten in \mathbb{R}^d) haben.

- Die stochastische DGL

$$dX = b(X) dt + \sigma(X) dW_t$$

heißt *pfadweise eindeutig*, wenn jeweils zwei Lösungen X und X' mit derselben Brown'schen Bewegung W ununterscheidbar sind.

Beispiel. $b \equiv 0$, $\sigma(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x \leq 0 \end{cases}$ (also $d = k = 1$).

$$dX = \text{sign}(X_t) dW_t$$

Falls (X, W) eine schwache Lösung auf $(\Omega, (\mathfrak{F}_t), P)$ ist, ist X ein Martingal mit

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \text{sign}(X_s)^2 ds = t$$

$\Rightarrow X$ ist eine Brown'sche Bewegung.

\Rightarrow Die stochastische DGL ist verteilungseindeutig.

Sei X eine Standard-Brown'sche Bewegung. Weiter sei

$$W_t := \int_0^t \text{sign}(X_s) dX_s$$

Dann ist W eine Brown'sche Bewegung und es gilt:

$$\begin{aligned} dW &= \text{sign}(X_s) dX_s \\ \Leftrightarrow dX_s &= \text{sign}(X_s) dW_s \end{aligned}$$

$\Rightarrow (X, W)$ ist eine schwache Lösung und $(-X, W)$ ist wegen

$$\begin{aligned} dX &= \text{sign}(X_s) dW_s \\ \Rightarrow -dX &= -\text{sign}(X_s) dW_s \\ \Rightarrow d(-X) &= \text{sign}(-X_s) dW_s \end{aligned}$$

auch eine schwache Lösung. Damit haben die Lösungen (X, W) und $(-X, W)$ dieselbe Brown'sche Bewegung W , aber X und $-X$ sind nicht ununterscheidbar. Damit ist die stochastische DGL **nicht** pfadweise eindeutig.

Bemerkung. Stochastische DGLs mit Verteilungseindeutigkeit erlauben allgemeine Aussagen über die stochastischen Eigenschaften von sämtlichen (schwachen) Lösungen. Falls Verteilungseindeutigkeit nicht gegeben ist, so sind kaum allgemeine Aussagen zu Lösungen möglich.

7.4 Schwache Lösungen und das Martingalproblem

Satz 7.6. Sei (X, W) eine schwachen Lösung der stochastischen DGL

$$dX = b(X) dt + \sigma(X) dW_t$$

mit $X \in \mathbb{R}^d$, $x \mapsto b(x) \in \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \sigma(x) \in \mathbb{R}^{d \times k}$ und eine standard k -dimensionalen Brown'schen Bewegung W . Sei weiter

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(\mathbb{R}^d)$$

Dann ist

$$t \mapsto f(X_t) - \int_0^t (\mathcal{L}f)(X_s) ds$$

mit

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(x) &= \langle b(x), \nabla f(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_{l=1}^k \sigma_{i,l}(x) \sigma_{j,l}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ &= \langle b(x), \nabla f(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \cdot (\text{Hess } f)_{ij}(x) \end{aligned}$$

ein lokales \mathbb{R} -wertiges Martingal.

Zusatz: Falls f beschränkt ist, so ist

$$t \mapsto f(X_t) - \int_0^t (\mathcal{L}f)(X_s) ds$$

ein Martingal.

Beweis. Ito-Formel:

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) d\langle X^i, X^j \rangle$$

Es gilt

$$dX_t^i = b^i(X_t) dt + \sum_{l=1}^k \sigma_{il}(X) dW^l$$

$$\begin{aligned} d\langle X^i, X^j \rangle &= \sum_{l,m=1}^k \sigma_{il}(X) \sigma_{jm}(X) \underbrace{d\langle W^l, W^m \rangle}_{=\delta_{lm} dt} \\ &= \sum_{l=1}^k \sigma_{il}(X) \sigma_{jl}(X) dt \\ &= (\sigma \sigma^T)_{ij}(X_t) dt \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$df(X_t) = \left(\langle b(X_t), \nabla f(X_t) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(X) (\text{Hess } f)_{ij}(X) \right) dt + \underbrace{\langle \nabla f(X_t), \sigma(X_t) dW_t \rangle}_{\in \mathcal{M}_{loc}}$$

□

Bemerkung. Es sei ein linearer Differentialoperator 2. Ordnung \mathcal{L} gegeben. Wir sagen, X löst das Martingalproblem zum Operator \mathcal{L} , falls für alle $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$

$$f(X_t) - \int_0^t (\mathcal{L}f)(X_s) ds \in \mathcal{M}_{loc}$$

Korollar 7.7. 7.5 Anwendung auf PDE zweiter Ordnung: Methode der "stochastischen Charakteristiken"

Sie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes, glattes Gebiet. Seien weiter $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung zur partiellen DGL

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h &= 0 \text{ auf } \Omega \\ h &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Ferner sei X eine Lösung des Martingalproblems zu \mathcal{L} . Dann ist h gegeben durch

$$h(x) = \mathbb{E} [g(X_{\tau_{\partial\Omega}}^{(x)})] \cdot \mathbf{1}_{\tau_{\partial\Omega} < \infty}$$

mit einer Lösung

$$t \mapsto X_t^{(x)}$$

des Martingalproblems zu \mathcal{L} mit Start in x , d.h. $X_0^{(x)} = x$. Außerdem sei

$$\tau_{\partial\Omega} := \inf \{u \geq 0 \mid X_u^{(x)} \notin \Omega\}$$

(Methode der "stochastischen Charakteristiken")

Beweis. h existiert, aber ist unbekannt. Es gilt $\mathcal{L}h = 0$ in Ω . Mit der Ito-Formel bzw. der Definition von $X^{(x)}$ als Lösung des Martingalproblems liefert für $x \in \Omega$

$$h(X_t^{(x)}) - h(X_0^{(x)}) - \underbrace{\int_0^t (\mathcal{L}h)(X_s^{(x)}) ds}_{=0} \in \mathcal{M}_{loc}$$

$$\Rightarrow h(X_{t \wedge \tau_{\partial\Omega}}^{(x)}) - h(X_0^{(x)}) - \underbrace{\int_0^{t \wedge \tau_{\partial\Omega}} (\mathcal{L}h)(X_s^{(x)}) ds}_{=0} = h(X_{t \wedge \tau_{\partial\Omega}}^{(x)}) - h(X_0^{(x)}) \in \mathcal{M}_{loc}$$

(Hier die Einschränkung $\tau_{\partial\Omega} < \infty$ fast sicher)

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(x) &= \mathbb{E} \left[h \left(X_{t \wedge \tau_{\partial\Omega}}^{(x)} \right) \right] \quad \forall t \geq 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[h \left(X_{t \wedge \tau_{\partial\Omega}}^{(x)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[h \left(X_{\tau_{\partial\Omega}}^{(x)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[g \left(X_{\tau_{\partial\Omega}}^{(x)} \right) \right] \quad , \text{ da } X_{\tau_{\partial\Omega}}^{(x)} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

□

Zusammenhang zur Methode der Charakteristiken: Bei partiellen DGLs 1. Ordnung benutzt man eine Ansatzmethode über gewöhnliche DGLs. Hier: Für partielle DGLs 2. Ordnung haben wir eine Ansatzmethode über stochastische (gewöhnliche) DGLs benutzt.

8 Kurzer Ausblick in Schlagworten

Das Spiel von \mathcal{L} und (X_\bullet) als Lösung zum Martingalproblem ist noch heute Gegenstand mathematischer Forschung. Folgende Fragen/Situationen treten dabei typisch auf.

1. Nicht reguläre Koeffizienten
2. Randverhalten von X_\bullet auf $\partial\Omega$?
3. Stochastische Differentialgleichungen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten
4. Unendlich dimensionale Situation (\Rightarrow stochastische partielle DGLs)
5. Langzeitverhalten von Lösungen
6. Optimale Kontrolle von Stochastischen Differentialgleichungen und voll-nichtlineare PDE

Viele weitere Fragen ergeben sich zudem in den konkreten Modellen, die studiert werden.