Stochastische Analysis

Karl-Theodor Sturm

Literatur:

- I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed. Springer '91
- D. Revuz, M. Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion, 2nd ed. Springer '94
- W. Hackenbroch, A. Thalmaier: Stochastische Analysis, Teubner '91

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Analysis und gewöhnliche DGl.

Die Erfindung der *Analyis* (= Differential- und Integralrechnung) durch Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) löste den Siegeszug der Mathematik bei der Beschreibung von Naturphänomenen und ökonomischen Zusammenhängen aus und führte zur Mathematisierung von Physik, Chemie, Biologie, Technik, Ökonomie, ...
Gewöhnliche Differentialgleichungen dienen der Modellierung von Phänomenen der realen Welt: $dy_t = b(t, y_t)dt$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erlaubt äquivalente Formulierung in differentieller und integreller Form:

$$\dot{y_t} = b(t, y_t) \quad \text{bzw.} \quad y_T = y_0 + \int_0^T b(t, y_t)dt$$

0.2 Stochastische Analysis und stochastische Differentialgleichungen

Die *Stochastische Analysis* hat die Beschreibung von Naturphänomenen zum Ziel, die stochastischen (= nicht deterministischen) Einflüssen unterworfen sind. Dies geschieht z.B. mittels *stochastischer Differentialgleichungen* der Form

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dM_t. \tag{1}$$

Formal führt das zu

$$\dot{Y}_t = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\dot{M}_t. \tag{2}$$

$b(t, Y_t)$ bezeichnet hier den Einfluss des (deterministischen) „Signals“, $\sigma(t, Y_t)\dot{M}_t$ den Einfluß des (stochastischen) „Rauschens“.
Für $(M_t)_{t\geq 0}$ wählt man ein stetiges Martingal (also einen stochastischen Prozeß ohne erkennbare Signalkomponente), typischerweise die Brownsche Bewegung (BB).

Problem: für solche (M_t) ist fast keine Trajektorie differenzierbar! Es gibt keine pfadweise *stochastische Differentiation*! (Lediglich eine Art „stochastische Differentiation im distributiven Sinne“ im Rahmen des sog. Malliavin-Kalküls, von Paul Malliavin ab 1978 entwickelt.)
Ausweg: Wir vergessen die differentielle Interpretation (2) und definieren (1) mittels der folgenden integralen Version

$$Y_T = Y_0 + \int_0^T b(t, Y_t)dt + \int_0^T \sigma(t, Y_t)dM_t \tag{3}$$

Hierzu müssen wir *stochastischen Integralen* der Form $\int_0^T X_t dM_t$ eine Bedeutung geben (für $(M_t)_t$ Martingal, $(X_t)_t$ „messbarer“ stochastischer Prozeß).
Das geht! *Itô Integral* (Kyoshi Itô).

- R. Paley, N. Wiener, A. Zygmund (1933): (X_t) determ, (M_t) BB
- K. Itô (1942,44): (X_t) stoch., (M_t) BB
- H. Kunita, S. Watanabe (1967): (X_t) stoch., (M_t) Martingal

0.3 Die Idee des Itô-Integrals

Definition 0.3.1. $Y_t(\omega) = \int_0^T X_t(\omega)dM_t(\omega)$ *als* L^2*-Limes der Approximationen*

$$Y_T^{\Delta(n)}(\omega) = \sum_{t_i \in \Delta(n)} X_{t_{k-1}}(\omega) \cdot (M_{t_k \wedge T}(\omega) - M_{t_{k-1} \wedge T}(\omega)) \tag{4}$$

für Partitionen $\Delta(n)$ *von* $[0, \infty[$ *mit Feinheit* $|\Delta(n)| \to 0$.

Für eine große Klasse von (M_t) und (X_t) existiert dieser Limes und es gilt:

- $(Y_t)_t$ ist stetiges Martingal
- $E(Y_t^2) = E \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s$
  mit $\langle M \rangle$ = *quadratische Variation* von $M = (M_t)_k$ (z.B. $\langle M \rangle_t = t$ für BB).

Achtung: Diese Eigenschaften gelten nicht, falls man in (4) $X_{t_{k-1}}$ durch X_{t_k} (rückläufiges Itô-Integral) oder $\frac{1}{2}(X_{t_{k-1}} + X_{t_k})$ (Stratonovich-Integral) ersetzt!
Allerdings gilt für das Itô-Integral nicht $df(M_t) = f'(M_t)dM_t$ (das gilt für klassische Integrale und für das Stratonovich-Integral), sondern die *Itô-Formel*

$$df(M_t) = f'(M_t)dM_t + \frac{1}{2}f''(M_t)d\langle M \rangle_t$$

(Kettenregel für stochastische Integrale)

0.4 Stochastische DGl und partielle DGl

Sei $(M_t)_t$ die d-dim BB mit infinitesimalem Erzeuger $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ und $(Y_t)_t$ die Lösung der SDGl $dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dM_t$.
Dann hat $(Y_t)_t$ folgenden infinitesimalen Erzeuger

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit b (Drift-Vektor) wie oben und $a = \sigma\sigma^*$ (Diffusionsmatrix), d.h. $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x) \cdot \sigma_{jk}(x)$.
Es gilt also

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(E_x f(Y_t) - f(x)) = (Lf)(x).$$

$\Rightarrow$ Partielle DGl lassen sich mit Hilfe stochstischer DGl lösen!

Kapitel 1

Filtrationen und Stoppzeiten

Im folgenden sei stets vorgegeben ein W.-Raum $\Omega, \mathcal{F}, P$.

1.1 Stoch. Prozesse (Wiederholung)

Definition 1.1.1. *Sei $(E, \mathcal{E})$ ein Meßraum. Eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt* stochastischer Prozess *(auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$), falls $\forall t \geq 0$: $X_t : \Omega \to E$ ist $\mathcal{F}$-meßbar (genauer: $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-meßbar) (d.h. eine Zufallsvariable). $t \in [0, \infty[$ wird als Zeit interpretiert, E als Zustandsraum (meist $E = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).*
Für fixes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$X_\bullet(\omega) : \mathbb{R}_+ \to E, \quad t \mapsto X_t(\omega)$$

Trajektorie.
Wir verwenden folgende äquivalente Interpretationen:

$$X : \qquad \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$$X : \quad \Omega \to E^{\mathbb{R}_+}, \quad \omega \mapsto X_\bullet(\omega) \quad \textit{(zufälliges Auswählen von Trajektorien).}$$

Definition 1.1.2. *Zwei stochastische Prozesse X, Y (auf selbem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit selbem Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$) heißen*

- *Modifikationen voneinander, falls*
  $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \geq 0$.
- *ununterscheidbar , falls $P(X_t = Y_t$ für alle $t \geq 0) = 1$, m.a.W. $P(X_\bullet = Y_\bullet) = 1$.*

Bemerkung 1.1.3. Ununterscheidbar $\Rightarrow$ Mod. voneinander!
Umkehrung gilt i.a. nicht! (z.B. $\Omega = [0,1], P = \lambda^1, X_t(\omega) = 0, (\forall t, \omega)$ und

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t = \omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 1.1.4. *Seien f.a. Trajektorien von X, Y rechtsseitig stetig. Dann gilt: Ununterscheidbar $\Leftrightarrow$ Mod. voneinander.*

Beweis. Übung. □

1.2 Filtrationen

Definition 1.2.1. *Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt* Filtration *(=Filtrierung) falls $\forall 0 \leq s \leq t < \infty : \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t$ sind σ-Algebren auf Ω mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.*
Intuitiv: $\mathcal{F}_t$ enthält die bis zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty[$ verfügbare Information. (Erlaubt Unterscheidung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.)

Definition 1.2.2. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *heißt* filtrierter W-Raum. *Man setzt:*
$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s : s < t), \mathcal{F}_{0-} = \{\emptyset, \Omega\}$ *und* $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t+} : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t-} : t \geq ???)$.
Offenbar gilt $\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$.

Definition 1.2.3. $(\mathcal{F}_t)$ *heißt* rechtsstetig, *falls $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \quad (\forall t \geq 0)$.*

Beispiel 1.2.4. Stets ist $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration.

Definition 1.2.5. *Der filtrierte W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *heißt* vollständig, *wenn $\mathcal{F}_0$ alle $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen enthält.*
Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt $(\mathcal{F}, P)$-Nullmenge, falls $\exists A' \subset \mathcal{F}$ mit $A' \supset A$ und $P(A') = 0$.

Bemerkungen 1.2.6.
a) Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vollst., so ist jeder der W-Räume $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ vollständig.

b) Umkehrung gilt nicht!
Es gibt i.a. mehr $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen als $(\mathcal{F}_0, P)$-Nullmengen.

c) Man erhält einen vollständigen filtr. W-Raum durch *Augmentieren*: ersetze $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_t$ durch $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ bzw. $\mathcal{F}_t{}' = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$ mit
$\mathcal{N}$ = Menge der$(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen.

(Hinweis: Statt $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen verwenden manche Autoren bei obiger Definition $(\mathcal{F}_\infty, P)$-Nullmengen.)

Definition 1.2.7. *Der filtrierte W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ genügt den üblichen Bedingungen *(bzw. ist ein standard filtrierter W-Raum), falls er vollständig ist und die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig ist.*

Bemerkung 1.2.8. Standard-Erweiterung: 1. Augmentieren: $\mathcal{F}_t{}'$ und $\mathcal{F}'$,
2. Rechte Limiten $(\mathcal{F}'_{t+}) \Rightarrow (\Omega, \mathcal{F}'_{t+}, \mathcal{F}', P)$ standard filtrierter W-Raum.

1.3 Adaptierte Prozesse

Definition 1.3.1. *a) Gegeben: Stochastischer Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.*

$$\mathcal{F}_t{}^X := \sigma(X_s : s \leq t)$$

heißt die von X erzeugte Filtration.

b) X heißt an eine vorgegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert, *falls $\mathcal{F}_t{}^X \subset \mathcal{F}_t (\forall t \geq 0)$ oder m.a.W., falls X_t $\mathcal{F}_t$-meßbar $(\forall t \geq 0)$.*

Beispiele 1.3.2. a) (X_t) ist an $(\mathcal{F}_t{}^X)$ adaptiert. (Trivial)

b) Sei $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben.

Definition 1.3.3. $X_t := E(f|\mathcal{F}_t)$

$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

Bemerkung 1.3.4. Oft bezeichnet man die von einem Prozess X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t{}^X)$ mit $(\mathcal{F}_t{}^0)$ und ihre Standard-Erweiterung dann mit $(\mathcal{F}_t)$.

c) Geg.: $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar, $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vollständig $\Rightarrow (Y_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert.
(Achtung: Hier reicht nicht, daß$(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ vollst. ist!)

1.4 Progressiv messbare Prozesse

Definition 1.4.1. *Ein Prozess X heißt* progressiv messbar *bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, falls für alle $t \geq 0$: die Abbildung*

$$X : [0, t] \times \Omega \to E, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar ist.

Proposition 1.4.2. *Sei X ein stochastischer Prozess mit Werten im topologoschen Raum E, rechtsstetig (d.h. alle(!) Trajektorien $t \mapsto X_t(\omega)$ sind rechtsstetig) (oder linksstetig), und adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist X progressiv messbar.*

Beweis. Sei X rechtsstetig, $t > 0$ fix. Wir approximieren X durch $X^{(n)}$ mit

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega) \text{ für } s \in]kt2^{-n}, (k+1)t2^{-n}], \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,$$

und $X_0^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)$. Dann ist $X^{(n)} : (s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar.
Wegen Rechtsstetigkeit: $\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$ für alle $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$.
$\Rightarrow X : [0, t] \times \Omega \to E$ ist $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-meßbar. $\square$

1.5 Stoppzeiten

Definition 1.5.1. *Eine Abbildung $T : \Omega \to [0, \infty]$ heißt* Stoppzeit *bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$, *falls* $\forall t \geq 0$*:*

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

wobei $\{T \leq t\} := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\}$.
Sie heißt schwache Stoppzeit (oder Optionszeit) bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, *falls* $\forall t \geq 0$

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkungen 1.5.2. a) Jede Stoppzeit ist schwache Stoppzeit.

b) T ist schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \Leftrightarrow T$ ist Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$.

c) $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig $\Rightarrow$ Jede schwache Stoppzeit ist Stoppzeit.

Beispiel 1.5.3. Jede "konstante Zeit" $T \equiv t_0$ ist eine Stoppzeit.

d) T ist Stoppzeit $\Leftrightarrow X_t = 1_{[0,T[}(t)$ ist adaptiert, (denn $\{X_t = 0\} = \{T \leq t\}$).

Proposition 1.5.4. *a) Mit S und T sind auch $S \wedge T, S \vee T, S + T$ (schwache) Stoppzeiten.*

b) Mit $T_n (\forall n \in \mathbb{N})$ ist auch $\sup\limits_n T_n$ eine (schwache) Stoppzeit und $\inf\limits_n T_n$ eine schwache Stoppzeit.
(Denn: $\left\{\sup\limits_n T_n \leq t\right\} = \bigcap\limits_n \{T_n \leq t\}$ und $\left\{\inf\limits_n T_n < t\right\} = \bigcup\limits_n \{T_n < t\}$.)

c) Jede schwache Stoppzeit T läßt sich monoton durch Stoppzeiten T_n mit endlichem Wertebereich approximieren:
$T_n := (k+1)2^{-n}$ *auf* $\{k2^{-n} \leq T < (k+1)2^{-n}\}, k = 0, 1, \dots, 4^n$,
$T_n := +\infty$ *sonst.*
$\Rightarrow T_n \to T, T_n \geq T_{n+1} > T$ *und* $T_n > T$ *auf* $\{T < \infty\}$.

Proposition 1.5.5 (Galmarino's Test)**.** *Sei $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (oder $\Omega = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = \{\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ cadlag$\}$) $X_t(\omega) = \omega(t)$ und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$. Dann gilt:*

a) T ist (schwache) Stoppzeit genau dann, wenn $\forall t \geq 0, \omega, \omega' \in \Omega$: gilt:
$(T(\omega) \underset{(<)}{\leq} t)$ *und* $\forall s \leq t : X_s(\omega) = X_s(\omega') \Rightarrow T(\omega) = T(\omega')$.

Ist T Stoppzeit, dann gilt

b) $A \in \mathcal{F}_T \Leftrightarrow (\omega \in A, \forall s \leq T(\omega) : X_s(\omega) = X_s(\omega'), T(\omega) = T(\omega') \Rightarrow \omega' \in A)$.

c) f ist $\mathcal{F}_T$-meßbar $\Leftrightarrow f(\omega) = f(\omega_T)$ mit $\omega_T(s) = \omega(s \wedge T(\omega))$.

d) $\mathcal{F}_T = \sigma(X_s^T : s \geq 0)$.

1.6 Treffer- und Eintrittszeiten

Definition 1.6.1. *Sei (X_t) an $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter Prozeßund $A \subset E$.*

$$T_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \textit{Eintrittszeit von } A$$

$$T_A^*(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \textit{Trefferzeit von } A$$

(jeweils mit $\inf \emptyset := +\infty$.*)*

Bemerkungen 1.6.2. a) Für $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$

$$D_\Gamma(\omega) := \inf\{t \geq 0 : (t,\omega) \in \Gamma\} \quad \text{Debut von } \Gamma$$

Somit für $A \subset E : T_A = D_{X^{-1}(A)}$.

b) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ genüge den üblichen Bedingungen
Debut-Theorem: Für jedes progressiv meßbare $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ist D_Γ eine Stoppzeit.
Korollar: X progressiv meßbar $\Rightarrow T_A$ ist Stoppzeit $\quad \forall A \in \mathcal{E}$.

c) Jede Stoppzeit ist eine Eintrittszeit:
wähle $X_t := 1_{[0,T[}(t)$ und $A := 0 \Rightarrow T_A = T$.

Satz 1.6.3. *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert. (an vorgeg. $(\mathcal{F}_t)_t$) und rechtsstetig (d.h. E ist topologischer Raum und alle Trajektorien $X_\bullet(\omega)$ sind rechtsstetig).*

a) $T_A^* = T_A$ schw. Stoppzeit ($\forall A$ offen $\subset E$)

b) Ist X sogar stetig und E metrisierbar, so ist
T_A Stoppzeit ($\forall A \subset E$ abgeschlossen)
und T_A schw. Stoppzeit ($\forall A$ F_σ-Menge, d.h. $A = \bigcup A_n$ mitA_n abgeschlossen).

c) (ohne Beweis) Genügt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ den üblichen Bedingungen, so ist T_A Stoppzeit ($\forall A \in \mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$)

Beweis. a) Stets ist $\{T_A \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\}$ und $\{T_A^* \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in]0,t[\}$. Daher bei offenem A und rechtsstetigem X:

$$\begin{aligned}\{T_A \geq t\} = \{T_A^* \geq t\} &= \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\cap \mathbb{Q}\} \\ &= \bigcap_{s \in [0,t[\cap\mathbb{Q}} \{X_s \notin A\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_A$ ist schw. Stoppzeit.

b) Für A abgeschlossen

$$\begin{aligned}
\{T_A > t\} &= \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t]\} \\
&= \{\omega : d(X_s(\omega), A) > 0, \forall s \in [0,t]\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : d(X_s(\omega), A) \geq \frac{1}{n}, \forall s \in [0,t]\} \\
&\quad [\text{wegen Stetigkeit von } X_s(\omega) \text{ und damit von } s \mapsto d(X_s(\omega), A)] \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : d(X_s(\omega), A) \geq \frac{1}{n}, \forall s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{d(X_s(\cdot), A) \geq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t
\end{aligned}$$

Ist $A = \bigcup A_n$ mit A_n abgeschlossen ($\Rightarrow T_{A_n}$ Stoppzeit), so ist $T_A = \inf_n T_{A_n}$ schwache Stoppzeit.

$\square$

Beispiele 1.6.4. $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, X Koordinatenprozess (d.h. $X_t(\omega) = \omega(t)$) und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$.
Sei $A \subset \mathbb{R}^d, \neq \emptyset$ offen.
$\Rightarrow T_A^*$ ist schwache Stoppzeit, aber keine Stoppzeit.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}_{t+}$
Intuitive Begründung (genaueres s. Übung "Galmarino's Test"):
Wähle ω mit $\omega(0) \notin \overline{A}$ und $\omega(t) \in A$ für ein $t > 0$, d.h. für $t_0 = T_A^*(\omega)$ gilt: $0 < t_0 < \infty$. Wegen Stetigkeit ist $\omega(t_0) = \partial A$. Def. neuen Pfad $\omega' \in \Omega$ durch $\omega'(t) = \omega(t \wedge t_0)$. Offenbar $\omega' \notin A (\forall t \geq 0)$ und damit $T_A^*(\omega') = +\infty$. Nun gilt:
$\omega(t) = \omega'(t) \quad \forall t \leq t_0$
$\Rightarrow \forall \Gamma \in \mathcal{F}_{t_0} : \omega \in \Gamma \Leftrightarrow \omega' \in \Gamma \quad$ (Galmarino)
Aber offensichtlich $\omega \in \{T_A^* \leq t_0\}$ und $\omega' \notin \{T_A^* \leq t_0\}$
$\Rightarrow \{T_A^* \leq t_0\} \notin \mathcal{F}_{t_0} \Rightarrow T_A^*$ keine Stoppzeit $\Rightarrow (\mathcal{F}_t)$ nicht rechtsstetig.

Weitere Beispiele für (schwache) Stoppzeiten:
$A, B \subset E$ disjunkt, $T_0 := 0, n \in \mathbb{N}_0$
$T_{2n+1} = \inf\{t \geq T_{2n} : X_t \in A\}$
$T_{2n+2} = \inf\{t \geq T_{2n+1} : X_t \in B\}$
(z.b. $A = \mathbb{R}^d \setminus B$, schlecht bei BB, dann f.s. $T_n = T_1 \quad \forall n$)

Keine (schwache) Stoppzeit
Letzte (oder vorletzte etc.) Austrittszeit aus A
$L_A = \sup\{t \geq 0 : X_t \in A\}$.
Denn (intuitiv): Ist $L_A(\omega) = t$ so weiß ω das zum Zeitpunkt t (und auch unmittelbar danach) noch nicht!! (sondern erst am Ende seiner Tage.)

1.7 Die T-Vergangenheit

Definition 1.7.1. *Für Stoppzeit T sei*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die σ-Algebra der T-Vergangenheit.
Analog läßt sich für schwache Stoppzeiten T definieren

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

Beides sind tatsächlich σ-Algebren (Beweis wie im diskreten Fall). Jede Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-meßbar, jede schwache Stoppzeit $\mathcal{F}_{T+}$-meßbar. $\mathcal{F}_T$ besteht aus den Ereignissen, die bis zum zufälligen Zeitpunkt T eintreten. Stets ist $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$. Für $T \equiv t$ ist $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$.

Bemerkungen 1.7.2. Wie im diskreten Fall gelten folgende Eigenschaften:

a) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

b) $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

c) $E(.|\mathcal{F}_{S \wedge T}) = E(E(.|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_T)$

d) T_n schwache Stoppzeit ($\forall n \in \mathbb{N}$), $T = \inf\limits_n T_n$ ($\Rightarrow$ schwache Stoppzeit) $\Rightarrow \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{T_{n+}} = \mathcal{F}_{T+}$

Kurze Wiederholung: Sei $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$. Dann gilt:
T schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \Leftrightarrow T$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{G}_t)$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{G}_T$.

Satz 1.7.3. *Sei X progr. meßb. und T eine Stoppzeit.*

a) $X_T : \{T < \infty\} \to E, \quad \omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ *ist $\mathcal{F}_T$-messbar.*

b) Der gestoppte Prozeß $X^T : (t, \omega) \mapsto X_{T(\omega) \wedge t}(\omega)$ *ist progressiv meßbar. (sowohl bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ als auch bzgl. $(\mathcal{F}_{t \wedge T})_{t \geq 0}$).*

Beweis. a) T ist $\mathcal{F}_T$-messbar $\Rightarrow$ für fixes $t \geq 0$ gilt:

$$T^* : \{T \leq t\} \to [0, t] \times \Omega, \quad \omega \mapsto (T(\omega), \omega)$$

ist $\mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar, denn für $B \in \mathcal{B}([0, t])$ und $A \in \mathcal{F}_t$ gilt:

$$\{T^* \in B \times A\} \cap \{T \leq t\} = \{T \in B\} \cap A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Progressive Messbarkeit von $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$ bedeutet $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-Messbarkeit von X auf $[0, t] \times \Omega$.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{E}$-Messbarkeit von $X_T = X \circ T^*$ auf $\{T \leq t\}$.
Das gilt $\forall t \geq 0$
$\Rightarrow X_T$ ist $\mathcal{F}_T/\mathcal{E}$-messbar auf $\{T < \infty\}$.

b) Für fixes $t \geq 0$ gilt:
$T_t : \Omega \to [0,t] \times \Omega$, $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ ist $\mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar
$\Rightarrow T_t^* : [0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}$-messbar.
Da X progressiv messbar ist, gilt:
$X^T = X \circ T_t^* : [0,t] \times \Omega \to E$, $(s,\omega) \mapsto X_s^T(\omega)$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{E}$-messbar

□

1.8 Treffer-Verteilung

Korollar 1.8.1. *Sei X progr. messbar und T schwache Stoppzeit. Dann defeniert*

$$\nu_T(C) = \mathbb{P}(X_T \in C, T < \infty) \quad (\forall C \in \mathcal{E})$$

ein Maß ν_T auf $(E, \mathcal{E})$.
Speziell für $T = T_A$ heißt ν_T „Trefferverteilung“. *Ist $T < \infty$ f.s., so ist ν_T ein W-Maß, nämlich das Bildmaß $\nu_T = X_T(P) = P_{X_T} = P \circ X_T^{-1}$.*

Beweis. Sei $P^*(C) = P(C \cap \{T < \infty\}) \Rightarrow P^*$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bzw. äquiv. auf $(\Omega^*, \Omega^* \cap \mathcal{F})$ mit $\Omega^* := \{T < \infty\} \subset \Omega$. Auf Ω^* ist X_T $\mathcal{F}_{T+}$-messbar, also $\mathcal{F}$-messbar.
$\Rightarrow \nu_T = P^* \circ X_T^{-1}$ ist Maß. □

Satz 1.8.2. *Sei X stetig und $T = T_A$ mit $A \subset E$ abgeschlossen. Dann sind die Vert. von T und X_T, also $P(T \in \cdot)$ und $\nu_T(\cdot) = P(X_T \in \cdot, T < \infty)$, durch die endl.-dimensionalen Verteilungen von X festgelegt.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für ν_T. Es genügt z.z. $\nu_T(C)$ ist $\forall C \subset E$ abgeschlossen durch die endl.-dim. Verteilungen festgelegt. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}
\nu_T(C) &= P(\{X_T \in C\} \cap \{T < \infty\}) \\
&= P(\{\exists t \in \mathbb{R}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin A \text{ und } X_T \in A \cap C\}) \\
&= P(\{\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : \exists t \in \mathbb{Q}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A), X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A \cap C)\}) \\
&= P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+ \cap [0,t[} \{X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A)\} \cap \{X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A \cap C)\})
\end{aligned}$$

□

Beispiel 1.8.3. Sei X die d-dim. standard BB (d.h. $P =$ Wiener Maß, $E = \mathbb{R}^d, X_0 = 0$), $x \in \mathbb{R}^d, r^2 > |x|^2$. $T_x := T_{\partial B_r(x)} = T^*_{\partial B_r(x)}$. Dann ist

a) $\mathbb{E}(T_x) = \frac{r^2 - |x|^2}{d}$ und

b) $\nu_{T_0}(\cdot)$ das zu 1 normierte Oberflächenmaß σ_r auf $\partial B_r(0)$.

Beweis. b) Sei C eine Borel-Teilmenge von $\partial B_r(0)$ und A eine orthogonale $d \times d$-Matrix. Aufgrund der Rotationsinvarianz der BB gilt:

$$\begin{aligned} \nu_T(C) &= \mathbb{P}(X_T \in C) = \mathbb{P}((A \circ X)_T \in C) \\ &= \mathbb{P}(X_T \in A^{-1}C) = \nu_T(A^{-1}C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \nu_T$ ist rotationsinvariant und normiert $\Rightarrow$ Beh.
Für jede beschr. oder nicht neg. Borel-Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ folgt:

$$\mathbb{E}(f(X_{T_{\partial B_r(0)}})) = \int\limits_{\partial B_r(0)} f(y)\sigma_r(dy)$$

a) Offenbar ist $T_{\partial B_r(0)} = T^*_{\partial B_r(0)} < \infty$ wegen iterierten Logarithmus' (z.B.).
Nun ist $M_t := |X_t - x|^2 - d \cdot t - |x|^2$ Martingal mit $M_0 = 0$.
$\Rightarrow |X_{t\wedge T} - x|^2 - d \cdot (t \wedge T) - |x|^2$ Martingal
$\Rightarrow d \cdot \mathbb{E}(t \wedge T) = \mathbb{E}(|X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 \leq r^2 - |x|^2 \quad (\forall t)$
$\Rightarrow d \cdot \mathbb{E}(T) \leq r^2 - |x|^2$
Umgekehrt folgt aus dem Lemma von Fatou und der Stetigkeit von X:

$$d \cdot \mathbb{E}(T) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(|X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 \geq \mathbb{E}(\lim_{t\to\infty} |X_{t\wedge T} - x|^2) - |x|^2 = r^2 - |x|^2$$

□

M.a.W. Für die in x startende BB (X_t, P^x) gilt:

$$E^x(T_0) = \frac{r^2 - |x|^2}{d}$$

Im Falle $d = 1$: Seien $a, b \geq 0$, $B_r(x) =]-a, b[, T = T_{\{-a,b\}}$
$\Rightarrow E(T) = a \cdot b$

Kapitel 2

Martingale in stetiger Zeit

Stets vorgegeben: Filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P), E = \mathbb{R}^1$.

2.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Definition 2.1.1. *Ein stoch. Prozess* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *heißt* Submartingal *(bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$*), falls*

- X *an* $(\mathcal{F}_t)$ *adaptiert*
- $\mathbb{R}$*-wertig mit* $E(X_t^+) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$
- $$\forall 0 \leq s < t : E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ f.s.} \tag{2.1}$$

X heißt Supermartingal , falls $-X$ *ein Submartingal ist.*
Es heißt Martingal , falls es sowohl Sub- als auch Supermartingal ist.
Ein Sub-/Supermartingal X *mit* $E(|X_t|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$ *heißt integr. Sub-/Supermartingal bzw.* L^1*-Sub-/Supermartingal.*
Jedes (Sub-)Martingal X *bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$ *ist auch ein (Sub-)Martingal bzgl. der von ihm erzeugten Filtr.* $({\mathcal{F}_t}^X)$*, sowie bzgl. jeder Filtr.* $(\mathcal{G}_t)$ *mit* ${\mathcal{F}_t}^X \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$.
Ebenso bzgl. der augmentierten Filtration $(\overline{\mathcal{F}_t})$*, denn* $E(.|\mathcal{F}_t) = E(.|\overline{\mathcal{F}_t})$ *f.s.*
I.a. ist jedoch für $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$ *der Prozess* X *<u>kein</u> (Sub-)Martingal mehr bzgl.* $(\mathcal{G}_t)$.
Die Submartingal-Ungleichung (2.1) bedeutet: $\forall 0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{F}_s$:

$$\int_A X_t dP \geq \int_A X_s dP$$

Beispiel 2.1.2. (trivial)
Sei $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F} \quad (\forall t \geq 0)$. Dann gilt: (X_t) Submart. $\Leftrightarrow \forall s \leq t : X_t^+ \in L^1$ und $X_s \leq X_t$ f.s.

Faustregel: Martingale Beschreiben faire Spiele,
Supermartingale beschreiben realistische Spiele:
$E(X_t|\mathcal{F}_s)$: was ich aus jetziger Sicht zukünftig erwarten darf
X_s: was ich jetzt habe.

Proposition 2.1.3 (Standardbeispiele)**.** *Sei X die d-dim. BB und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$. Fr $x, y \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $x \cdot y$ das kanonische Skalarprodukt. Dann sind Martingale:*

a) $y \cdot X_t$ *für* $y \in \mathbb{R}^d$*, insbes. die Koordinatenprozesse* X_t^i *für* $i = 1, \ldots, d$.

b) $|X_t|^2 - dt$

c) $\exp(y \cdot X_t - \frac{1}{2}|y|^2 t)$ *für* $y \in \mathbb{R}^d$

Beweis. a) Sei $Y_t = y \cdot X_t$ und $s < t$.

$$E(Y_t|\mathcal{F}_s) = y \cdot E(\underbrace{(X_t - X_s)}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s) + y \cdot E(\underbrace{X_s}_{\text{meßbar bzgl. } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s) = y \cdot X_s = Y_s$$

b) $E(|X_t|^2|\mathcal{F}_s) = E(|X_t - X_s|^2 + 2X_s \cdot (X_t - X_s) + |X_s|^2|\mathcal{F}_s) = (t-s) + 0 + |X_s|^2$

c) Sei $Y = \exp(y \cdot X_t - \frac{|y|^2}{2} t)$

$$\begin{aligned} E(Y_t|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{y^2}{2}t} \cdot E(e^{y(X_t - X_s)} \cdot e^{yX_s}|\mathcal{F}_s) \\ &= e^{-\frac{y^2}{2}t} \cdot e^{y \cdot X_s} \cdot \underbrace{E(e^{y \cdot (X_t - X_s)})}_{e^{y^2/2 \cdot (t-s)}} = Y_s \end{aligned}$$

denn sei Z_t in 0 startende d-dim. BB:

$$\begin{aligned} E(e^{y \cdot Z_t}) &= \int e^{y \cdot z} dP_{Z_t}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{yz} \cdot (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \\ &= e^{\frac{y^2}{2}t} \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{(z-yt)^2}{2t}} dz \\ &= e^{\frac{y^2}{2}t} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.4. a) X, Y Mart. $\Rightarrow X + Y, X - Y, \alpha \cdot X$ Mart. $\quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

b) X, Y Submart. $\Rightarrow X + Y, X \vee Y, \alpha \cdot X$ Submart. $\quad (\forall \alpha \geq 0)$

c) X Mart. und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (oder X Submart. und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und isoton) und $E(|\varphi(X_t)|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$
$\Rightarrow (\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ Submart.
(z.B. $(X_t^+)_{t \geq 0}$).

d) X Mart. $\Leftrightarrow X \quad L^1$-Submart. mit $t \mapsto E(X_t)$ konst.

Beweis. a), b) trivial. c) Jensen
d) "$\Leftarrow$" $E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) \geq 0$ und $E(X_t - X_s = 0)$
"$\Rightarrow$" $E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$. □

2.2 Maximalungleichungen

Satz 2.2.1. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ Submartingal, $T \subset [0,\infty[$ abzählbar (oder X rechtsstetiges Subm, $T = [0,\infty[$) und $X^*(\omega) = \sup_{t\in T} X_t(\omega)$. Dann gilt*

a) $\lambda \cdot P(X^* \geq \lambda) \leq \sup_{t\in T} E(X_t^+)$

b) Ist sogar $X \geq 0$ oder Mart., dann gilt $\forall p > 1$:

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in T} \|X_t\|_p$$

Lemma 2.2.2. *Für $a, b \subset \mathbb{R}$ gilt unter obigen Vorr.:*

$$(b-a) \cdot E(U_T(a,b,X(\omega))) \leq \sup_{t\in T} E((X_t - b)^+)$$

Hierbei

$$\begin{aligned} U_T(a,b,X(\omega)) &= \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n} \in T : \\ &\qquad X_{t_1}(\omega) > b, X_{t_2}(\omega) < a, X_{t_3}(\omega) > b, \ldots, X_{t_{2n}}(\omega) < a\} \\ &= \textit{Anzahl der absteigenden Überquerungen von } [a,b] \textit{ durch } X_0(\omega)|_T. \end{aligned}$$

Beweis von Satz und Lemma: Aussage bekannt für T endlich. Wähle isotone Folge (T_n) mit T_n endlich, $\bigcup T_n = T$. Die Behauptungen folgen mit Satz v.d. monotonen Konvergenz.

2.3 Regulierungsresultate

Satz 2.3.1. *Sei $(X_t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal mit $X_t \in L^1 \quad (\forall t \geq 0)$.*

a) Dann $\exists \Omega^* \in \mathcal{F}, P(\Omega^*) = 1 : \forall \omega \in \Omega^*$:
$\forall t \geq 0$ ex. $X_{t+}(\omega) = \lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ und
$\forall t > 0$ ex. $X_{t-}(\omega) = \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$.
(Für $\omega \notin \Omega^*$ setze man $X_{t\pm}(\omega) = \limsup X_s(\omega)$.)

b) Dann sind $X_{t+}, X_{t-} \in L^1$ und $\forall t \geq 0$:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) \geq X_t \quad \textit{f.s.} \tag{$*$}$$

und $\forall t > 0$:

$$E(X_t|\mathcal{F}_{t-}) \geq X_{t-} \quad f.s. \tag{$**$}$$

Dabei gilt Gleichheit in $(*)$ *(bzw.* $(**)$*), falls* $t \mapsto E(X_t)$ *rechts- (bzw. links-)stetig ist.*
Insbesondere, falls X *ein Martingal ist.*

c) $(X_{t+})_{t\geq 0}$ *ist ein Subm. bzgl.* $(\mathcal{F}_{t+})$ *(und* $(X_{t-})_{t\geq 0}$ *eines bzgl.* $(\mathcal{F}_{t-})$*.)*
Ist (X_t) *ein Mart., so sind beides Martingale (bzgl. d. jeweiligen Filtr.).*

d) *Fast jede Trajektorie von* $(Y_t) = (X_{t+})$ *ist* $\underset{cadlag}{\text{rcll}}$, *d.h.:*

$$Y(\omega) : t \mapsto Y_t(\omega) \text{ ist } \underset{\substack{(rc)\\(cad)}}{\text{rechtsstetig}} \text{ u. besitzt linke } \underset{\substack{(ll)\\(lag)}}{\text{Limiten}}$$

Beweis. a) Wir zeigen $\exists X_{t-}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t > 0\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : \liminf_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} \text{ für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega)) = +\infty\right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
E\left(U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega))\right) &\leq \frac{1}{b} \cdot \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} E((X_t - b)^+) \\
&= \frac{1}{b} E((X_n - b)^+) < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow P(\{\omega : U\left(U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega))\right) = +\infty\}) = 0$
$\Rightarrow P(\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t > 0\}) = 0.$

b) Fix $t \geq 0$ und $(t_n)_{n\in-\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit $t_n \searrow t$ für $n \to -\infty$.
$\Rightarrow (X_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ ist ein Submart. bzgl. $(\mathcal{F}_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ („rückläufiges Submartingal") mit

$$\begin{aligned}
\sup_n E(|X_{t_n}|) &\leq 2 \cdot \sup_n EX_{t_n}^+ - \inf_n EX_{t_n} \\
&\leq 2 \cdot EX_{t_n}^+ - EX_t < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow X_{t+} \in L^1, X_{t_n} \to X_t$ in L^1.
Aus $X_t \leq E(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)$ folgt daher $X_t \leq E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.
Ferner (wegen L^1-Konvergenz) $E(X_{t+}) = \lim_{n\to\infty} E(X_{tn})$, und falls $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig, folgt $E(X_t) = E(X_{t+})$.
$\Rightarrow X_t = E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.
(**) analog: $X_{t_n} \leq E(X_t|\mathcal{F}_{t_n}) \Rightarrow E(X_{t-}|\mathcal{F}_{t_n}) \leq E(X_t|\mathcal{F}_{t_n}) \Rightarrow X_{t-} \leq E(X_t|\mathcal{F}_{t-})$.

c) Fix $s < t$ und sei s_n eine Folge mit $t > s_n \searrow s$. Dann gilt
$X_{s_n} \leq E(X_t|\mathcal{F}_{s_n}) \leq E(E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_{s_n}) = E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}) \Rightarrow X_{s+} \leq E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s+})$.

d) Rechtsstetig klar, linke Limiten wegen a), angewandt auf das Subm. (X_{t+}).

□

Korollar 2.3.2. *Sei X rechtsstetiges Subm. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.*

a) Dann ist es Subm. bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$ und bzgl. dessen Augmentierung.

b) Fast jede Trajektorie ist cadlag.

Korollar 2.3.3. *Sei X (Sub)mart. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, welche übliche Bed. erfüllt, und sei $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig (z.B. konstant, falls X Martingal).*
Dann $\exists$ Mod Y von X mit cadlag- Traj. und Y ist (Sub-)Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.

Beweis. Wähle $Y_t = X_{t+}$ von vorhin. Bleibt zu zeigen: (Y_t) ist Modif. von (X_t), d.h.

$$\forall t \geq 0: \quad P(Y_t = X_t) = 1.$$

Nun gilt aber nach b) aus vorigem Satz:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_t \quad \text{f.s.}$$

und wegen $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_{t+} \quad \text{f.s.}$$

□

2.4 Konvergenzsätze

Satz 2.4.1 (Subm.-Konv.)**.** *Sei (X_t) rechtsstetiges Submartingal mit $\sup_t E(X_t^+) < \infty$. Dann $\exists X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s.*

Korollar 2.4.2. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-neg. Supermart. $\Rightarrow \exists X_\infty = \lim X_t$ f.s.*

Satz 2.4.3. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-neg. Supermart. (oder rechtsstet. Mart.). Dann sind äquivalent:*

ii) $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in L^1.

iii) $\exists X_\infty \in L^1 : X_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} X_t$ *f.s. mit* $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ *ist Submart. (bzw. Mart.) bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

i) $\{X_t : t \in [0,\infty[\}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

Bemerkungen 2.4.4. a) Die Auss. sind erfüllt, falls $\sup_t \|X_t\|_p < \infty$ für ein $p > 1$. In diesem Fall $X_\infty \in L^p$ und $X_t \to X_\infty$ in L^p.

b) Die Implik. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (*iii*) gelten bereits f. rechtsstet. Submart.

c) Ist X rechtsstet. Mart., so ist ferner äquivalent zu (i), (iii):
(iv) $\exists X_\infty \in L^1 : \forall t \geq 0 : X_t = E(X_\infty|\mathcal{F}_t)$.

Bemerkung 2.4.5. $\{Y_t : t \in I\}$ gleichgr. integr. $:\Leftrightarrow$
$\sup\limits_{t\in I} E(|Y_t| \cdot 1_{\{|Y_t|>M\}}) \to 0$ für $M \to \infty$.

2.5 Optional Sampling

Satz 2.5.1. *Seien X rechtsst. Submart. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ und S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$. Dann gilt*

$$E(X_T|\mathcal{F}_S) \geq X_S \quad \textit{f.s.}$$

Beweis. Sei $t_0 \geq T$ und zunächst $X \geq 0 (\Rightarrow \in L^1)$. Approx. S und T durch Stoppzeiten $S_n, T_n \leq t_0$ mit endlichem Wertebereich, $S_n \searrow S, T_n \searrow T$.
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_S, X_{T_n} \to X_T$.
Nun gilt (Doob Lemma): $X_{S_n} \leq E(X_{t_0}|\mathcal{F}_{S_n})$
$\Rightarrow \{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. integr. (denn $\{E(X_{t_0}|\mathcal{F}_{S_n})\}$ ist gleichgr. integr.)
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_s$ in L^1, analog $X_{T_n} \to X_T$ in L^1.
Ferner gilt
$\int\limits_A X_{S_n} dP \leq \int\limits_A X_{T_n} dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_{S_n} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_S \subset \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{S_n}$
$\Rightarrow \int\limits_A X_S dP \leq \int\limits_A X_T dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_S$
$\Rightarrow$ Behauptung für $X_t \geq 0$.
$\Rightarrow$ analog: Behauptung für $X_t^{(n)} = X_t \vee (-n)$
$\Rightarrow$ Behauptung für bel. X_t mit monotoner Konvergenz. □

Korollar 2.5.2. *Sei X rechtsst., adaptiert, integr. Äquivalent sind*

i) *X ist Martingal.*

ii) *$\forall$ beschr. Stoppzeit T ist* $E(X_T) = E(X_0)$.

Beweis. " $\Rightarrow$ " Optional Sampling.
" $\Leftarrow$ " Sei $s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Definiere $S := s \cdot 1_A + t \cdot 1_{A^C}$, d.h.
$S(\omega) := \begin{cases} s & \text{, falls } \omega \in A \\ t & \text{, sonst.} \end{cases}$
Dann ist S Stoppzeit und $E(X_0) = E(X_S) = E(X_t \cdot 1_{A^C}) + E(X_s \cdot 1_A)$.

Ebenso ist $T \equiv t$ Stoppzeit und daher
$E(X_0) = E(X_T) = E(X_t \cdot 1_{A^C}) + E(X_t \cdot 1_A) \quad \Rightarrow$ Beh.

□

Korollar 2.5.3. *Unter obigen Voraussetzungen sind ebenfalls äquivalent*

i) X *ist (Sub)martingal.*

ii) $\forall$ *beschr. Stoppz.* $S \le T$ *gilt:* $E(X_S) \le E(X_T)$. *(Bei Mart.: oBdA* $S = 0$.*)*

Beweis. $\Leftarrow$ Sei $s \le t, A \in \mathcal{F}_s$. Def. $S := s \cdot 1_A + t \cdot 1_{A^C}$ und $T \equiv t \ge S$ Stoppzeiten.
$\Rightarrow E((X_t - X_s) \cdot 1_A) = E(X_T - X_S) \ge 0 \quad \Rightarrow$ Beh. □

Korollar 2.5.4 (Optional Stopping)**.** *Sei* X *rechtsstet. (Sub-)Martingal und* T *Stoppzeit. Dann ist auch* $X^T = (X_{t \wedge T})_{t \ge 0}$ *ein (Sub-)Martingal.*

2.6 Anwendung auf BB

Proposition 2.6.1. *Sei* (X, P_x) *1-dim BB startend in* $x \in]a, b[$ *und* $T_a = T_{\{a\}}, T_b = T_{\{b\}}$. *Dann ist*

a) $E_x(T_a) = E_x(T_b) = +\infty$

b) $E_x(T_a \wedge T_b) = (x - a)(b - x)$

c) $P_x(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}, \quad P_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a}$

Beweis. a) folgt aus b) mit $b \nearrow \infty$ bzw. $a \searrow -\infty$, dim?
$E_x(T_a) \ge E_x(T_a \wedge T_b) = (x - a)(b - x) \to \infty$ für $b \to \infty$.

b) folgt aus nächstem Satz für $d = 1$.

c) Wegen $P_x(T_a = T_b) = 0$ gilt

(1) $P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a) = 1$.
Ferner ist $Y_t = X_{t \wedge T_a \wedge T_b}$ ein beschr. Martingal ($\le |a| \vee |b|$) $\Rightarrow$ (Optional Sampling).

(2) $x = E_x(Y_0) = E_X(Y_\infty) = E_x(X_{T_a \wedge T_b}) = a \cdot P_x(T_a < T_b) + b \cdot P_x(T_b < T_a)$.

(1)$\wedge$(2) $\Rightarrow x = a \cdot f(x) + b \cdot (1 - f(x))$
$\Rightarrow f(x) = \frac{b-x}{b-a}$.

□

Kapitel 3

Stetige Semimartingale und quadratische Variation

Ab nun stets: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ filtrierter W-Raum mit üblichen Voraussetzungen.

3.1 Stetige Semimartingale

Definition 3.1.1. *a) Ein Prozeß X heißt stetig und wachsend (kurz $X \in \mathcal{A}^+$), falls er adaptiert ist und für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: Die Abbildung*

$$X_\bullet(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$$

ist stetig und wachsend.

b) Ein Prozeß X heißt stetig und von endlicher Variation (oder stetig und lokal von beschränkter Variation), kurz $X \in \mathcal{A}$, falls er adaptiert ist und für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt:
$t \mapsto X_t(\omega)$ ist stetig und von endlicher Variation, d.h. $\forall t \geq 0$: die Variation

$$S_t(\omega) = S_t(X(\omega)) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega) \right| : n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t \right\}$$

von $s \mapsto X_s(\omega)$ auf $[0, t]$ ist endlich.

Lemma 3.1.2. *$X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X = Y - Z$ mit $Y, Z \in \mathcal{A}^+$.*

Beweis. $Y = \frac{1}{2}(S + X)$, $Z = \frac{1}{2}(S - X)$, mit $S =$ Variation von X. □

Definition 3.1.3. *a) Ein Prozeß X heißt stetiges, lokales Martingal, kurz $X \in \mathcal{M}_{loc}$, wenn er adaptiert und stetig ist, und wenn Stoppzeiten T_n existieren mit $T_n \nearrow \infty$ f.s. und X^{T_n} Martingal ($\forall n \in \mathbb{N}$).*

b) Ein Prozeß heißt stetiges Semimartingal, kurz $X \in \mathcal{S}$, falls $\exists M \in \mathcal{M}_{loc}, A \in \mathcal{A} : X = M + A$.

Bemerkungen 3.1.4 (zu lokalen Martingalen). a) $X \in \mathcal{M}$ (d.h. stetiges Martingal) $\Rightarrow X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ [Wähle $T_n = \infty\ \forall n \in \mathbb{N}$].

b) $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$, $X \geq 0 \Rightarrow X$ Supermartingal.
(denn $E(X_t|\mathcal{F}_s) = E(\lim_n X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s) \leq \liminf_n E(X_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s) = X_s$).

c) $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}, X$ beschränkt $\Rightarrow X$ Martingal.

d) $X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und $\forall s \geq 0 : \{X_{T\wedge s} : T \text{ Stoppzeit}\}$ ist gleichgradig integrierbar.

e) $\exists$ gleichgradig integrierbares $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}} : X \notin \mathcal{M}$.

Proposition 3.1.5. *Sei $\mathcal{M}_{loc}^0 = \{X \in \mathcal{M}_{loc} : X_0 = 0 \text{ f.s.}\}$. Dann ist $\mathcal{M}_{loc}^0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$ und $\mathcal{S} = \mathcal{M}_{loc}^0 \oplus \mathcal{A}$.*
Mit anderen Worten: $X \in \mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{A} \Rightarrow X$ konstant $= X_0$.

Beweis. a) Es genügt zu zeigen: $X \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X = 0$, denn dann:
$X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow \exists (T_n), X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A} \Rightarrow X^{T_n} = 0 \Rightarrow X = 0$.

b) Genügt zu zeigen für X beschränkt mit global beschränkter Variation S, denn:
Sei $T_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n \text{ oder } S_t > n\}$
$\Rightarrow X^{T_n} \in \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{A}$
$\Rightarrow X^{T_n} = 0 \Rightarrow X = 0$.

c) Sei $\varepsilon > 0$, $T_0 = 0$ und $T_{i+1} = \inf\{t \geq T_i : |X_t - X_{T_i}| > \varepsilon\}$. Wegen X stetig: $T_i \to \infty$ (für $i \to \infty$).
Nun gilt

$$\begin{aligned}
E\left(X_{T_n}^2\right) &= E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{T_{i+1}}^2 - X_{T_i}^2\right)\right) \\
&= E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}\right)^2\right) + \sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot E\left(\underbrace{E\left(X_{T_{i+1}} - X_{T_i}|\mathcal{F}_{T_i}\right)}_{=0} \cdot X_{T_i}\right) \\
&\leq \varepsilon \cdot E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|X_{T_{i+1}} - X_{T_i}\right|\right) \leq \varepsilon \cdot E(S_\infty).
\end{aligned}$$

Wegen S_∞ beschränkt und ε beliebig folgt $E\left(X_{T_n}^2\right) = 0 \Rightarrow E\left(X_\infty^2\right) = 0 \Rightarrow$ (mit Doobscher L^2-Ungleichung)
$E(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} X_t^2) \leq 2^2 \cdot E(X_\infty^2) = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ f.s.

□

3.2 Die Doob-Meyer Zerlegung

Satz 3.2.1 (Doob-Meyer)**.** *Sei X stetiges Supermartingal. Dann $\exists M \in \mathcal{M}_0^{loc}$ und $A \in \mathcal{A}^+$ mit*

$$X_t = M_t - A_t.$$

Hierbei sind M und A eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit).

Beweis. a) Eindeutigkeit: Sei $X_t = M_t - A_t = N_t - B_t$ mit $M, N \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A, B \in \mathcal{A}^+$.
$\Rightarrow M - N = A - B \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{A} = \{0\}$
$\Rightarrow$ Eindeutig!

b) Existenz im zeit-diskreten Fall: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diskretes Supermart.,

$$\begin{aligned} Y_n &:= E(X_n - X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq 0, \quad \mathcal{F}_n\text{-meßbar} \\ A_n &:= \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \quad \text{wachsend, } \mathcal{F}_{n-1}\text{-meßbar} \\ M_n &:= X_n + A_n \quad \text{Martingal.} \end{aligned}$$

Für zeit-stetigen Fall folgendes Lemma: □

Lemma 3.2.2. *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsender Prozeß mit $A_0 = 0$, A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-meßbar und*
$E(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_n) \leq K \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$
$\Rightarrow E(A_\infty^2) \leq 2K^2$.

Beweis. Sei $a_n = A_{n+1} - A_n$. OBdA $A_n \leq C, a_n \leq C$
$\Rightarrow A_\infty^2 = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(A_\infty - A_n)a_n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(A_\infty^2) &= 2 \cdot E\left(\sum_{n=0}^{\infty} E(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_n) \cdot a_n\right) - E\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right) \\ &\leq 2 \cdot K \cdot E\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \\ &= 2 \cdot K \cdot E(A_\infty) \\ &\leq 2 \cdot K^2, \end{aligned}$$

denn $E(A_\infty) = E(E(A_\infty - A_n|\mathcal{F}_0)) \leq K$. □

Lemma 3.2.3. *Seien $A^{(1)} = (A_n^{(1)})_n$ und $A^{(2)} = (A_n^{(2)})_n$ wie eben und $B = A^{(1)} - A^{(2)}$. Ferner sei W eine ZV mit $W \geq 0$, $E(W^2) < \infty$ und*

$$|E(B_\infty - B_K|\mathcal{F}_K)| \leq E(W|\mathcal{F}_K).$$

Dann $\exists c$ mit:

$$E(\sup_n B_n^2) \leq c \cdot E(W^2) + c \cdot K \cdot \left[E(W^2)\right]^{1/2}.$$

Beweis. Sei $b_n = B_{n+1} - B_n, A_n^{(n)} = A_{n+1}^{(i)} - A_n^{(i)} \quad (i = 1, 2; n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E(B_\infty^2) &= 2 \cdot E\left(\sum_{n=0}^{\infty} E(B_\infty - B_n < \mathcal{F}_n) \cdot b_n\right) - E\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right) \\
&\leq 2 \cdot E\left(\sum_{n=0}^{\infty} E(W|\mathcal{F}_n) \cdot (a_n^{(1)} + a_n^{(2)})\right) \\
&\leq 2 \cdot E\left(W \cdot \left(A_\infty^{(1)} + A_\infty^{(2)}\right)\right) \\
&\leq 2 \cdot \left[E(W^2)\right]^{1/2} \cdot \left(\left[E\left({A_\infty^{(1)}}^2\right)\right]^{1/2} + \left[E\left({A_\infty^{(2)}}^2\right)\right]^{1/2}\right) \\
&\leq 4 \cdot \sqrt{2} \cdot K \cdot \left(E(W^2)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Betrachte schließlich die Martingale $M_n = E(B_\infty|\mathcal{F}_n), W_n = E(W|\mathcal{F}_n)$ und $X_n = M_n - B_n$.
$\Rightarrow |X_n| = |E(B_\infty - B_n|\mathcal{F}_n)| \leq W_n$
$\Rightarrow$ (Doobsche Ungleichung)

$$E(\sup_n X_n^2) \leq E(\sup_n W_n^2) \leq 2^2 \cdot E(W_\infty^2) = 2^2 \cdot E(W^2)$$

und

$$E(\sup_n M_n^2) \leq 2^2 \cdot EM_\infty^2 = 2^2 \cdot E(B_\infty^2).$$

Wegen $\sup_n |B_n| \leq \sup_n |X_n| + \sup_n |M_n|$ folgt

$$\begin{aligned}
E(\sup_n |B_n|) &\leq 2^3 \cdot E(W^2) + 2^3 \cdot E(B_\infty^2) \\
&\leq 2^3 \cdot E(W^2) + c \cdot K \cdot \left(E(W^2)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Fortsetzung des Beweises des Satzes von Doob-Meyer. c) Sei X stetiges und beschränktes Supermartingal und konstant für $t \geq N$
$\Rightarrow$ fast alle Trajektorien sind gleichmäßig stetig.

d) Fixiere $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_{n \cdot 2^{-k}} \text{ und } A_n^k = \sum_{j=1}^{n-1} E(X_{j \cdot 2^{-k}} - X_{(j+1)2^{-k}}|\mathcal{F}_j^k)$$

(diskrete Doob-Meyer Zerlegung aus b)).
Für $t \geq 0$ mit $(n-1)2^{-k} < t \leq n2^{-k}$ sei $\mathcal{F}_t^k = \mathcal{F}_n^k$ und $\overline{A}_t^k = A_n^k$.
Sei $W(\delta) = \sup\{|X_t - X_s| : s \leq N, s \leq t \leq s+\delta\}$. Wegen X beschränkt, ist auch $W(\delta)$ beschränkt. Da die Trajektorien von X fast sicher gleichmäßig stetig sind, gilt: $W(\delta) \to 0$ f.s. für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow W(\delta) \to 0$ in L^2 für $\delta \to 0$.

e) <u>Beh.</u> $\overline{A}_t^k$ konvergiert in L^2 für $k \to \infty$, gleichmäßig in t. Mit anderen Worten, $E(\sup\limits_t |\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l|^2) \to 0$ für $k, l \to \infty$.

<u>Denn:</u> Sei $l \geq k$. Die Prozesse $\overline{A}^k$ und $\overline{A}^l$ sind jeweils konstant auf den Intervallen $]n2^{-l}, (n+1)2^{-l}]$.
$\Rightarrow \sup\limits_t |\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l| = \sup\limits_n |\overline{A}_{n2^{-l}}^k - \overline{A}_{n2^{-l}}^l|$.
Sei $t = n \cdot 2^{-l}$ und $u = \inf\{m \cdot 2^{-k} \geq t : m \in \mathbb{N}_0\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(\overline{A}_\infty^l - \overline{A}_t^l | \mathcal{F}_t^l) &= E(A_\infty^l - A_n^l | \mathcal{F}_{n2^{-l}}) \\ &= E(X_t - X_\infty | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(\overline{A}_\infty^k - \overline{A}_t^k | \mathcal{F}_t^l) &= E(A_\infty^k - A_{u2^k}^k | \mathcal{F}_t) \\ &= E(E(A_\infty^k - A_{u2^k}^k | \mathcal{F}_u) | \mathcal{F}_t) \\ &= E(E(X_u - X_\infty | \mathcal{F}_u) | \mathcal{F}_t) \\ &= E(X_u - X_\infty | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |E(\overline{A}_\infty^l - \overline{A}_t^l | \mathcal{F}_t^l) - E(\overline{A}_\infty^k - \overline{A}_t^k | \mathcal{F}_t^l)| &= E(|X_t - X_u| | \mathcal{F}_t) \\ &\leq E(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3 folgt:

$$E(\sup_t |\overline{A}_t^k - \overline{A}_t^l) \leq c \cdot E(W(2^{-k})^2) + c' \cdot E(W(2^{-k})^2)^{1/2} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

f) <u>Beh.</u> $A := \lim\limits_{k \to \infty} \overline{A}^k$ ist stetig.

<u>Denn</u> $\overline{A}^k$ hat Sprünge $\Delta \overline{A}_t^k = E(X_{(n-1)2^{-k}} - X_{n2^{-k}} | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}})$ an den Stellen $t = n2^{-k}$, die beschränkt sind durch

$$E(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}}) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Daher

$$\begin{aligned} E[\sup_t (\Delta \overline{A}_t^k)^2] &\leq E[\underbrace{\sup_n E(W(2^{-k}) | \mathcal{F}_{(n-1)2^{-k}})}_{\text{Martingal in } n}{}^2] \\ &\leq 2^2 \cdot E(W(2^{-k})^2) \underset{k \to \infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Übergang zu Teilfolgen:
$\sup\limits_t \Delta \overline{A}_t^{k_j} \to 0$ f.s. $\quad (k_j \to \infty)$
$\Rightarrow A$ stetig.

g) Beh. $M := X + A$ ist Martingal.
Denn $\forall k \in \mathbb{N}, \forall s, t \in D_k = 2^{-k}\mathbb{N}_0, \forall B \in \mathcal{F}_s, s < t$

$$\int_B M_t dP = \int_B M_s dP \quad \text{nach Teil b)} \tag{3.1}$$

$\Rightarrow \forall s, t \in D = \bigcup D_k, s < t, \forall B \in \mathcal{F}_s$ gilt (3.1).
$\Rightarrow \forall s, t \in \mathbb{R}_+, s < t : \exists s_k, t_k \in D, s \leq s_k < t_k, s_k \to s, t_k \to t : \forall B \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s_k}$:

$$\int_B M_t dP = \lim \int_B M_{t_k} dP = \lim \int_B M_{s_k} dP = \int_B M_s dP \tag{3.2}$$

denn M ist stetig und beschränkt in L^2.

h) Allgemeiner Fall: X beliebiges stetiges Supermartingal.

Definiere $T_N := \inf\{t \geq 0 : |X_t| > N\}$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist T_N eine Stoppzeit, und $T_N \nearrow \infty$ für $N \to \infty$. Ferner ist X^{T_N} ein stetiges und beschränktes Supermartingal und konstant für $t \geq N$.
$\Rightarrow \exists M^N, A^N : X^{T_N} = M^N - A^N$ (mit $M^N \in \mathcal{M}_0, A^N \in \mathcal{A}_+$).

Wegen Eindeutigkeit $\forall K > N$:
$(M^K)^{T_N} - (A^K)^{T_N} = (X^{T_K})^{T_N} = X^{T_N} = M^N - A^N$
$\Rightarrow M^K = M^N, A^K = A^N$ auf $[0, N]$
$\Rightarrow \exists M, A : M^N = (M)^{T_N}, A^N = (A)^{T_N}, \quad (\forall N)$
$\Rightarrow M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A \in \mathcal{A}_+, X = M - A$.

□

Korollar 3.2.4. *Jedes stetige Supermartingal ist stetiges Semimartingal.*

3.3 Quadratische Variation

Satz 3.3.1. *a)* $\forall M \in \mathcal{M}_{loc} : \exists! \langle M \rangle \in \mathcal{A}_0 : M^2 - M_0^2 - \langle M \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$.

b) $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc} : \exists! \langle M, N \rangle \in \mathcal{A}_0 : M \cdot N - M_0 N_0 - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_{loc}$
Es gilt: $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$.

Beweis. Trivial. ($M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \Rightarrow M^2$ Submartingal $\Rightarrow$ (Doob-Meyer-Zerlegung) $M^2 = N + A$.) □

Definition 3.3.2. $\langle M \rangle = \langle M, M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ *heißt zu M gehöriger wachsender Prozeß oder quadratische(r) Variation(sprozeß) von M.*
$\langle M, N \rangle = (\langle M, N \rangle_t)_{t \geq 0}$ *heißt Klammerprozeß zu M und N oder quadratische Kovariation von M und N.*

Proposition 3.3.3. $\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}$:

a) $\langle M, N \rangle$ *hängt symmetrisch, bilinear und positiv semidefinit von M und N ab.*

b) *Für jede Stoppzeit T gilt:*
$\langle M,N\rangle^T = \langle M,N^T\rangle = \langle M^T,N^T\rangle$.

c) $\langle M\rangle = \langle M - M_0\rangle$.

d) $\langle M\rangle = 0 \Leftrightarrow M$ *konstant.*

Beweis. a) Trivial.

b) Optional Stopping $\Rightarrow (M^2 - \langle M\rangle)^T = (M^T)^2 - \langle M\rangle^T \in \mathcal{M}_{\text{loc}} \Rightarrow \langle M\rangle^T = \langle M^T\rangle$.
Rest mit Polarisation.

Bei c) und d): Nach b) oBdA $M - M_0$ beschränkt, $\Rightarrow \in \mathcal{M}$

c) $(M - M_0)M_0 \in \mathcal{M}$, denn $E((M_t - M_0)M_0|\mathcal{F}_s) = M_0E(M_t - M_0|\mathcal{F}_s) = M_0 \cdot (M_s - M_0)$
$\Rightarrow (M - M_0)^2 - \langle M\rangle = M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle - 2(M - M_0)M_0 \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$

d) $\langle M\rangle = 0$ auf $[0,t] \Rightarrow (M - M_0)^2$ Martingal auf [0,t]
$\Rightarrow E(\sup\limits_{0\le s\le t}(M_s - M_0)^2) \le 4 \cdot E((M_t - M_0)^2) = 0$
$\Rightarrow M$ konstant auf $[0,t]$.

□

Beispiel 3.3.4. Sei X stetiger, zentrierter, quadrat-integrierbarer Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen. Dann ist $X \in \mathcal{M}$ und (unabhängig von ω)

$$\langle X\rangle_t = \mathrm{Var}(X_t - X_0) = E((X_t - X_0)^2) \quad \text{f.s.}$$

Beispiel 3.3.5. M eindimensionale Brownsche Bewegung $\Rightarrow \langle M\rangle_t = t \quad (\forall t \ge 0)$.

Für eine Partition $\Delta = \{t_0, t_1, \dots\}$ mit $t_k \nearrow \infty$ und $0 = t_0 \le t_1 \le \dots$ und einen stochastischen Prozeß M definiert man die *quadratische Variation* von M auf Δ durch

$$Q_t^\Delta = Q_t^\Delta(M) = \sum_{k=1}^{\infty} |M_{t_k\wedge t} - M_{t_{k-1}\wedge t}|^2.$$

Als Feinheit von Δ definiert man $\|\Delta\| = \sup\limits_k |t_k - t_{k-1}|$.

Satz 3.3.6. *Seien $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $t \ge 0$. Dann gilt*

$$Q_t^\Delta \to \langle M\rangle_t \quad P-\textit{stochastisch für } \|\Delta\| \to 0.$$

D.h. $\forall \varepsilon > 0, \eta > 0, \forall t \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0 : \forall$ *Partitionen* Δ *mit* $\|\Delta\| \le \delta$:

$$P\left(\sup_{0\le s\le t} |Q_s^\Delta - \langle M\rangle_s| > \varepsilon\right) < \eta.$$

Beweis. Seien M und t fest, und für $\delta > 0$

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\} \text{ mit } \|\Delta\| \leq \delta.$$

Annahme: M und $\langle M \rangle$ beschränkt.
Sei $a_i^{(1)} = (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$, $a_i^{(2)} = \langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}$, $b_i = a_i^{(1)} - a_i^{(2)}$.
$A_k^{(1)} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(1)} = Q_{t_k}^{\Delta}(M)$, $A_k^{(2)} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(2)} = \langle M \rangle_{t_k}$, $B_k = \sum_{i=0}^{k-1} b_i = A_k^{(1)} - A_k^{(2)} = Q_{t_k}^{\Delta}(M) - \langle M \rangle_{t_k}$, $\mathcal{F}_k = \sigma(M_{t_{i+1}} : i \leq k)$.
($\Rightarrow a_k^{(1)}, a_k^{(2)}$ meßbar bzgl. $\mathcal{F}_k$).
Da oBdA M und $\langle M \rangle$ beschränkt, sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.3 erfüllt.
Da M und $\langle M \rangle$ gleichmäßig stetig auf $[0, t]$, gilt

$$W(\delta) := \sup_{\substack{s \leq t \\ \varepsilon \leq \delta}} \left(|M_{s+\varepsilon} - M_s|^2 + |\langle M \rangle_{s+\varepsilon} - \langle M \rangle_s| \right) \to 0$$

P-f.s. (und in L^2, da beschränkt!) für $\delta \to 0$.
Nun gilt $B_\infty - B_k = \sum_{i=k}^{\infty} b_i$ und $E(b_i | \mathcal{F}_k) = 0$ für $i > k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |E(B_\infty - B_k | \mathcal{F}_k)| &= |b_k| \\ &\leq a_k^{(1)} + a_k^{(2)} \\ &= E(a_k^{(1)} + a_k^{(2)} | \mathcal{F}_k) \\ &\leq E(W(\delta) | \mathcal{F}_k) \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3:

$$E(\sup_k B_k^2) \leq c \cdot E(W(\delta)^2) + c' \cdot E(W(\delta)^2)^{1/2} \to 0$$

für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow E(\sup_{s \leq t} |Q_t^{\Delta}(M) - \langle M \rangle_s|^2) \leq 2E(\sup_k B_k^2) + 2 \cdot E(W(\delta)^2) \to 0$ für $\delta \to 0$.
$\Rightarrow L^2$- und stochastische Konvergenz (gleichmäßig in $s \in [0, t]$) von $Q_s^{\Delta}(M)$ gegen $\langle M \rangle_s$.
Lokalisierungsargument:
Ist M oder $\langle M \rangle$ nicht beschränkt, dann definiere $T_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| > n \text{ oder } \langle M \rangle_t > n\}$
$\Rightarrow P(\sup_{s \leq t} |Q_s^{\Delta}(M) - \langle M \rangle_s| > \varepsilon)$
$\leq P(\sup_{s \leq t} | \underbrace{Q_s^{\Delta}(M^{T_n}) - \langle M^{T_n} \rangle_s| > \varepsilon}_{\text{für } n \text{ fest: } \leq \eta/2 \text{ für } \|\Delta\| \text{ hinr. klein}}) + \underbrace{P(T_n < t)}_{< \eta/2 \text{ für } n \text{ hinr. groß}} \qquad (\forall n, \varepsilon)$ ☐

Korollar 3.3.7. *$\forall M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \forall t \geq 0, \forall$ Partitionen Δ_n mit $\|\Delta_n\| \to 0$:*

$$Q_t^{\Delta_n}(M, N) \to \langle M, N \rangle_t \text{ stochastisch } (n \to \infty),$$

wobei $Q_t^{\Delta_n}(M, N) = \sum_{t_i \in \Delta_n} (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \cdot (N_{t_{i+1} \wedge t} - N_{t_i \wedge t})$.

Satz 3.3.8. *a) Für fast alle* $\omega \in \Omega : \forall a < b$:

$$\langle M\rangle_a(\omega) = \langle M\rangle_b(\omega) \Leftrightarrow M_t(\omega) = M_a(\omega) \quad (\forall t \in [a,b]).$$

b) Für fast alle ω *mit* $\langle M\rangle_\infty(\omega) := \sup_t \langle M_t\rangle_t(\omega) < \infty$ *gilt:*
$\lim_{t\to\infty} M_t(\omega)$ *existiert (und ist endlich).*

Beweis. a) folgt im wesentlichen aus dem vorigem Satz.

b) OBdA $M_0 = 0, T_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t > n\} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} E(\sup_{t\geq 0} M^2_{t\wedge T_n}) &\leq 2^2 \sup_t E(M^2_{t\wedge T_n}) \\ &= 4 \cdot \sup_t E\langle M\rangle_{t\wedge T_n} \\ &\leq 4n \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Martingalkonvergenzsatz): $\exists$ f.s. $M_{T_n} = \lim_{t\to\infty} M_{t\wedge T_n} \in \mathbb{R}$ auf Ω, $M_{T_n} = \lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$ auf $\{T_n = \infty\}$.
$\Rightarrow \exists$ f.s. $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ auf $\bigcup_n \{T_n = \infty\} = \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$.

□

Definition 3.3.9. *Für* $X, Y \in \mathcal{S}$ *mit* $X = M + A$, $Y = N + B$, $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$, $A, B \in \mathcal{A}_0$ *definiere* $\langle X, Y\rangle := \langle M, N\rangle$ *und* $\langle X\rangle := \langle M\rangle$.

Satz 3.3.10. *Dann gilt* $\forall X, Y \in \mathcal{S}, \forall t \geq 0, \forall$ *Partitionen* Δ_n *mit* $\|\Delta_n\| \to 0$

$$Q_t^{\Delta_n}(X,Y) \to \langle X,Y\rangle_t \qquad P\text{-stochastisch.}$$

Beweis. Wir zeigen $Q_t^{\Delta_n}(M,A) \to 0$ und $Q_t^{\Delta_n}(A,A) \to 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} |Q_t^{\Delta_n}(M,A)| &= \left| \sum_{t_i\in\Delta_n} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}) \cdot (A_{t_{i+1}\wedge t} - A_{t_i\wedge t}) \right| \\ &\leq \sup_{t_i} |M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}| \cdot \sum_{t_i} |A_{t_{i+1}\wedge t} - A_{t_i\wedge t}| \\ &\leq \sup_{t_i} |M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}| \cdot \underbrace{S_t(A)}_{<\infty} \to 0 \end{aligned}$$

wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von M auf $[0,t]$ und da die Variation $S_t = S_t(A)$ endlich ist.
Analog für $Q_t^{\Delta_n}(A,A)$. □

Korollar 3.3.11. $\forall X, Y \in \mathcal{S}$, $\forall t \geq 0$*:*

$$\begin{aligned} \langle X,Y\rangle_t &\leq (\langle X\rangle_t \cdot \langle Y\rangle_t)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} (\langle X\rangle_t + \langle Y\rangle_t) . \end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für $Q_t^{\Delta}(X,Y)$. □

3.4 Stetige L^2-beschränkte Martingale

Definition 3.4.1.

$$H^2 := \{M \in \mathcal{M} : \sup_t E(M_t^2) < \infty\}$$

ist der Raum der stetigen L^2-beschränkten Martingale.

Proposition 3.4.2. *a) H^2 ist ein Hilbert-Raum bzgl. der Norm*

$$\|M\|_{H^2} = \left(EM_\infty^2\right)^{1/2} = \lim_{t\to\infty} \left(EM_t^2\right)^{1/2}.$$

b) Äquivalent zu dieser Norm ist die Norm

$$\|M_\infty^*\|_2 = E\left(\sup_t |M_t^2|\right)^{1/2}.$$

c) Für $M \in H_0^2 = \{X \in H^2 : X_0 = 0\}$ gilt

$$\|M\|_{H^2} = (E\langle M\rangle_\infty)^{1/2}.$$

*Beweis.*a), b) Zunächst ist klar:

$$\begin{aligned} M \in H^2 \quad &\Rightarrow \quad M_\infty^* = \sup_t |M_t| \in L^2 \\ &\Rightarrow \quad \exists M_\infty \in L^2 : M_t = E(X_\infty|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E(M_\infty^2) &= \lim_{t\to\infty} E(M_t^2) \\ &= \sup_t E(M_t^2) \\ &\le E(\sup_t M_t^2) \\ &= E(M_\infty^{*2}) \\ &\overset{\text{Doob}}{\le} 2^2 \cdot \sup_t E(M_t^2) \\ &= 2^2 \cdot \|M\|_{H^2}^2. \end{aligned}$$

c) Ferner gilt $\forall t : E(M_t^2) = E\langle M\rangle_t + E(M_0^2)$, also $E(M_\infty^2) = \lim_{t\to\infty} E(M_t^2) = \lim_t E\langle M\rangle_t = E\langle M\rangle_\infty$. Falls $M_0 = 0$.
Seien nun $M^n \in H^2$, mit $\|M^n - M^k\|_{H^2} \to 0$ für $n, k \to \infty$
$\Rightarrow \exists M_\infty^n, M_\infty^k \in L^2$ mit $M_t^n = E(M_\infty^n|\mathcal{F}_t)$, $M_t^k = E(M_\infty^k|\mathcal{F}_t)$

$$\|M_\infty^n - M_\infty^k\|_{L^2} = \|M^n - M^k\|_{L^2} \to 0$$

$\Rightarrow$ (Vollständigkeit von $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$):
$\exists M_\infty \in L^2 : M_\infty^n \to M_\infty$ in L^2.
Def. $M_t := E(M_\infty|\mathcal{F}_t)$ Martingal
$\Rightarrow$ (Doob):

$$\begin{aligned} E(\sup_t |M_t^n - M_t|^2) &\leq 4 \cdot E(|M_\infty^n - M_\infty|^2) \\ &= 4 \cdot \|M^n - M\|_{H^2} \to 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(n_k)_k$:

$$\sup_t |M_t^{n_k} - M_t| \to 0 \text{ f.s. für } k \to \infty$$

$\Rightarrow t \mapsto M_t$ f.s. stetig
$\Rightarrow M \in \mathcal{M} \Rightarrow M \in H^2$.

$\square$

Kapitel 4

Stochastische Integration

4.1 Das Lebesgue-Stieltjes-Integral

Betrachte $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ rechtsstetig.

Satz 4.1.1. *Äquivalent sind:*

(i) g *ist von endlicher Variation.*

(ii) $\forall t \geq 0 : S_t(g) < \infty$
mit $S_t(g) = \sup\{S_t^\Delta(g) : \Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t\}$
und $S_t^\Delta(g) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|$.

(iii) $\exists g_1, g_2$ *rechtsstetig, wachsend:* $g = g_1 - g_2$.

(iv) $\exists$ *signiertes Radon-Maß* μ *auf* $\mathbb{R}_+$ *mit*

$$\mu([0,t]) = g(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+) \tag{4.1}$$

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ per def., $\Leftrightarrow (iii)$ klar
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$ oBdA g wachsend, $\mu \geq 0$.
Dann: g ist Verteilungsfunktion von μ. $\square$

Bemerkung 4.1.2. Durch (4.1) ist μ bzw. g eindeutig bestimmt.

Definition 4.1.3. *Sei* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *rechtsstetig und von endlicher Variation und* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *lokal beschränkt und Borel-meßbar. Dann ist das Lebesgue-Stieltjes-Integral*

$$\int_0^t f dg = \int_0^t f(s) dg(s) = \int_0^t f(s) g(ds) \qquad \text{von } f \text{ bzgl. } g$$

definiert durch

$$\int_{]0,t]} f(s)\mu(ds)$$

mit $\mu = \mu^g =$ *signiertes Radon-Maß zu* g.

Bemerkungen 4.1.4. a) Ist $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, so gilt:

$$dg(s) = g'(s)ds,$$

d.h. das Lebesgue-Stieltjes-Integral $\int_0^t f(s)dg(s)$ ist ein gewöhnliches Lebesgue-Integral $\int_0^t f(s)g'(s)ds$ mit der Dichte g'.

b) Sind g und h stetig und von beschränkter Variation, so gilt die Produktregel

$$d(gh)(s) = g(s)dh(s) + h(s)dg(s).$$

Satz 4.1.5. *Sei* g *rechtsstetig und wachsend,* f *linksstetig und lokal beschränkt,* $t \geq 0$. *Dann ist*

$$\int_0^t f dg = \lim_{\|\Delta\| \to 0} I_t^\Delta(f, g)$$

mit $I_t^\Delta(f, g) = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) \cdot (g(t_{k+1}) - g(t_k))$.
Bem.: Hierbei kann man $f(t_k)$ *durch* $f(t_{k+1})$ *ersetzen, falls* f *stetig ist.*

Beweis. Sei $f^\Delta = \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k) \cdot 1_{]t_k, t_{k+1}]}$ und $\sup_{s \in [0,t]} |f(s)| = C < \infty$. Dann gilt für $\|\Delta\| \to 0$: $f^\Delta(s) \to f(s) \quad (\forall s \in]0, t])$ (wegen Linksstetigkeit von f).
Ferner: $|f^\Delta(s)| \leq C \quad (\forall s \in]0, t])$
$\Rightarrow I_t^\Delta(f, g) = \int_{]0,t]} f^\Delta(s)\mu^g(ds) \underset{\|\Delta \to 0\|}{\longrightarrow} \int_{]0,t]} f(s)\mu^g(ds) = \int_0^t f dg.$ □

Wir wollen nun Integrale $\int_0^t X_s dA_s$ definieren mit $A \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{B} := \{X : X \text{ adaptiert, linksstetig, pfadweise lokal beschränkt}\}$.

Definition 4.1.6. *Für* $A \in \mathcal{A}$ *und* $X \in \mathcal{B}$ *heißt die pfadweise definierte ZV*

$$(X \cdot A)_t = \int_0^t X dA = \int_0^t X_s dA_s : \quad \omega \mapsto \int_0^t X_s(\omega) dA_s(\omega)$$

stochastisches Integral von X *bzgl.* A *(auf* $[0, t]$*).* $X =$ *Integrand,* $A =$ *Integrator.*
Der Prozeß $X \cdot A = ((X \cdot A)_t)_{t \geq 0}$ *heißt unbestimmtes stochastisches Integral .*

Satz 4.1.7. *Für $A \in \mathcal{A}$ und $X, Y \in \mathcal{B}$ gilt:*

a) $X \cdot A \in \mathcal{A}_0$.

b) $X \cdot A$ *ist bilinear in* A *und* X.

c) $(X \cdot A)^T = X \cdot A^T$ *für alle Stoppzeiten* T *(Stopp-Formel).*

d) $Y \cdot (X \cdot A) = (YX) \cdot A$ *(Assoziativität)*

Beweis. b), c), d) einfache Übung.

a) Klar: $(X \cdot A)_0 = 0$ und $t \mapsto \int_0^t X_s dA_s$ pfadweise stetig (da A stetig).
Adaptiertheit: $\int_0^t X_x dA_s = \lim_{n\to\infty} I_t^{\Delta_n}(X, A) \in \mathcal{F}_t$ für eine Folge von Partitionen Δ_n mit $\|\Delta_n\| \to 0$.
Endliche Variation:

$$S_t((X \cdot A)(\omega)) \leq \sup_{0\leq s\leq t} |X_s(\omega)| \cdot S_t(A(\omega)) < \infty.$$

□

4.2 Das Itô-Integral für Elementarprozesse

Ziel: Definition von $X \cdot M = \int_0^\bullet X_s dM_s$ für $M \in H^2$ und $X \in \mathcal{E}$.

Definition 4.2.1. $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt Elementarprozeß , kurz* $X \in \mathcal{E}$*, falls:* $\exists (t_i)$, (Z_i), $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots, t_i \nearrow \infty$, Z_i $\mathcal{F}_{t_i}$*-meßbar,* Z_{-1} $\mathcal{F}_0$*-meßbar,* Z_i *gleichmäßig beschränkt, so daß*

$$X = Z_{-1} \cdot 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot 1_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

Definition 4.2.2. *Für* $M \in \mathcal{S}$ *und* $X \in \mathcal{E}$ *definieren wir das stochastische Integral* $X \cdot M = \int_0^\bullet X dM = \int_0^\bullet X_s dM_s$ *pfadweise wie folgt:*

$$\begin{aligned}(X \cdot M)_t &= \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot (M_{t\wedge t_{i+1}} - M_{t\wedge t_i}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} Z_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + Z_n \cdot (M_t - M_{t_n})\end{aligned}$$

für $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Bemerkung 4.2.3. Für $M \in \mathcal{A}$ stimmt das mit der bisherigen Definition (Lebesgue-Stieltjes) überein.

Satz 4.2.4. *Für $M \in H^2$ und $X \in \mathcal{E}$ gilt:*

a) $X \cdot M \in H_0^2$.

b) $\langle X \cdot M \rangle = \int_0^\bullet X_s^2 d\langle M \rangle_s = X^2 \cdot \langle M \rangle$.

c) $\|X \cdot M\|_{H^2}^2 = E\left(\int_0^\infty X_s^2 d\langle M \rangle_s\right)$.

Beweis. a) Offenbar $X \cdot M$ adaptiert, stetig, $(X \cdot M)_0 = 0$. Ferner für $s \in [t_{k-1}, t_k[$, $t \in [t_n, t_{n+1}[$:

$$(X \cdot M)_t = (X \cdot M)_s = \sum_{i=k}^{n-1} Z_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + Z_n(M_t - M_{t_n}) + Z_{k-1}(M_{t_k} - M_s)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E((X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s|\mathcal{F}_s) \\
&= E\left(\sum_{i=k}^{n-1} Z_i \cdot E(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}\right) + Z_n \cdot E(M_t - M_{t_n}|\mathcal{F}_{t_n})|\mathcal{F}_s) \\
&\quad + Z_{k-1} \cdot E(M_{t_k} - M_s|\mathcal{F}_s) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) OBdA $s = t_k, t = t_{n+1}$ (ergänze $\{t_i\}$ um zwei Punkte).

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow E((X \cdot M)_t^2 - (X \cdot M)_s^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E([(X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s]^2|\mathcal{F}_s) + 2 \cdot \underbrace{E((X \cdot M)_s) \cdot [(X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s]|\mathcal{F}_s}_{=0 \text{ nach a)}} \\
&= E([(X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s]^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E([\sum_{i=k}^{n} Z_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})]^2|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\sum_i Z_i^2 \cdot (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2|\mathcal{F}_s) + 2 \cdot E(\sum_{i<j} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\int_s^t X_r^2 d\langle M \rangle_r|\mathcal{F}_s) + 2E(\sum_{i<j} Z_i Z_j (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})\underbrace{E(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}}_{=0}|\mathcal{F}_{t_j})|\mathcal{F}_s) \\
&= E(\int_s^t X_r^2 d\langle M \rangle_r|\mathcal{F}_s).
\end{aligned}$$

c) $\|X \cdot M\|_{H^2}^2 = E\langle X \cdot M \rangle_\infty = E\int_0^\infty X_r^2 d\langle M \rangle_r$. □

Korollar 4.2.5. *Sind $X_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, Elementarprozesse mit*

$$E\int_0^\infty (X_t^n - X_t^k)^2 d\langle M\rangle_r \to 0 \quad \textit{für } n,k \to \infty,$$

so gilt:

$$E(\sup_t[(X^n \cdot M)_t - (X^k \cdot M)_t]^2) \to 0 \quad \textit{für } n,k \to \infty.$$

Beweis. Mit $X^n, X^k \in \mathcal{E}$ ist auch $X^n - X^k \in \mathcal{E}$ und $X^n \cdot M - X^k \cdot M = (X^n - X^k) \cdot M \in H_0^2$. Ferner

$$\begin{aligned} E(\sup_t[(X^n \cdot M)_t - (X^k \cdot M)_t]^2) &= E(\sup_t[(X^n - X^k) \cdot M]_t^2) \\ &\leq 4 \cdot \|(X^n - X^k) \cdot M\|_{H^2} \\ &= 4E\int_0^\infty (X_t^n - X_t^k)^2 d\langle M\rangle_t \to 0. \end{aligned}$$

□

Satz 4.2.6 (Kunita-Watanabe-Identität und -Ungleichung)**.** *Für $M, N \in H^2$ und $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt:*
a) $\langle X \cdot M, Y \cdot N\rangle = \int\limits_0 X_s Y_s d\langle M, N\rangle_s = (XY) \cdot \langle M, N\rangle$
und
b) $|E\langle X \cdot M, Y \cdot N\rangle_\infty| \leq (E\int\limits_0^\infty X_s^2 d\langle M\rangle_s \cdot E\int\limits_0^\infty Y_s^2 d\langle N\rangle_s)^{1/2} \leq \mathbb{E}\int\limits_0^\infty |X_s Y_s||d\langle M, N\rangle_s|.$

Beweis. b) folgt aus a), denn $|\langle M, N\rangle| \leq (\langle M\rangle_t \langle N\rangle_t)^{1/2}$.
a) Im wesentlichen wie Teil b) aus Satz 4.2.4:

$$\begin{aligned} &E((X \cdot M)_t(Y \cdot N)_t - (X \cdot M)_s(Y \cdot N)_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E([(X \cdot M)_t - (X \cdot M)_s] \cdot [(Y \cdot N)_t(Y \cdot N)_s]|\mathcal{F}_s) \\ &= E(\sum_{i=k}^n X_{t_i} Y_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})|\mathcal{F}_s) \\ &= E(\int_s^t X_r Y_r d\langle M, N\rangle_r|\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

$\Rightarrow (X \cdot M)_t(Y \cdot N)_t - \int\limits_0^t X_r Y_r d\langle M, N\rangle_r$ ist Martingal
$\Rightarrow$ Beh.

b) Wir verwenden $|\langle A,B\rangle_\infty| \leq (\langle A\rangle_\infty \cdot \langle B\rangle_\infty)^{1/2}$ für $A,B \in H^2$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |E\langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_\infty| \\
&\quad\leq\quad E((\langle X\cdot M\rangle_\infty \cdot \langle Y\cdot N\rangle_\infty)^{1/2}) \\
&\quad\leq\quad (E\langle X\cdot M\rangle_\infty \cdot E\langle Y\cdot N\rangle_\infty)^{1/2} \\
&\quad=\quad [E((X^2\cdot\langle M\rangle)_\infty)\cdot E((Y^2\cdot\langle N\rangle)_\infty)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

4.3 Das Itô-Integral für vorhersagbare, meßbare Prozesse

Definition 4.3.1. *Die auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ definierte σ-Algebra $\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E})$ heißt vorhersagbare σ-Algebra („predictable σ-field"). Sie ist die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, bezüglich der die Abbildungen $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ meßbar sind für alle $X \in \mathcal{E}$.*
Ein $\mathcal{P}$-meßbarer Prozeß X heißt vorhersagbar.

Proposition 4.3.2.

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathcal{E}) &= \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ adaptiert, } X_0 \text{ linksstetig auf }]0,\infty[\}) \\
&= \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ adaptiert, } X_0 \text{ stetig auf } [0,\infty[\}).
\end{aligned}$$

Beweis. Seien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ obige σ-Algebren. Offenbar $\sigma_3 \subset \sigma_2$. Ferner $\sigma_2 \subset \sigma_1$, da für linksstetiges X:

$$X_t(\omega) \leftarrow X_t^n(\omega) = X_0(\omega)\cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/n}(\omega)\cdot 1_{]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t).$$

Schließlich $\sigma_1 \subset \sigma_3$, denn $\exists f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ mit $|f_n| \leq 1_{]0,1+1/n]}$ und $f_n \to 1_{]0,1]}$ und $\exists g_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ mit $|g_n| \leq 1_{[0,1/n]}$ und $g_n \to 1_{\{0\}}$ und daher

$$\begin{aligned}
X_t &= Z_{-1}\cdot 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i \cdot 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t) \\
&\uparrow \\
X_t^n &= Z_{-1}\cdot g_n(t) + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i\cdot f_n\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right).
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.3. *Jeder vorhersagbare Prozeß ist progressiv meßbar. Mit anderen Worten:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\subset \mathit{Prog} := \sigma(\{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \text{ progressiv meßbar}\}) \\
&\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty.
\end{aligned}$$

Sei nun wieder $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ mit den üblichen Bedingungen und $M \in H^2$ (d.h. M ist stetiges Martingal mit $\|M\|_{H^2}^2 = \sup_t E(M_t^2) < \infty$.)
Wir definieren ein endliches Maß P_M („Doléans-Maß") auf $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty)$ durch

$$P_M(\Gamma) := E \int_0^\infty 1_\Gamma(t,\omega) d\langle M\rangle_t(\omega) \quad (\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty).$$

Ferner sei
$\mathcal{L}^2(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ vorhersagbar, $\|X\|_M < \infty\}$
und
$\mathcal{L}^2_*(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ progressiv meßbar, $\|X\|_M < \infty\}$
sowie eine Pseudo-Norm

$$\|X\|_M = [E(\int_0^\infty X_t^2 d\langle M\rangle_t)]^{1/2} = [\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X^2 dP_M]^{1/2}$$

auf dem Raum der progressiv meßbaren Prozesse $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Schließlich seien $L^2(M)$ und $L^2_*(M)$ die Räume der Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^2(M)$ bzw. $\mathcal{L}^2_*(M)$ bzgl. $\|.\|_M$.

Proposition 4.3.4. *a) $\mathcal{E}$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2(M)$.*

b) $L^2(M)$ und $L^2_*(M)$ sind Hilbert-Räume

c) und als solche isomorph bzw. stimmen im folgenden Sinne überein: Zu jedem Prozeß $X \in \mathcal{L}^2_*(M)$ existiert ein vorhersagbarer Prozeß Z mit $\|X - Z\|_M = 0$.

d) Falls $t \mapsto \langle M\rangle_t$ absolut stetig f.s., so ist ferner $L^2(M) = L^2_{**}(M)$ mit $\mathcal{L}^2_{**}(M) = \{X \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$-meßbar, adaptiert, $\|X\|_M < \infty\}$.

e) Offenbar $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^2(M) \subset \mathcal{L}^2_*(M) \subset \mathcal{L}^2_{**}(M) \subset \mathcal{L}^2_{***}(M) = \{X \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$-meßbar, nicht notwendig adaptiert, $\|X\|_M < \infty\}$.

Beweis. b) $L^2_*(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Prog, P_M)$ und
$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, P_M) \Rightarrow$ Hilbert-Räume.
a) Jeder Prozeß $X \in \mathcal{L}^2(M)$ wird in $\|.\|_M$ approximiert durch $\mathcal{P}$-einfache Prozesse $Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{A_i} \quad (n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{P})$.
Jeder $\mathcal{P}$-einfache Prozeß Y wird in $\|.\|_M$ approximiert durch einfache Prozesse Z
(Monotone Klassen-Argument), denn $\forall A \in \mathcal{P}, \forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \exists A' \in \text{ring}(\mathcal{E}) &= \text{ring } (\{]s,t] \times F : s < t, F \in \mathcal{F}_s\} \cup \{\{0\} \times F : F \in \mathcal{F}_0\}) \\ &= \{\text{endliche disjunkte Vereinigungen von solchen Mengen}\}, \end{aligned}$$

so daß $\|1_A - 1_{A'}\|_M < \varepsilon$.
c) Ohne Beweis (vorläufig). □

Satz 4.3.5. *$\forall X \in L^2(M) : \exists!(X \cdot M) \in H^2$ mit der Eigenschaft: ist $X^n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|X - X^n\|_M \to 0$, so gilt $\|(X \cdot M) - X^n \cdot M\|_{H^2} \to 0$, und daher $X^n \cdot M \to (X \cdot M)$ (gleichmäßig in t) in L^2. Bez: $I = X \cdot M$.*

Die Abbildung $L^2(M) \to H_0^2$, $X \mapsto X \cdot M$, ist eine Isometrie, d.h. $\|X\|_M = \|X \cdot M\|_{H^2}$.

Beweis. Def. von $X \cdot M$: zu $X \in L^2(M)$ existieren $X^n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|X - X^n\|_M \to 0$. Folglich

$$\|X^n \cdot M - X^k \cdot M\|_{H^2} = \|X^n - X^k\|_M \to 0 \text{ für } n, k \to \infty.$$

(Isometrie für $X^n, X^k \in \mathcal{E}$).
Also ist $\{X^n \cdot M\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in H^2
$\Rightarrow \exists! X \cdot M \in H_0^2 : X^n \cdot M \to X \cdot M$ in H^2. Dabei ist $X \cdot M$ unabhängig von der Wahl der Folge $\{X^n\}_n$, denn (wegen Isometrie):

$$\|X^n \cdot M - \tilde{X}^n \cdot M\|_{H^2} = \|X^n - \tilde{X}^n\|_M \to 0.$$

Schließlich

$$\begin{aligned} E(\sup_t[(X^n \cdot M)_t - (X \cdot M)_t]^2) &\leq 4 \cdot \sup_t E([(X^n \cdot M)_t - (X \cdot M)_t]^2) \\ &= 4 \cdot \|X^n - X\|_M \to 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.6 (Kunita-Watanabe-Identität und -Ungleichung)**.** $\forall M, N \in H^2, X \in L^2(M), Y \in L^2(N) :$

a) $\langle X \cdot M \rangle = \int\limits_0 X_s^2 d\langle M \rangle_s = X^2 \cdot \langle M \rangle.$

b) $\langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle = \int\limits_0 X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s = (XY) \cdot \langle M, N \rangle.$

c) $|E\langle X \cdot M, Y \cdot N \rangle_t| \leq E \int\limits_0^t |X_s Y_s||d\langle M, N \rangle|_s \leq (E \int\limits_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \cdot E \int\limits_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s)^{1/2}.$

Beweis. Folgt durch $L^2(M)$-Approximation von X durch $X^n \in \mathcal{E}$, Einzelheiten später. □

Satz 4.3.7. $\forall M \in H^2, X \in L^2(M) : \exists! I \in H_0^2 :$

$$\langle I, N \rangle = X \cdot \langle M, N \rangle \quad (\forall N \in H^2).$$

Nämlich: $I = X \cdot M$.

Beweis. Existenz: obiges Korollar mit $Y \equiv 1$.
Eindeutigkeit: Seien $I, I' \in H_0^2$ mit $\langle I, N \rangle = \langle I', N \rangle \quad (\forall N \in H^2)$
$\Rightarrow \langle I - I' \rangle = 0 \Rightarrow I = I'$. □

Bemerkung 4.3.8. a) Alternative Definition von $X \cdot M$, sogar für $X \in L_{***}(M) = \{X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R} \mid X\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty\text{-meßbar}\ , \|X\|_M < \infty\}$.
Aber Achtung! Hier ist stochastisches Integral $\neq$ Stieltjes-Integral.

Beispiel 4.3.9. $X_t(\omega) = Z(\omega) \quad \forall t \geq 0, Z \in \mathcal{F}_\infty \backslash \mathcal{F}_0$
$\Rightarrow$ Stieltjes-Integral $\int\limits_0^t X_s dM_s = Z(M_t - M_0)$ nicht adaptiert.
Aber: Stochastisches Integral adaptiert ($=$ Stieltjes-Integral $\int \tilde{X} dM$ mit $\tilde{X}_? = Z_?$???).

Bemerkung zur alternativen Definition: $\forall M, N \in H_0^2, \forall X \in L_{***}^2(M)$:

$$\begin{array}{rcl} |E[(X \cdot \langle M, N\rangle_\infty)]| & = & |E[\int\limits_0^\infty X_s d\langle M, N\rangle_s]| \\ & \leq & (E\int\limits_0^\infty X_s^2 d\langle M\rangle_s \cdot E\int\limits_0^\infty d\langle N\rangle_s)^{1/2} \\ & = & \|X\|_M \cdot \|N\|_{H^2} \\ & \Downarrow & \\ N & \mapsto & E[(X \cdot \langle M, N\rangle_\infty)] \quad \text{stetige Linearform} \\ H_0^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \Downarrow & \\ \exists! \quad I & \in & H_0^2 : E[I_\infty N_\infty] = E[(X \cdot \langle M, N\rangle_\infty)] \\ & =: & X \cdot M \end{array} \tag{4.2}$$

Für $M \in H^2 : X \cdot M := X \cdot (M - M_0)$.
Aus (4.2) folgt:
$E(\langle I, N\rangle_\infty) = E((X \cdot \langle M, N\rangle)_\infty) \quad (\forall N \in H_0^2)$
$\Rightarrow$ (ersetze N durch N^T):
$E(\langle I, N\rangle_T) = E((X \cdot \langle M, N\rangle)_T) \quad \forall$ Stoppzeiten $T, \forall N \in H_0^2$
$??\langle I, N\rangle = (X \cdot \langle M, N\rangle)$ ist Martingal ($\Rightarrow = 0$)

$$??\langle I, N\rangle = X \cdot \langle M, N\rangle \quad (\forall N \in H_0^2) \tag{4.3}$$

Bemerkungen 4.3.10. a) Die Assoziativität für Stieltjes-Integrale ist offensichtlich:

$$(f \circ (g \circ h))_t = \int\limits_0^t f_s d(g \circ h)_s = \int\limits_0^t f_s g_s dh_s = ((fg) \circ h)_t$$

(denn $d(g \circ h)_s = g_s dh_s$).

b) Die Assoziativität für Itô-Integrale kann man in symbolischer Kurzschreibweise wie folgt formulieren:

$$d(X \cdot M)_t = X_t dM_t$$

$$\Downarrow$$

$$d(Y \cdot (X \cdot M))_t = Y_t d(X \cdot M)_t = Y_t X_t dM_t$$

c) Durch (4.2) wird $X \cdot M$ definiert $\forall X \in L^2_{***}(M)$. Sei $\tilde{X}$ die Projektion von X auf $L^2(M)$. Dann gilt $X \cdot M = \tilde{X} \cdot M$.

Beispiel 4.3.11. (siehe Beispiel 4.3.9)
$X_t(\omega) = Z(\omega)$,
$\Rightarrow \tilde{X}_t(\omega) = Z_{t-}(\omega)$ mit Z_t Càdlàg-Version von $E(Z|\mathcal{F}_t)$
$\tilde{X}_t$ vorhersagbar, Z_t progressiv meßbar.
$\Rightarrow (X \cdot M)_t = \int\limits_0^t Z dM_s := \int\limits_0^t E(Z|\mathcal{F}_s) dM_s \quad \neq$ Stieltjes-Integral

Proposition 4.3.12. *$X \in L^2(M)$ und $Y \in L^2(X \cdot M) \Rightarrow YX \in L^2(M)$ und $(YX) \cdot M = Y \cdot (X \cdot M)$.*

Korollar 4.3.13. *In obiger Situation: $dP_{X \cdot M} = X^2 dP_M$.*

Beh. Wegen $\langle X \cdot M \rangle = X^2 \cdot \langle M \rangle$ und $Y \in L^2(X \cdot M)$, d.h. $\mathbb{E}(Y^2 \cdot \langle X \cdot M \rangle)_\infty < \infty$, gilt $\mathbb{E}((YX)^2 \cdot \langle M \rangle)_\infty < \infty$, d.h. $YX \in L^2(M)$.
Ferner gilt $\forall N \in H^2$:

$$\begin{aligned}
\langle (YX) \cdot M, N \rangle &= (YX) \cdot \langle M, N \rangle \\
&= Y \cdot (X \cdot \langle M, N \rangle) \quad \text{Assoziativität von Lebesgue-Stieltjes} \\
&= Y \cdot \langle X \cdot M, N \rangle \quad \text{vorheriger Satz} \\
&= \langle Y \cdot (X \cdot M), N \rangle \quad \text{vorheriger Satz}
\end{aligned}$$

Wegen Eindeutigkeit: $(YX) \cdot M = Y \cdot (X \cdot M)$.

Proposition 4.3.14. *$\forall X \in L^2(M), \forall$ Stoppzeiten T:*

$$(X \cdot M)^T = X \cdot M^T = (X 1_{[0,T]}) \cdot M$$

Beweis. Folgt aus voriger Proposition wegen

$$M^T = 1_{[0,T]} \cdot M.$$

□

4.4 Erweiterung durch Lokalisation

Sei nun $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ stetiges lokales Martingal.

Definition 4.4.1. *$\mathcal{L}^2_{loc}(M) = \{X$ meßbar, vorhersagbar mit $\forall t \geq 0 : \int\limits_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \quad P$-f.s.$\}$
und entsprechend $L^2_{loc}(M)$.*

Lemma 4.4.2. *$X \in \mathcal{L}^2_{loc}(M) \Leftrightarrow X$ vorhersagbar und $\exists$ Stoppzeiten $T_n \nearrow \infty$:*

$$E(\int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s) < \infty$$

(d.h. $X1_{[0,T_n]} \in \mathcal{L}^2(M)$ bzw. $X \in \mathcal{L}^2(M^{T_n})$).

Beweis. „$\Rightarrow$" Wähle $T_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s > n\} \nearrow \infty$

$\Rightarrow \int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s \leq n$

$\Rightarrow E(\int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s) \leq n.$

„$\Leftarrow$" $E(\int_0^{T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s) < \infty$

$\Rightarrow P(\int_0^{t\wedge T_n} X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty) = 1 \quad (\forall t, n)$ und $P(T_n > t) \to 1 \quad (n \to \infty)$

$\Rightarrow P(\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty) = 1.$ ☐

Definition 4.4.3. *Für $M \in \mathcal{M}_{loc}$ und $X \in L^2_{loc}(M)$:*

$$X \cdot M := \lim_{n\to\infty} X \cdot M^{T_n} = \text{ stochastisches Integral}$$

Für $V = M + A \in \mathcal{S}$ und $X \in \mathcal{B}$:

$$X \cdot V = X \cdot M + X \cdot A \quad \in \mathcal{S}.$$

Proposition 4.4.4. *$\forall V, W \in \mathcal{S}$, $\forall X, Y \in \mathcal{B}$:*

a) $X \cdot V$ *bilinear in* X, V.

b) $X \cdot V \in \mathcal{M}_{0,loc}$, *falls* $V \in \mathcal{M}_{loc}$
$X \cdot V \in \mathcal{A}_0$, *falls* $V \in \mathcal{A}$.

c) $(XY) \cdot V = X \cdot (Y \cdot V)$.

d) $\langle X \cdot V, Y \cdot W\rangle = XY \cdot \langle V, W\rangle$
($= 0$, *falls* V *oder* $W \in \mathcal{A}$).

e) $(X \cdot V)^T = (X1_{[0,T]}) \cdot V = X \cdot V^T \quad \forall$ *Stoppzeiten* T.

f) *Für fast jedes* $\omega \in \Omega, \forall a, b \in \mathbb{R}$:
$X(\omega) = 0$ *auf* $[a, b]$ *oder* $V(\omega)$ *konstant auf* $[a, b]$
$\Rightarrow (X \cdot V)(\omega)$ *konstant auf* $[a, b]$.

Beweis von f). Klar für $V \in \mathcal{A}$. Sei also $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Aus der Voraussetzung folgt: $X_0(\omega) = 0$ auf $[a,b]$ oder $\langle V\rangle(\omega)$ konstant auf $[a,b]$

$\Rightarrow (X^2 \cdot \langle V\rangle) = (\int_0^\bullet X_s^2 d\langle V\rangle_s)(\omega)$ konstant auf $[a,b]$

$\Rightarrow (X \cdot V)$ konstant auf $[a,b]$. □

Nachtrag des Beweises eines Satzes aus 3.3: Für f.a. $\omega, \forall a < b : \langle M\rangle_0$ konstant auf $[a,b] \Leftrightarrow M_0$ konstant auf $[a,b]$.

Beweis. " $\Leftarrow$ " klar (M_0 konstant $\Rightarrow$ Var. $= 0 \Rightarrow$ Quadratische Variation $= 0$).
" $\Rightarrow$ ": Für $q \in \mathbb{Q}$ betrachte
$N_t = M_{t+q} - M_t \quad (\mathcal{F}_{t+q})_{t\geq 0}$-Martingal
$\langle N\rangle_t = \langle M\rangle_{t+q} - \langle M\rangle_t$.
$T := \inf\{t > 0 : \langle N\rangle_t > 0\}$ ist Stoppzeit, $N^T \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ mit

$$\langle N^T\rangle_t = \langle N\rangle_{t\wedge T} = 0 \quad (\forall t \geq 0)$$

$\Rightarrow N^T$ ist f.s. konstant auf $[0,\infty[$,
$\Rightarrow N$ ist f.s. konstant auf $[0,T]$,
$\Rightarrow M$ ist f.s. konstant auf $[q,q+T] \quad T = T(q)$,
$\Rightarrow M$ ist f.s. konstant auf $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} [q, q+T(q)]$.
Aber: $\langle M\rangle_0$ konstant auf $[a,b] \Rightarrow [a,b] \subset [a,T(a)]$
$\Rightarrow \exists q_i \in \mathbb{Q} : [a,b] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [q_i, T(q_i)]$. □

Nachtrag Kunita-Watanabe-Ungleichung:
$\forall M,N \in H^2$ (bzw. sogar $\in \mathcal{M}_{\text{loc}}$), $\forall X \in L^2(M), Y \in L^2(N)$ (bzw. ≥ 0, oder beschränkt, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}_\infty$-meßbar):

$$\begin{aligned}
\sup_{t<?} \int_0^? X_s Y_s d\langle M,N\rangle_s &\leq (\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s)^{1/2} (\int_0^T Y_s^2 d\langle N\rangle_s)^{1/2} \\
&\leq \int_0^\infty |X_s Y_s| |d\langle M,N\rangle_s| \\
&\leq
\end{aligned}$$

Beweis. Wegen Dichtheit und Monotonie Argument:
X, Y beschränkt, ≥ 0,
$X = X_0 \cdot 1_{\{0\}} + X_{t_1} \cdot 1_{]0,t_1]} + \cdots + X_{t_n} \cdot 1_{]t_{n-1},t_n]}, \quad \mathcal{F}_\infty$-meßbar, beschränkt, $\geq 0, \quad 0 = t_0 < t_1 \leq \cdots \leq t_n = t$
$Y = \ldots$ □

$\langle M,N\rangle_{s,t} := \langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s$
$\Downarrow$

$|\langle M,N\rangle_{s,t}| \le \langle M\rangle_{s,t}^{1/2} \cdot \langle N\rangle_{s,t}^{1/2} \quad (\forall s,t) \quad f.s.$
$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s Y_s |d\langle M,N\rangle_s| &\le \sum_{i=1}^n X_{t_i} Y_{t_i} |\langle M,N\rangle_{t_{i-1},t_i}| \\
&\le \sum X_{t_i} Y_{t_i} \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i}^{1/2} \cdot \langle N\rangle_{t_{i-1},t_i}^{1/2} \\
&\le (\sum X_{t_i} \langle M\rangle_{t_{i-1},t_i})^{1/2} \cdot (\sum Y_{t_i} \langle N\rangle_{t_{i-1},t_i})^{1/2} \\
&= (\int_0^t X_s d\langle M\rangle_s)^{1/2} \cdot (\int_0^t Y_s d\langle N\rangle_s)^{1/2} \\
&\le (\int_0^T X_s d\langle M\rangle_s)^{1/2} \cdot (\int_0^T Y_s d\langle N\rangle_s)^{1/2}
\end{aligned}$$

Beweis. (von c):)

$$\begin{aligned}
E \sup_{t<T} \langle X\cdot M, Y\cdot N\rangle_t &\le E(\sup_{t<T} \langle X\cdot M\rangle_t^{1/2} \cdot \langle Y\cdot N\rangle_t^{1/2}) \\
&\le \left[E \sup_{t<T} \langle X\cdot M\rangle_t \cdot E \sup_{t<T} \langle Y\cdot N\rangle_t \right]^{1/2} \\
&\overset{a)}{=} \left[E \int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s \cdot E \int_0^T Y_s^2 d\langle N\rangle_s \right]^{1/2} \qquad (\forall T \in [0,\infty])
\end{aligned}$$

und

$$E \sup_{t<T} \int_0^t X_s Y_s d\langle M,N\rangle_t \le \left[E \int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s \cdot E \int_0^T Y_s^2 d\langle N\rangle_s \right]^{1/2}$$

□

Beweis. (von b):)
Zunächst $Y \equiv 1 \in \mathcal{E}, X_n \in \mathcal{E}, X_n \to X$ in $L^2(M)$:
$\Rightarrow \langle X^n \cdot M, N\rangle_t \to \langle X\cdot M, N\rangle_t$ glm. int. in L^1
$\Rightarrow$ Teilfolge: ?? $\quad (\forall t)$ f.s.
Ferner:

$$\int_0^t X_s^n d\langle M,N\rangle_s \to \int_0^t X_s d\langle M,N\rangle \text{ glm. int. in } L^1$$

$\Rightarrow$ Teilfolge: ?? $\quad (\forall t)$ f.s.
$\Rightarrow \langle X\cdot M, N\rangle_t = \int_0^t X_s d\langle M,N\rangle \quad (\forall t)$ f.s. □

Schließlich

$$\begin{aligned}\langle Y \cdot N, X \cdot M\rangle_t &= \int_0^t Y_s d\langle N, X \cdot M\rangle_s \\ &= \int_0^t Y_s X_s d\langle N, M\rangle_s\end{aligned}$$

Satz 4.4.5 (Stochastischer Integralkonvergenzsatz)**.** *Seien $V \in \mathcal{S}$ und $X^{(n)}, X \in \mathcal{B}, |X^{(n)}| \leq X \quad (\forall n)$ und $X^{(n)} \to 0$ punktweise (d.h. für jedes t) f.s.*
Dann $X^{(n)} \cdot V \to 0$ gleichmäßig P-stochastisch auf jedem kompakten Intervall $\subset \mathbb{R}_+$.

Beweis. Zu zeigen: $\forall t, \forall \varepsilon$

$$P\left(\sup_{s \leq t}\left|(X^{(n)} \cdot V)_s\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Für $V \in \mathcal{A}$ ist das der Satz von der majorisierten Konvergenz. Sei $V \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ und T Stoppzeit mit $V^T \in H^2, X^T$ beschränkt
$\Rightarrow (X^{(n)})^T \to 0$ in $L^2(V^T)$ (Satz von der majorisierten Konvergenz)
$\Rightarrow (X^{(n)} \cdot V)^T \to 0$ in H^2 (L^2-Isometrie)
$\Rightarrow (X^{(n)} \cdot V)^T \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}_+$ P-stochastisch
$\Rightarrow X^{(n)} \cdot V \to 0$ lokal gleichmäßig P-stochastisch. □

Satz 4.4.6 (Approximation durch Riemann-Summen)**.** *Sei $V \in \mathcal{S}, X \in \mathcal{B}, t > 0$ und Δ^n beliebige Folge von Partitionen von $[0, t]$ mit $\|\Delta^n\| \to 0$. Dann*

$$I_s^{\Delta_n}(X, V) := \sum_{t_i \in \Delta^n} X_{t_i}(V_{s\wedge t_{i+1}} - V_{s\wedge t_i}) \to \int_0^s X_r dV_r$$

gleichmäßig in $s \in [0, t]$ P-stochastisch.

Beweis. Sei oBdA $X_0 = 0$ und zunächst X beschränkt. Wegen Linksstetigkeit von $X \in \mathcal{B}$ ist X punktweise Limes von $X^{\Delta_n} = \sum X_{t_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ (auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$).
Ferner $I_s^{\Delta_n}(X, V) = \int_0^s X_r^{\Delta_n} dV_r$.
Also gilt nach dem stochastischen Integralkonvergenzsatz 4.4.5:

$$I_s^{\Delta_n}(X, V) \to \int_0^s X_r dV_r \text{ gleichmäßig auf } [0, t] \text{ } P\text{-stochastisch.}$$

Für allgemeines X existieren $T_n \nearrow \infty$ mit X^{T_n} beschränkt. □

Bemerkung 4.4.7. Stets $\exists$ Teilfolge $(n_k)_k$ mit

$$I_s^{\Delta_{n_k}}(X,V) \underset{(\text{für } k\to\infty)}{\to} \int\limits_0^s X_r dV_r \text{ gleichmäßig in } s\in[0,t]\ P-\text{f.s.}$$

Satz 4.4.8 (Partielle Integrationsformel)**.** $\forall X,Y\in\mathcal{S}$:

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int\limits_0^t X_s dY_s + \int\limits_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t.$$

Insbesondere

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int\limits_0^t X_s dX_s + \langle X\rangle_t.$$

Beweis. Allgemeiner Fall folgt durch Polarisation aus Spezialfall $X=Y$. Für jede Partition $\Delta=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ von $[0,t]$ gilt (mit $0=t_0<\dots<t_n=t$):

$$\sum_i \left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2 = X_{t_n}^2 - 2\sum_i X_{t_i}\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)$$

Für $\|\Delta\|\to 0$ gilt:

$$\langle X\rangle = X_t^2 - X_0^2 - 2\int\limits_0^t X_s dX_s$$

(nach dem Approximationssatz für stochastische Integrale). $\square$

In differentieller Schreibweise lautet das:

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X,Y\rangle_t \\ \text{bzw.} &= X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t, \end{aligned}$$

falls man definiert: $dX_t dY_t := d\langle X,Y\rangle_t$.
Hierbei gilt $dX_t dX_t = d\langle X\rangle_t$ und $dX_t dY_t = 0$, falls X oder $Y\in\mathcal{A}$.
Folglich: $\forall X,Y,Z\in\mathcal{S}:\quad (dX_t dY_t)dZ_t = dX_t(dY_t dZ_t) = 0$, denn $\overline{dX_t dY_t} = d\langle X,Y\rangle_t = 0$ wegen $\langle X,Y\rangle\in\mathcal{A}$.

Beispiel 4.4.9. $X=B=$ Brownsche Bewegung.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\qquad & B_t^2 = B_0^2 + 2\int\limits_0^t B_s dB_s + t \\ \text{bzw.}\qquad & dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt. \end{aligned}$$

Hier gelten folgende fundamentalen Regeln:

$$\begin{aligned} (dB_t)^2 &= dt \qquad (\text{„}dB_t = \sqrt{dt}\text{”}) \\ dB_t dt &= dt dB_t = 0 \\ (dt)^2 &= 0. \end{aligned}$$

4.5 Itô-Differentiale

Itô-Differentiale sind als Abbildungen $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2; a < b\} \to \mathbb{R}^\Omega$ zu interpretieren:

$$\begin{array}{cc} dV_t: & [a,b] \to \int\limits_a^b dV_t = V_b - V_a \\ X_t dV_t: & [a,b] \to \int\limits_a^b X_t dV_t \\ \| & \| \\ d(X\cdot V)_t & (X\cdot V)_b - (X\cdot V)_a \end{array}$$

Assoziativität: $d(Y\cdot(X\cdot V)) = Y_t d(X\cdot V)_t = Y_t X_t dV_t$.
Definiere ferner: $dV_t dW_t := d\langle V, W\rangle_t, \quad (dV_t)^2 = dV_t dV_t = d\langle V\rangle_t$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(X\cdot V)_t d(Y\cdot W)_t &= X_t Y_t dV_t dW_t \quad \text{(Kunita-Watanabe-Identität)} \\ (d(X\cdot V)_t)^2 &= X_t^2 (dV_t)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 4.5.1. $X_t = B_t^2$. Gesucht: $\langle X\rangle_t$.

$$\begin{aligned} d\langle X\rangle_t &= (dX_t)^2 = (dB_t^2)^2 = (2B_t dB_t + dt)^2 \\ &= 4B_t^2 (dB_t)^2 + 4B_t dB_t dt + (dt)^2 \\ &= 4B_t^2 dt \\ \Rightarrow \langle X\rangle_t &= 4\int\limits_0^t B_s^2 ds. \end{aligned}$$

Beispiel 4.5.2.

$$\begin{aligned} d(XYZ)_t &= XYdZ_t + ZXdY_t + YZdX_t \\ &+ XdY_t dZ_t + ZdX_t dY_t + YdZ_t dX_t \\ &+ dX_t dY_t dZ_t + dZ_t dX_t dY_t + dY_t dZ_t dX_t \end{aligned}$$

$d(f(X))_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 + \frac{1}{3}f'''(X_t)(dX_t)^3 + \ldots$
(Taylor-Formel $\rightsquigarrow$ Itô-Formel).

Bemerkung 4.5.3. Für $M \in \mathcal{M}_{\text{loc}} : M^2 - M_0^2 - \langle M\rangle \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$ (per def. von $\langle M\rangle$).

Nach der partiellen Integrationsformel: $\quad = 2\int\limits_0^t M_s dM_s$.

Kapitel 5

Itô-Formel und Anwendungen

5.1 Die Itô-Formel

Satz 5.1.1 (Itô-Formel)**.** *Sei $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $X = (X^1, \ldots, X^d)$ mit $X^1, \ldots, X^d \in \mathcal{S}$. Dann ist $F(X) \in \mathcal{S}$ mit*

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 F(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

Beweis. a) Gilt die Behauptung für ein $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, so gilt diese auch für G mit $G(x) = \sum\limits_{k=1}^d \alpha_k x_k \cdot F(x)$.

Denn nach partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned}
G(X_t) - G(X_0) &= \sum \alpha_k X_t^k F(X_t) - \sum \alpha_k X_0^k F(X_0) \\
&= \int_0^t \sum \alpha_k X_s^k dF(X_s) + \int_0^t \sum \alpha_k F(X_s) dX_s^k + \sum \alpha_k \langle X^k, F(X)\rangle_s \\
&= \int \sum_{k,i} \alpha_k X_s^k \frac{\partial F(X_s)}{\partial x_i} dX_s^i + \int \frac{1}{2} \sum_{k,i,j} \alpha_k X_s^k \frac{\partial F(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j\rangle_s \\
&+ \int \sum_k \alpha_k F(X_s) dX_s^k + \int \sum_{k,i} \alpha_k \frac{\partial F}{\partial x_i} d\langle X^k, X^i\rangle_s \\
&= \int \sum_i \frac{\partial G(X_s)}{\partial x_i} dX_s^i + \int \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 G(X_s)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X^i, X^j\rangle_s
\end{aligned}$$

denn $\frac{\partial G}{\partial x_i} = \sum \alpha_k x_k \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha_i F$,
$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = \sum \alpha_k x_k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \alpha_j \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} + \alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_j}$.
b) Die Behauptung gilt also für alle Polynome auf $\mathbb{R}^d$ (vollständige Induktion).
c) Die Behauptung gilt $\forall F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger.
Denn: $\exists$ Polynome F_n mit $F_n \to F$ pktw.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} F_n &\to \frac{\partial}{\partial x_i} F \\
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F_n &\to \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F
\end{aligned}$$

(z.B. Taylor-Entwicklung von F, Weierstrass'scher Approximationssatz)
Damit folgt die Behauptung mit Konvergenzsätzen für gewöhnliche und stochastische Integrale.
d) Die Behauptung gilt $\forall F \in \mathcal{C}^2$.
Denn: Wähle K_n kompakt, $K_n \nearrow \mathbb{R}^d$ und

$$T_n := \inf\{t > 0 : X_t \notin K_n\} \Rightarrow T_n \nearrow \infty.$$

Wähle F_n mit $F_n = F$ auf K_n, also hat F_n kompakten Träger
$\Rightarrow F_n(X_t) = F_n(X_0) + \dots$
$\Rightarrow F(X_t) = F(X_0) + \dots$ auf $\{t < T_n\}$
$\Rightarrow F(X_t) = F(X_0) + \dots$ auf Ω. □

Bemerkungen 5.1.2. 1) Für $X = (M^1, \dots, M^k, A^1, \dots, A^l), M^i \in \mathcal{M}^{\text{loc}}, A^j \in \mathcal{A}$ und $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$ gilt:

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_t) dM_t^i + \sum_{j=1}^l \frac{\partial F}{\partial x_{k+j}}(X_t) dA_t^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} d\langle M^i, M^j\rangle_t.$$

2) Für $X = X_0 + M + A, M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}, A \in \mathcal{A}_0$ und $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist $F(X) = F(X_0) + N + B \in \mathcal{S}$ mit

$$N_t = \int_0^t F'(X_s)dM_s \in M_0^{\text{loc}}$$

$$B_t = \int_0^t F'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)d\langle M\rangle_s \in \mathcal{A}_0.$$

Itô-Formel in Differentialform:
$d = 1$:

$$dF(X_t) = F'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}F''(X_t)(dX_t)^2$$

allgemein:

$$dF(X_t) = \sum \partial_i F(X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum \partial_{ij}F(X_t)dX_t^i dX_t^j$$

$d = 1$ und $X = BB$:

$$dF(B_t) = F'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}F''(X_t)dt.$$

Korollar 5.1.3. *Sei $X \in \mathcal{C}^d, F \in \mathcal{C}^2$. Dann gilt:*

$$\langle F(X)\rangle_t = \sum_{i,j}\int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)(X_s)d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

$(dF(X_t))^2 = (\ldots dX_t^i + \ldots dX_t^i dX_t^j)^2 = \ldots$

Korollar 5.1.4. *Sei B d-dimensionale BB, $F \in \mathcal{C}^2$. Dann gilt*
a) $\langle F(B)\rangle_t = \int_0^t |\nabla F|^2(B_s)ds.$
b) $\mathbb{E}_m(\langle F(B)\rangle_t) = t\cdot\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla F|^2(x)dx =: t\cdot\mathcal{E}(F) = t\|\nabla F\|_2^2.$

Beweis. a) $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij}\cdot t$, denn B^i und B^j sind unabhängig ($\forall i \neq j$).

$$\begin{aligned}
E(B_t^iB_t^j - B_s^iB_s^j|\mathcal{F}_s) &= E(B_t^i(B_t^j - B_s^j)|\mathcal{F}_s) + E((B_t^i - B_s^i)B_s^j|\mathcal{F}_s)\\
&= E(B_t^i|\mathcal{F}_s)\cdot E(B_t^j - B_s^j|\mathcal{F}_s) + \ldots\\
&= 0 + 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow B^iB^j - B_0^iB_0^j$ Martingale
$\Rightarrow \langle B^i, B^j\rangle = 0.$

b)

$$\begin{aligned}\int \mathbb{E}_x \left(\int_0^t |\nabla F|^2(B_s)ds \right) dx &= \int_0^t \int \mathbb{E}_x \left(|\nabla F|^2(X_s) \right) dxds \\ &= \int_0^t \int \int |\nabla F|^2(y) p_s(x,y) dydxds\end{aligned}$$

□

Wiederholung: Itô-Formel für d-dim BB:
$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds$ und
$f(t,B_t) = f(0,B_0) + \int_0^t \nabla f(s,B_s)dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(s,B_s)ds.$

Bemerkung 5.1.5.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_*^{\text{loc}} &= \left\{ X \text{ adaptiert }, X - X_0 \in M_0^{\text{loc}} \right\} \supset \mathcal{M}^{\text{loc}} \\ &= \{X_0\ \mathcal{F}_0\text{-meßbar}\} \oplus \mathcal{M}_0^{\text{loc}}.\end{aligned}$$

Proposition 5.1.6. *a) Sei B d-dimensionale BB, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$*

$$Af = \frac{1}{2}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dann ist

$$M_t = f(t,B_t) - f(0,B_0) - \int_0^t Af(s,B_s)ds \in \mathcal{M}_*^{loc}$$

Insbesondere: $(f(t,B_t))_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls $Af = 0$ auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.
b) Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, dann gilt

$$M_t = f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds \in \mathcal{M}_*^{loc}. \tag{5.1}$$

Insbesondere $f(B) - f(B_0) \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls f harmonisch auf $\mathbb{R}^d$.
c) $f(B^T) - f(B_0) \in \mathcal{M}_*^{loc}$, falls f harmonisch auf $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $T = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$.

Beweis. a) und b) Itô-Formel und $\langle B^i, B^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$.
c) Stoppen von (5.1) bei T. Wichtig: $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ oder zumindest $f \in \mathcal{C}^2(D^i)$ mit $D^i \supset \overline{D}$. □

Bemerkung 5.1.7. Bei a) gilt: $\langle M\rangle_t = \int_0^t |\nabla f(s,B_s)|^2 ds.$

Proposition 5.1.8. *Sei B eine d-dimensionale BB, $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$ eine Matrix mit stetigen Koeffizienten $x \mapsto \sigma_{ij}(x)$ und X ein stetiger, adaptierter d-dimensionaler Prozeß mit*

$$X_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)dB_s^j + X_0^i. \tag{5.2}$$

Dann ist X^i ein lokales Martingal und außerdem ist $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

$$M_t^f = f(t,X_t) - f(0,X_0) - \int_0^t Af(s,X_s)ds$$

ein lokales Martingal, wobei

$$Af(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{5.3}$$

mit $a_{ij}(x) = (\sigma(x)\sigma^T(x))_{ij} = \sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(x)\cdot\sigma_{jk}(x)$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\langle X^i, X^j\rangle_t &= \sum_{k,l}\langle \sigma_{ik}(x)\cdot B^k, \sigma_{jl}(x)\cdot B^l\rangle_t \\
&= \sum_{k,l}\int_0^t \big(\sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jl}(X_s)d\langle B^k, B^l\rangle_s\big) \\
&= \sum_k \int_0^t \sigma_{ik}(X_s)\sigma_{jk}(X_s)ds \\
&= \int_0^t a_{ij}(X_s)ds
\end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} f(t,X_t) &= f(0,X_0) + \int_0^t \nabla f(s,X_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)d\langle X^i,X^j\rangle_s \\ &= f(0,X_0) + \text{ lokales Martingal } + \int_0^t Af(s,X_s)ds. \end{aligned}$$

□

Anwendungen

Satz 5.1.9 (L^2-Liouville-Theorem)**.** *Sei $f \in L^2$ harmonisch auf $\mathbb{R}^d \Rightarrow f \equiv 0$.*

Beweis. f harmonisch $\Rightarrow f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \nabla f(X_s)dX_s$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_m\left[(f(X_t)-f(X_0))^2\right] &= \mathbb{E}_m\left[(\int_0^t \nabla f(X_s)dX_s)^2\right] \\ &= \mathbb{E}_m\left[\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)ds\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_m\left[(f(X_t)-f(X_0))^2\right] &\leq 2\mathbb{E}_m\left[f^2(X_t)+f^2(X_0)\right] \\ &= 2\int\int\left[f^2(y)+f^2(x)\right]p_t(x,y)dydx. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \infty > 4\cdot\|f\|^2 &= 2\mathbb{E}_m\left[f^2(X_t)+f^2(X_0)\right] \geq \dots \geq \mathbb{E}_m\left[\int_0^t |\nabla f|^2(X_s)ds\right] \\ &= t\cdot\|\nabla f\|_2^2 \quad (\forall t > 0) \end{aligned}$$

Also ist $\|\nabla f\| = 0$ und damit f const, also$f \equiv 0$. □

5.2 Exponentielle Martingale

Proposition 5.2.1. *Sei $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{(\partial x)^2} = 0$ und $M \in \mathcal{M}^*_{loc}$. Dann ist $N_t := F(\langle M\rangle_t, M_t) \in \mathcal{M}^*_{loc}$.*

Beweis. $dN_t = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dM_t + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t} \cdot d\langle M\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} d\langle M\rangle_t}_{=0 \text{ nach Vor.}}.$ □

Korollar 5.2.2. *$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall M \in \mathcal{M}^*_{loc}$ ist $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M}^*_{loc} + i\mathcal{M}^*_{loc}$ mit $\mathcal{E}_\lambda(M)_t = \exp(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle M\rangle_t)$. $\mathcal{E}_\lambda(M)$ heißt " exponentielles lokales Martingal". (Hierbei bedeutet $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M}^*_{loc} + i\mathcal{M}^*_{loc}$: Re $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M}^*_{loc}$ und Im $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M}^*_{loc}$.)*

Beweis. $F(t,x) = \exp(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t)$ löst $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) F = 0.$ □

Beispiel 5.2.3. Für $\lambda = i = \sqrt{-1}$ gilt: $\forall M \in \mathcal{M}^*_{\text{loc}}$ ist $\cos(M_t) \cdot e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t} \in \mathcal{M}^*_{\text{loc}}$ und $\sin(M_t) \cdot e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_t} \in \mathcal{M}^*_{\text{loc}}$.

Frage: Ist $\mathcal{E}_\lambda(M)$ ein richtiges, also nicht nur lolales Martingal?
Antwort: i.A. NEIN!

Proposition 5.2.4. *Es gilt $\mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$ unter jeder der folgenden Voraussetzungen:*

(i) M beschränkt, $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\lambda \in i\mathbb{R}, \langle M\rangle$ beschränkt.

(iii) $M_0 = 0$ und $E[\mathcal{E}_\lambda(M)_t] = 1$ $\forall t$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Beweis. (i) M beschränkt und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)$ ist beschränkt und ein lokales Martingal $\Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)$ ist ein Martingal (gleichgradig integrierbar).

(ii) analog.

(iii) $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M) \in \mathbb{R}_+$ und lokales Martingal $\Rightarrow \mathcal{E}_\lambda(M)$ ist Supermartingal $\Rightarrow (\mathcal{E}_\lambda(M)$ ist Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathcal{E}_\lambda(M)) = 1)$.

□

Beispiel 5.2.5. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und M eine 1-dimensionale BB. Dann ist $X = \mathcal{E}_\lambda(M)$ geometrische BB, $X_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$ und X_t löst

$$dX_t = \lambda X_t dB_t.$$

5.3 Lévy's Charakterisierung der BB

Satz 5.3.1 (P.Lévy)**.** *Gegeben sei X stetig, $\mathbb{R}^d$-wertig und $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptiert mit $X_0 = 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X ist BB (bzgl. $(\mathcal{F}_t)$).

(ii) $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ und $\langle X^k, X^j\rangle = \delta_{kj}t \quad (\forall k,j = 1,\ldots,d)$.

(iii) $X \in \mathcal{M}^0_{loc}$ *und* $\forall f = (f_1, \dots, f_d)$ *mit* $f_k \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$*:*

$$\mathcal{E}_t := \exp\left(i \sum_k \int_0^t f_k(s) dX^k_s + \frac{1}{2} \sum_k \int_0^t f^2_k(s) ds \right) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M} = \mathbb{C} \cdot \mathcal{M}$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) siehe vorherigen Beweis.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}^i(f \cdot X) \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $z \in \mathbb{R}^d, r > 0$ und $f = z \cdot 1_{[0,r[}$
$\Rightarrow \mathcal{E}_t = \exp\left[i(z, X_{t\wedge r}) + \frac{1}{2}\|z\|^2(t \wedge r)\right] \in \mathcal{M} + i\mathcal{M}$
$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s$ und $s < t < r$:

$$E\left(1_A \exp\left[i(z, X_t - X_s)\right]\right) = P(A) \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)\right]$$

$\Rightarrow X_t - X_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und Gauß-verteilt nach ν_{t-s}
$\Rightarrow E\left(\exp\left[i(z, X_t - X_s)\right] | \mathcal{F}_s\right) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|z\|^2(t-s)\right] = E\left(\exp\left[i(z, X_t - X_s)\right]\right)$ □

Wichtig hierbei: X stetig!
Ansonsten sind die Voraussetzung auch erfüllt für $X_t = N_t - t$ mit N Poisson-Prozeß.

Korollar 5.3.2. *Sei* $X \in \mathcal{M}^*_{loc}$ *mit* $\langle X \rangle_t = t$*. Dann ist* X *eine BB.*

Korollar 5.3.3. *Sei* $X \in \mathcal{M}^*_{loc}$ *mit* $t \mapsto X^2_t - t \in \mathcal{M}^*_{loc}$*. Dann ist* X *eine BB.*

Beispiel 5.3.4 (Brownsche Brücke)**.** Sei B eine BB mit $B_0 = 0$. Definiere
$X_t = (1-t)B_{t/1-t}$ Brownsche Brücke für $t \in [0, 1[$
und $V_t = X_t + \int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds, \quad t \in [0, 1[$
Dann ist $X \in \mathcal{S}$ mit $\langle X \rangle_t = t$.
Denn sei $B'_t = B_{t/1-t} \Rightarrow B'$ Martingal bzgl. $\mathcal{F}_t{}' = \mathcal{F}_{t/1-t}$ und $\langle B' \rangle_t = \frac{t}{1-t}$
$X_t = (1-t)B'_t = -\int_0^t B'_s ds + \int_0^t (1-s) dB'_s$
$\langle X \rangle_t = \int_0^t (1-s)^2 d(\frac{s}{1-s}) = \dots = t.$
Aber X ist nicht die BB! X ist kein Martingal.
Schließlich

$$V_t = X_t + \int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds = (1-t)B'_t + \int_0^t B'_s ds = \int_0^t (1-s) dB'_s \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$$

Ferner gilt $\langle V \rangle_t = \langle X \rangle_t = t$.
Also ist $(V_t)_{t\in[0,1[}$ eine 1-dimensionale BB bzgl. $(\mathcal{F}_t{}') = \mathcal{F}_{t/1-t}$. Aber $V_t \neq B_t$.

Beispiel 5.3.5 (Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß)**.** Sei $Y_t = e^{-\lambda t} B_{e^{2\lambda t}}$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y \in \mathcal{S}$ mit $\langle Y \rangle_t = t$.
Definiere $W_t = Y_t - Y_0 + \lambda \int Y_s ds$. Es gilt $W \in \mathcal{M}$ und $\langle W \rangle_t = t$. Also ist $(W_t)_{t \geq 0}$ eine BB bzgl. $(\mathcal{F}_{e^{2\lambda t}})_{t \geq 0}$. Aber $W_t \neq B_t$.

5.4 Bessel-Prozesse

Sei $(\mathbb{P}^x, B_t)_{x \in \mathbb{R}^N}$ eine N-dimensionale BB auf $\mathbb{R}^N$ und $R_t = \|B_t\|$ sowie $Q_t = R_t^2 = \sum\limits_{i=1}^N {B_t^{(i)}}^2$.

Vorbemerkung: a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x\| = \|y\|$ gilt: $\mathbb{P}^x(R_t \in .) = \mathbb{P}^y(R_t \in .)$ denn sei $y \in Qx$ mit Q orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^N$
$\Rightarrow \mathbb{P}^x(R_0 \in .) = \mathbb{P}^x(\|B_0\| \in .) = \mathbb{P}^{Qx}(\|QB_0\| \in .) = \mathbb{P}^y(R_0 \in .)$.
Daher: $\forall r \geq 0 : \exists$ W-Maß $\hat{\mathbb{P}}^r$ mit $\hat{\mathbb{P}}^r(R_0 \in .) = \mathbb{P}^x(R_0 \in .)$ $\quad (\forall x$ mit $\|x\| = r)$.
$(\hat{\mathbb{P}}^r, R_t)_{r \geq 0}$ heißt N-dim Bessel Prozeß auf $[0, \infty[= \mathbb{R}_+$
$(\hat{\mathbb{P}}^r, Q_t)$ heißt N-dim Bessel-Quadrat-Prozeß.
b) Nach Itô-Formel ist Q ein Semimartingal mit

$$\begin{aligned} dQ_t &= 2 \sum_{i=1}^N B_t^{(i)} dB_t^{(i)} + N dt \\ &= 2 B_t dB_t + N dt \end{aligned}$$

Satz 5.4.1. *Sei B N-dim BB, startend in $x \in \mathbb{R}^N, N \geq 2$, und $R = \|B\|$ N-dim Bessel-Prozeß, startend in $r = \|x\| \geq 0$.*

a) Dann ist $X = \sum\limits_{i=1}^N X^{(i)}$ mit $X_t^{(i)} = \int\limits_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s} dB_s^{(i)}$ eine stand. 1-dim BB.

b) Der Bessel-Prozeß erfüllt die SDG

$$dR_t = \frac{N-1}{2R_t} dt + dX_t$$

(i.S.v. $R_t = R_0 + \int\limits_0^t \frac{N-1}{2R_s} ds + X_t$).

Beweis. Wegen

$$\lambda^1 \left(\{ s \in [0,t] : R_s = 0 \} \right) \leq \lambda^1 \left(\{ s \in [0,t] : B_s^{(i)} = 0 \} \right) = 0$$

ist $X_t^{(i)}$ wohldefiniert und ebenso die SDG.
a) Es gilt: $\left| \frac{B_s^{(i)}}{R_s} \right| \leq 1 \Rightarrow X_t^{(i)} \in \mathcal{M}$

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t = \int\limits_0^t \frac{1}{R_s^2} B_s^{(i)} B_s^{(j)} \delta_{ij} ds = \delta_{ij} \cdot \frac{{B^{(i)}}^2(s)}{R^2(s)} t$$

$\Rightarrow \langle X\rangle_t = \sum_{i,j} \langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = t$
$\Rightarrow X =$ 1-dim BB, $X_0 = 0$.
b) Sei $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, F(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ und $\forall k \in \mathbb{N}$:
$F_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, F_k \in \mathcal{C}^\infty$, $F_k = F$ auf $\{x : \|x\| \geq 1/k\}$.
Sei $T_{k,l} = \inf\{t \geq \frac{1}{l} : \|B_t\| < 1/k\}$. Dann folgt für $k \to \infty$
$T_{k,l} \to T_l = \{t \geq \frac{1}{l} : \|B_t\| = 0\} = +\infty$ (wegen $N \geq 2$!) f.s.
Nach der Itô-Formel gilt auf $\{(t, w) : T_k(w) \geq t > \frac{1}{l}\}$:

$$\begin{aligned} F(B_t) &= F(B_{1/l}) + \int_{1/l}^{t} \sum_{i=1}^{N} \frac{B_s^{(i)}}{\|B_s\|} dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_{1/l}^{t} \sum^{N} \frac{1}{\|B_s\|} ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{1/l}^{t} \sum_{i,j} \frac{B_s^{(i)} B_s^{(j)}}{\|B_s\|^3} d\langle B^{(i)}, B^{(j)}\rangle_s \\ &= F(B_{1/l}) + X_t - X_{1/l} + \frac{1}{2} \int_{1/l}^{t} \frac{N-1}{R_s} ds, \end{aligned}$$

denn $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\delta_{ij}}{\|x\|} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^3} \quad (\forall i, j = 1, \ldots, N)$
$\Rightarrow F(B_t) = F(B_{1/l}) + X_t - X_{1/l} + \frac{1}{2} \int_{1/l}^{t} \frac{N-1}{R_s} ds$ auf $\bigcup_{k,l} \{T_k \geq t > \frac{1}{l}\} =]\frac{1}{l}, \infty[\times \Omega$.
$\Rightarrow$ Stetigkeit von $F(B_0)$ und X_0.
$F(B_t) = F(B_0) + X_t - X_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{N-1}{R_s} ds$ auf $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ f.s. $\square$

Proposition 5.4.2. *a)* $N = 1, \alpha \geq 0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = 1$

b) $N \geq 2 : \mathbb{P}^x(\|B_t\| = 0, \exists t > 0) = 0$

c) $N = 2, \alpha > 0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = 1$
$N \geq 3, \alpha > 0$: $\mathbb{P}^x(\|B_t\| = \alpha, \exists t > 0) = \left(\frac{\alpha}{|x|} \wedge 1\right)^{N-2}$

d) $N \geq 3$: $\mathbb{P}^x(\lim_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty) = 1$

Bemerkungen 5.4.3. ad c) LHS=$\mathbb{P}^x(\inf_{t>0} \|B_t\| \leq \alpha)$.
Stets gilt $\mathbb{P}^x(\sup_{t>0} \|B_t\| \geq \alpha) = 1$ ($\forall \alpha \geq 0, \forall N \geq 1$) und
$\mathbb{P}^x(\limsup_{t\to\infty} \|B_t\| = \infty) = 1$ (Satz vom iterierten Logarithmus)
d') Für $N \leq 2$ gilt:

$$\mathbb{P}^x(\liminf_{t\to\infty} \|B_t\| = 0) = 1.$$

Beweis. von d) und d'): Sei $\alpha > 0, S_0 = T_0 = 0$
$S_k = \inf\{t > T_{k-1} : \|B_t\| \leq \alpha\}$
$T_k = \inf\{t > S_k : \|B_t\| \geq k\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}^x(T_k < \infty) = \mathbb{P}^x(S_k < \infty)$ (iterierter Logarithmus z.B.)
$\mathbb{P}^x(S_{k+1} < \infty) = \mathbb{P}^x(T_k < \infty) \cdot \left(\frac{\alpha}{k} \wedge 1\right)^{N-2}$.
Im Fall $N = 2$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^x(S_k < \infty) = 1 \quad (\forall k) \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(S_k < \infty, \forall k) = 1 \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(\liminf_{t\to\infty} \|B_t\| \le \alpha) = 1 \quad (\forall \alpha > 0) \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(\liminf \|B_t\| = 0) = 1
\end{aligned}$$

Im Fall $N \geq 3$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^x(S_k < \infty) \le \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{i}\right)^{N-2} \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(S_k < \infty, \forall k) = 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(\liminf \|B_t\| \le \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha > 0) \\
\Rightarrow\ & \mathbb{P}^x(\liminf \|B_t\| = \infty) = 1
\end{aligned}$$

□

Also: Die BB in $\mathbb{R}^N$ ist

- transient, falls $N \geq 3$
- rekurrent, falls $N \leq 2$
  (sogar "punkt-rekurrent", falls $N = 1$).

Punkte des R^N sind polar für die BB $\Leftrightarrow N \geq 2$.

Kapitel 6

Brownsche Martingale

6.1 Zeitwechsel

Satz 6.1.1. *Sei* (τ_t) *ein beliebiger Zeitwechsel. Ferner sei* $X \in H^2$ *und* X τ_t*-stetig. Dann ist* $\hat{X}_t = X_{\tau_t} \in H^2$ *(bzgl.* $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{\tau_t}$*) und* $\langle \hat{X} \rangle_t = \widehat{\langle X \rangle}_t - \langle X \rangle_{\tau_0}$.

Satz 6.1.2. *Sei* (τ_t) *ein endlicher Zeitwechsel,* $X \in \mathcal{M}_{loc}$ *und* X τ_t*-stetig. Dann ist* $\hat{X} \in \mathcal{M}_{loc}$.

Satz 6.1.3. *Sei* (τ_t) *ein endlicher Zeitwechsel,* $X \in \mathcal{S}, F \in B$ *und* F τ_t*-stetig. Dann ist* $\hat{F} \cdot \hat{X} = \widehat{F \cdot X} - (F \cdot X)_{\tau_0}$.

6.2 Lokale Martingale und zeittransformierte BBen

Satz 6.2.1. *Sei* (X_t) *eine d-dimensionale BB bzgl.* $(\mathcal{F}_t)$ *und* τ *eine endliche Stoppzeit. Dann ist* $B_t = X_{\tau+t} - X_\tau$ *eine BB bzgl.* $(\mathcal{F}_{\tau+t})$.

Satz 6.2.2 (Dubins-Schwarz)**.** *Sei* $X \in \mathcal{M}_{loc}$ *mit* $X_0 = 0$ *und* $\langle X \rangle_\infty = \infty$ *f.s. und sei* $\tau_t = \inf\{s \geq 0 \ : \ \langle X \rangle_s > t\}$*, dann ist* $B_t = X_{\tau_t}$ *eine BB bezgl.* $(\mathcal{F}_{\tau+t})$ *und* $X_t = B_{\langle X \rangle_t}$.

Satz 6.2.3. *Sei* X *eine durch* τ *gestoppte BB auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ *(d.h.* $X \in \mathcal{M}_{loc}, X_0 = 0$ *und* $\langle X \rangle_t = t \wedge \tau$*), dann existiert eine BB* $\tilde{X}$ *auf einer geeigneten Erweiterung* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}_t})$ *von* $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ *mit* $\tilde{X}^\tau = (X \circ \pi)$*, wobei* $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ *Projektion ist.*

6.3 Darstellung als stochastische Integrale

Gegeben (und im folgenden fix): $B = (B_t)_{t \geq 0}$ 1-dimensionale stand. BB mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Definition 6.3.1. *(i)* (B_t) *heißt* $(\mathcal{F}_t)$*-BB, falls* B *eine an* $(\mathcal{F}_t)$ *adaptierte BB ist und* $\forall t \geq 0$ *der Prozeß* $X = (X_s)_{s\geq 0}$ *mit* $X_s = B_{t+s} - B_t$ *unabhängig von* $\mathcal{F}_t$ *ist.*

(ii) $(\mathcal{F}_t)$ *heißt Brownsche Filtrierung , falls es die kleinste Filtrierung ist, die die üblichen Bedingungen erfüllt, und bzgl. der* B *meßbar ist.*
Also $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}^0_{t+}}$ *mit* ${\mathcal{F}_t}^0 = \sigma(B_s : s \leq t)$*.*

Es sei nun J die Menge der deterministischen Elementarprozesse $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Form $f = \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j \cdot 1_{]t_{j-1},t_j]}$.
$\mathcal{E}^{f\cdot B}$ bezeichne das exponentielle Martingal zu
$F_t = f \cdot B_t = \sum\limits_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j\wedge t} - B_{t_{j-1}\wedge t})$. Also insbesondere

$$\mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty = \exp\left(F_\infty - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right) = \text{ const} \cdot \exp(F_\infty).$$

Lemma 6.3.2. *Sei* $(\mathcal{F}_t)_t$ *Brownsche Filtration. Die Menge* $\{\mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty : f \in J\}$ *ist total in* $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$*, d.h.* $\overline{\text{lin}}\{\mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty : f \in J\} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$*.*

Beweis. Annahme: Die Behauptung gilt nicht.
(i) Wir fixieren ein $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ mit Y orthogonal zu jedem $\mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty$ für $f \in J$.
Wir wollen zeigen: $Y \cdot P$ ist Null-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.
Dazu genügt es zu zeigen:
$Y \cdot P$ ist Null-Maß auf $(\Omega, \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}))$ für jede endliche Folge $(t_1, \dots, t_n)$.
Fixiere eine solche Folge mit $t_0 = 0$.
(ii) Die Funktion $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
$\varphi(z_1, \dots, z_n) = E\left(\exp\left(\sum\limits_{j=1}^n z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) \cdot Y\right)$ ist homomorph.
Denn:

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, \dots, z_n) &= E\Big(\exp(\sum z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})) \cdot E(Y|B_{t_1}, \dots, B_{t_n})\Big) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{j=1}^n z_j(x_j - x_{j-1})\right) \cdot g(x_1, \dots, x_n)\mu(dx_1, \dots, dx_n) \end{aligned}$$

mit $\mu = P_{(B_{t_1},\dots,B_{t_n})}$ gemeinsame Verteilung von $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ und geeignetem g mit $E(Y|B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = g(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$.
(iii) Nach Voraussetzung ist Y orthogonal zu jedem $\mathcal{E}^{f\cdot B}_\infty$ für $f \in J$, d.h. insbesondere $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \varphi \equiv 0$ auf $\mathbb{C}^n$
$\Rightarrow E\big(\exp\big[i \sum z_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\big] \cdot Y\big) = 0 \quad (\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$

Dieses entspricht der Fourier-Transformation der Verteilung von $(B_{z_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{z_{n-1}})$ unter dem Maß $Y \cdot P$.
$\Rightarrow$ das Maß $Y \cdot P$ ist Null auf

$$\sigma\left(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right) = \sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$$

(denn $B_{t_0} = B_0 = 0$). □

Proposition 6.3.3. *$\forall F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P) : \exists! H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda \otimes \mathbb{P})$ mit*

$$F = E(F) + \int_0^\infty H_s dB_s \tag{6.1}$$

Hier Pred $= \mathcal{P} =$ vorhersagbare σ-Algebra.

Beweis. (i) Sei $\mathcal{H} = \{F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ mit der Darstellung (6.1) für ein $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})\}$.
Für $F \in \mathcal{H}$ gilt:

$$E(F^2) = E(F)^2 + E\left(\int_0^\infty H_s^2 dB_s\right) \tag{6.2}$$

Folglich: Ist $\{F^n\}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, so ist die zugehörige Folge $\{H^n\}$ Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.
Also $H^n \to H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$.
Ferner gilt

$$E(F^n) \to E(F)$$

und damit $F = E(F) + \int_0^\infty H_s dB_s$, d.h. $F \in \mathcal{H}$ und damit:
$\mathcal{H}$ ist abgeschlossen (in $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$).
(ii) Andererseits gilt: $\mathcal{H} \supset \{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\}$, denn mit der Itô-Formel folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} &= 1 + \int_0^\infty \mathcal{E}_s^{f \cdot B} f(s) dB_s \\ &= E(\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B}) + \int_0^\infty H_s dB_s \end{aligned}$$

(iii)Ferner: $\mathcal{H} = \mathrm{lin}\mathcal{H}$ und $\overline{\mathrm{lin}}\{\mathcal{E}_\infty^{f \cdot B} : f \in J\} = L^2$ (nach Lemma)
$\Rightarrow \mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$, d.h. H in (6.1) existiert stets.
(iv) Eindeutigkeit: folgt aus (6.2). □

Satz 6.3.4 (Itô)**.** *Jedes lokale $(\mathcal{F}_t)$-Martingal M besitzt eine stetige Version mit der Darstellung*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \quad (\forall t \in \mathbb{R}_+)$$

mit eindeutig bestimmtem, vorhersagbarem $H = L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda \otimes \mathbb{P})$ *und konstantem* M_0.
Für stetiges M *gilt:*

$$H_t = \frac{d}{dt}\langle M, B\rangle_t \quad (\textit{Radon-Nikodym-Ableitung})$$

Beweis. O.E. sei M stets rechtsstetig und $M_0 = 0$.
(i) Sei zunächst M ein L^2-beschrnktes Martingal
Dann gibt es ein $M_\infty \in L^2$ und ein $H \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$ mit:

$$\begin{aligned} M_t = E(M_\infty|\mathcal{F}_t) &= E(M_\infty) + E(\int_0^\infty H_s dB_s|\mathcal{F}_t) \\ &= E(M_\infty) + \int_0^t H_s dB_s \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung (insbesondere M stetig).
(ii) Sei nun M ein gleichgradig integrierbares Martingal. Es gibt also ein $M_\infty \in L^1$. Da L^2 dicht in L^1 gilt:
$\exists$ Folge (M^n) von L^2-beschränkten Martingalen mit $E\left[|M_\infty - M^n_\infty|\right] \to 0$ (bzw. $\exists$ Folge (M^n_∞) in L^2 ...).
Aufgrund der Doobschen Maximal-Ungleichung

$$P\left(\sup_t |M_t - M^n_t| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E\left(|M_\infty - M^n_\infty|\right)$$

und wegen Borel-Cantelli ($\sum P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$), gibt es eine Teilfolge (M^{n_k}), die f.s. gleichmäßig gegen M konvergiert
Daraus folgt$M$ ist f.s. stetig!
(iii) Sei nun M ein beliebiges rechtsstetiges lokales Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.
$\Rightarrow \exists$ Stoppzeiten T_n mit M^{T_n} rechtsstetiges Martingal
$\Rightarrow M^{T_n \wedge n}$ gleichgradig integrierbares, rechtsstetiges Martingal $\Rightarrow$ f.s. stetig
$\Rightarrow M$ f.s. stetig.

Wähle nun $T_n = \inf\{t > 0 : |M_t| > n\}$, dann ist M^{T_n} beschränkt und nach nach Teil (i) folgt: $\forall n : \exists!\ H^n \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$:

$$\begin{aligned} M^{T_n} &= H^n \cdot B \\ \forall m \geq n: \quad (M^{T_m})^{T_n} &= (H^m \cdot B)^{T_n} = (H^m 1_{[0,T_n]}) \cdot B \end{aligned}$$

$\Rightarrow H^n = 1_{[0,T_n]H^m}$
$\Rightarrow \exists\ H \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathrm{Pred}, \lambda \otimes \mathbb{P})$ mit $H^n = 1_{[0,T_n]H} \quad (\forall n)$
und $M = H \cdot B$. □

Korollar 6.3.5. *Sei* B *eine* d*-dimensionale stand. BB und* $(\mathcal{F}_t)_t$ *die davon erzeugte minimale Filtration, die den üblichen Bedingungen genügt. Dann gilt:*

$\forall$ lokale Martingale M bzgl. $(\mathcal{F}_t)$: $\exists$ stetige Version und $\exists H^i \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda^1 \otimes P), i = 1, \ldots, d$, und eine Konstante C, so daß

$$M = C + \sum_{i=1}^{d} H^i \cdot B^i$$

Beweis-Idee: oBdA $M_0 = 0$.
Sei $\mathcal{F}^i$ die von (B^i_t) erzeugte Filtration mit den üblichen Bedingungen, dann

$$\begin{aligned} M^i_t = E(M_t|{\mathcal{F}_t}^i) \quad &\Rightarrow \quad M^i \text{ Martingal bzgl. } ({\mathcal{F}_t}^i) \\ &\Rightarrow \quad \exists H^i : M^i = H^i \cdot B^i \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} (B^i) \text{ unabhängig} \quad &\Rightarrow \quad (\mathcal{F}^i) \text{ unabhängig} \\ &\Rightarrow \quad M_t = E(M_t|\mathcal{F}_t) = \sum_{i=1}^{d} E(M_t|{\mathcal{F}_t}^i) = \sum_{i=1}^{d} M^i_t \end{aligned}$$

Bemerkung 6.3.6. Offensichtlich

$$\langle M, B^i\rangle_t = \langle \sum_j H^j \cdot B^j, B^i\rangle_t = \sum_j \left(H^j \cdot \langle B^j, B^i\rangle\right)_t = \int_0^t H^i(s)ds$$

und damit $H^i(t) = \frac{d\langle M,B^i\rangle_t}{dt}$ (Radon-Nikodym).

6.4 Der Satz von Girsanov

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $(\mathcal{F}_t)-$filtrierter W-Raum mit den üblichen Bedingungen und $(W_t)_{t\geq 0} = (W^1_t, \ldots, W^N_t)$ sei eine N-dimensionale stand. BB.
Ferner sei $Z \in \mathcal{M}$ und $Z \geq 0$, d.h. wirklich ein Martingal (s. Abschnitt **??**) mit $E(Z_T) = 1, \quad \forall 0 \leq T < \infty$.

Definition 6.4.1. *$\forall t \in [0, \infty[$ definiere W-Maß $Q_t = Z_t P$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, d.h. $Q_t(A) = \int_A Z_t dP \quad (\forall A \in \mathcal{F}_t)$.*
Wegen $Z \in \mathcal{M}$ gilt für alle $0 \leq S < T < \infty$: $Q_S = Q_T$ auf $\mathcal{F}_S$ "Konsistenz".

Achtung: i.A. existiert kein Maß Q auf $\mathcal{F}_\infty$ mit $Q_S = Q$ auf $\mathcal{F}_S \quad (\forall S)$.

Lemma 6.4.2. *Für alle $Z > 0, Z \in \mathcal{M}^{loc}_*$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $L \in \mathcal{M}^{loc}_*$ mit*

$$Z = \mathcal{E}^L = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)$$

Nämlich: $L_t = \log Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s$

Beweis. Mit der Itô-Formel folgt:

$$\begin{aligned}\log Z_t &= \log Z_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s} dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{Z_s^2} d\langle Z\rangle_s \\ &= L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t.\end{aligned}$$

□

<u>Beobachtungen</u> Sei $Z > 0$ und $Q = ZP$

(1) Ist S eine Semimartingal bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ so auch bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ mit derselben quadratischen Variation $\langle S\rangle$.

(2) Allerdings ändern sich die Doob-Meyer-Zerlegungen:

$$\begin{aligned} S &= M + A \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}_t, P) \\ &= N + B \quad \text{in } (\Omega, \mathcal{F}_t, Q)\end{aligned}$$

<u>Ziel:</u> Berechnung von N (aus M und Z).
<u>Annahme:</u> $Z \in \mathcal{M}$, $T \in [0, \infty[$ fix und $Q_T = ZP_T$.

Lemma 6.4.3. *Sei $0 \leq s \leq t \leq T$, Y $\mathcal{F}_t$-meßbar und $\mathbb{E}_{Q_T}(|Y|) < \infty$. Dann gilt mit dem Satz von Bayes:*

$$\mathbb{E}_{Q_T}(Y|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}_P(YZ_t|\mathcal{F}_s) \quad \textit{f.s. bzgl. } P \textit{ und } Q_T$$

Beweis. $\forall A \in \mathcal{F}_s$:

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}_P(YZ_t|\mathcal{F}_s)dQ_T &= \int_A \mathbb{E}_P(YZ_t|\mathcal{F}_s)dP \\ &= \int_A YZ_s dP \\ &= \int_A Y dQ_T\end{aligned}$$

□

<u>Bezeichnungen:</u> $\mathcal{M}_{0,T}^{\text{loc}} = \{$stetige lokale Martingale$M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t<T})$ mit $M_0 = 0\}$
und $\tilde{\mathcal{M}}_{0,T}^{\text{loc}} = \{$stetige lokale Martingale$M = (M_t)_{0\leq t\leq T}$ bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t<T})$ mit $M_0 = 0\}$

Proposition 6.4.4. *Sei $M \in \mathcal{M}_{0,T}^{loc}$, dann ist $\tilde{M}_t := M_t - \langle M, L\rangle_t \in \tilde{M}_{0,T}^{loc}$ und $\langle\tilde{M}\rangle = \langle M\rangle$ auf $[0,T] \times \Omega$ f.s. bzgl. P und Q_T.*

Beweis. OBdA $M, \langle M\rangle$ und $\langle L\rangle$ beschränkt (in t, ω). Dann ist auch $\tilde{M}$ beschränkt.
Mit partieller stochastischer Integration folgt:

$$Z_t\tilde{M}_t = \int_0^t Z_u d\tilde{M}_u + \int_0^t \tilde{M}_u dZ_u$$

also ist $(Z_t\tilde{M}_t)_{0\le t\le T}$ Martingal unter P.
Mit dem Lemma 6.4.3 folgt: Für alle $0 \le s \le t \le T$ gilt:

$$E_{Q_T}(\tilde{M}_t|\mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} E_P(Z_t\tilde{M}_t|\mathcal{F}_s) = \tilde{M}_s \quad \text{f.s.}$$

Somit ist $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_{0,T}^{\text{loc}}$. □

Korollar 6.4.5. *Für $M, N \in \mathcal{M}_{0,T}^{loc}$ gilt $\langle\tilde{M}, \tilde{N}\rangle = \langle M, N\rangle$.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{M}, \tilde{N}\rangle &= \frac{1}{4}\left(\langle\tilde{M} + \tilde{N}\rangle - \langle\tilde{M} - \tilde{N}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle\widetilde{M+N}\rangle - \langle\widetilde{M-N}\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle\right) \\
&= \langle M, N\rangle
\end{aligned}$$

□

Satz 6.4.6 (Girsanov, Cameron&Martin, Maruyama)**.** *Sei $(W_t)_{t\ge0}$ eine d-dimensionale BB und $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ die von (W_t) erzeugte Filtration mit den üblichen Bedingungen. Sei*
$(X_t)_{t\ge0} = (X_t^1, \ldots, X_t^N)_{t\ge0} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, Pred, \lambda^1 \otimes P)^N$ und
$Z_t := \mathcal{E}_t^{X\cdot W} = \exp\left(\sum_{i=1}^N \int_0^t X_s^i dW_s^i - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_s\|^2 ds\right)$.
Definiere ferner $\tilde{W}_t^i = W_t^i - \int_0^t X_s^i ds, \quad i = 1, \ldots, N,\ 0 \le t < \infty$.
Falls Z ein Martingal ist, dann ist für alle $T < \infty$ der Prozeß $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{0\le t\le T}$ eine N-dimensionale BB auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q_T, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T})$.

Beweis. Für alle $i = 1, \ldots, N$ gilt:

$$\begin{aligned} W_t^i - \langle W^i, L\rangle_t &= W_t^i - \langle W^i, \sum_j X^j \cdot W^j\rangle_t \\ &= W_t^i - \sum_j \left(X^j \cdot \langle W^i, W^j\rangle\right)_t \\ &= W_t^i - \int_0^t X_s^i ds = \tilde{W}_t^i \end{aligned}$$

also $\tilde{W}^i = W^i - \langle W^i, L\rangle \in \tilde{\mathcal{M}}_{0,T}^{\text{loc}}$ nach Proposition 6.4.4 und ferner $\langle \tilde{W}^i, \tilde{W}^j\rangle_t = \langle W^i, W^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$.
Also ist $\tilde{W}$ eine N-dimensionale BB (Satz von Lévy). □

Bemerkung 6.4.7. Sei $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, E ein polnischer Raum und $V = (V_t)_{t\geq 0}$ mit $V_t : \Omega \to E$ Projektion. Sei ${\mathcal{F}_t}^0 = \sigma(V_s : s \leq t)$ die von V erzeugte Filtration enthalten in $\mathcal{F}_t$.
Dann gibt es ein W-Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$ mit $\forall T < \infty : Q = Q_T$ auf $\mathcal{F}_T^0 \quad (\subset \mathcal{F}_T)$.
Denn: Für $I = \{t_1, \ldots, t_n\}$ definiere ein W-Maß $\hat{Q}_I$ auf $(E^I, \mathcal{B}(E^I))$ durch

$$\hat{Q}_I(A) = Q_T(\omega \in \Omega : (V_{t_1}(\omega), \ldots, V_{t_n}(\omega)) \in A)$$

für beliebige $T \geq t_n$ und alle $A \in \mathcal{B}(E^n)$.
Dann ist $\{\hat{Q}_I, I \text{ end. } \subset \mathbb{R}_+\}$ eine projektive Familie
Es gibt demnach ein W-Maß $\hat{Q} = \hat{Q}_{\mathbb{R}_+}$ auf $(E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+})$, den projektive Limes
Also gilt für $T < \infty : \hat{Q} = Q_T$ auf $(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E), \mathcal{F}_T^0)$ und $Q := \hat{Q}|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)}$ leistet das Gewünschte.

Bemerkungen 6.4.8. (1) Das kanonische Modell ist der Wiener-Raum, dort gibt es ein Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$.
In dieser Situation gilt:

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_s ds \text{ ist } N\text{-dimensionale BB auf } (\Omega, \mathcal{F}_\infty^0, Q, ({\mathcal{F}_t}^0)_{0\leq t<\infty})$$

(2) Warum haben wir in der allgemeinen Situation nur W-Maße Q, P mit $Q = Z_T P$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ für alle T betrachtet, wobei $Z \in \mathcal{M}$ und $E(Z_0) = 1$?
Antwort: Da $Q \ll P$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ gibt es ein $(\mathcal{F}_t)$-meßbares Z_T, $Z_T : Q = Z_T P$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
Wegen der Konsistenz gilt, daß $Z = (Z_T)_{T\geq 0}$ ein Martingal ist mit $E(Z_0) = 1$.
(3) Im allgemeinen folgt aus obigem nicht $Q \ll P$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^0)$ (und natürlich nicht auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$).
Bsp: Sei W eine 1-dimensionale BB, ${\mathcal{F}_t}^0 = {\mathcal{F}_t}^W$, $X_t = \alpha \neq 0$ und $Z_t = e^{\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2} t}$ (also Z_t Martingal!)
Dann ist $\tilde{W}_t = W_t - \alpha t$ eine 1-dimensionale BB bzgl. Q mit $Q = Z_t P$ auf ${\mathcal{F}_t}^0$.

Sei $A = \left\{ \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} W_t = \alpha \right\}$
Dann ist $Q(A) = Q\left(\left\{ \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \tilde{W}_t = 0 \right\} \right) = 1 \quad (\Leftarrow$ iterierter Logarithmus für $\tilde{W}_t)$
aber $P(A) = 0 \quad (\Leftarrow$ iterierter Logarithmus für $W_t)$
$\Rightarrow Q$ ist nicht absolut stetig bzgl. P.
(4) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $Q \ll P$ auf $\mathcal{F}^0_\infty$

(ii) Z ist gleichgradig integrierbar

(5) Warum läßt sich in (1) Q nicht zu einem W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ fortsetzen?
Hier (typischerweise): $\mathcal{F}_t = \overline{\mathcal{F}^0_{t+}}^P$ und $\mathcal{F}_\infty = \cap \mathcal{F}_t$.
<u>Antwort:</u> Gegegeben sei $A \in \mathcal{F}^0_\infty$ mit $P(A) = 0$ und $Q(A) > 0$.
Dann sind <u>alle</u> $A' \subset A$ in $\mathcal{F}_\infty$
$\Rightarrow$ man setzt $P(A') = 0$ aber $Q(A') \neq 0$.
Dieses Problem tritt nicht auf, wenn man $\mathcal{F}^{(0)}_T$ statt $\mathcal{F}^{(0)}_\infty$ und Q_T statt Q betrachtet. Denn es gilt stets $Q_T \ll P$ auf $\mathcal{F}_T$.

6.5 Die Novikov-Bedingung

Wir betrachten nun wieder allgemein $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, die den üblichen Bedingungen genügt. Sei $L \in \mathcal{M}_0$ und $Z = \mathcal{E}^L = \exp\left(L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\right)$.
Wir wissen bereits:

- $Z \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}, Z \geq 0, Z$ Supermatingal, $E(Z_0) = 1$
- $(Z \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E(Z_t) = 1 \quad \forall t)$

Satz 6.5.1 (Novikov '72)**.** *$Z = \mathcal{E}^L$ ist ein Martingal, falls*

$$E\left(\exp\left(+\frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)\right) < \infty \quad (\forall t)$$

Beweis. (i) Nach einer eventuellen Erweiterung von $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ existiert eine BB $B = (B_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{G}, P, \mathcal{G}_t)$ mit

$$L_t = B_{\langle L\rangle_t}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir folgende Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{G}_t)$

$$S_n = \inf\{s \geq 0 : B_t - t \leq -n\}$$

Nach der Wald-Identität gilt $E\left[\exp\left(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n\right)\right] = 1$. Also $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}S_n\right)\right] = e^n$.
(ii) Betrachte nun die lokalen Martingale bzgl. $(\mathcal{G}_t)$

$$Y_t = \exp\left(B_t - \frac{1}{2}t\right) = \left(\mathcal{E}^B\right)_t$$

und $Y_t^n = Y_{t\wedge S_n}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
E[Y_t] &= E[\exp(B_t - \frac{1}{2}t)] \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(x - \frac{1}{2}t) \cdot (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx \\
&= (2\pi t)^{-1/2} \int \exp(-\frac{(x-t)^2}{2t}) dx \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dann ist $(Y_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal und folglich auch $Y^n = (Y_t^n)_{t\geq 0}$.
(iii) Ferner ist $S_n < \infty$ f.s., also

$$\begin{aligned}
Y_\infty^n &= \lim_{t\to\infty} Y_t^n \\
&= Y_{S_n} \\
&= \exp(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n)
\end{aligned}$$

und $E(Y_\infty^n) = E[\exp(B_{S_n} - \frac{1}{2}S_n)] = 1 = E(Y_0^n)$
Somit ist $(Y_t^n)_{0\leq t\leq\infty}$ ein Martingal.
(iv) Optional Sampling: $\forall$ Stoppzeiten R bzgl $(\mathcal{G}_t)$:

$$E\left[\exp\left(B_{S_n\wedge R} - \frac{1}{2}(S_n \wedge R)\right)\right] = 1.$$

Für fixes $t \in [0,\infty[$ wähle $R = \langle L\rangle_t$ ($\Rightarrow (\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$-Stoppzeit), dann

$$\begin{aligned}
1 &= E[\exp(B_{S_n\wedge\langle L\rangle_t} - \frac{1}{2}(S_n \wedge \langle L\rangle_t))] \\
&= E[1_{\{S_n\leq\langle L\rangle_t\}} \exp(\frac{1}{2}S_n - n)] + E[1_{\{S_n>\langle L\rangle_t\}} \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)] \\
&\overset{n\to\infty}{=} 0 + E[Z_t]
\end{aligned}$$

denn $E[1_{\{S_n>\langle L\rangle_t\}} \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)] \leq e^- n E[\exp(\frac{1}{2}\langle L\rangle_t)] \to 0$ □

Beispiel 6.5.2. Ist speziell $L = X \cdot W$ mit einer d-dimensionalen BB W, so lautet die Novikov-Bedingung

$$E\left[\exp \frac{1}{2}\int\limits_0^t X_s^2 ds\right] < \infty \quad (\forall t \geq 0)$$

Dann ist $Z = \mathcal{E}^{X\cdot W}$ ein Martingal und $\tilde{W}_t = W_t - \int\limits_0^t X_s ds$ eine d-dimensionale BB bzgl. $Q = Z_t P$.
(Hierbei ist X progressiv meßbar bzgl. $(\mathcal{F}_t{}^W)$ und damit $\tilde{W}$ eine BB bzgl. $(\Omega, \mathcal{F}_t{}^W, Q)$).

6.6 Wiener-Raum und Cameron-Martin-Raum

Zur Vereinfachung betrachten wir nur Prozesse mit $t \in [0,1]$.
<u>Wiener-Raum :</u> $\Omega = \mathcal{C}_0 = \{u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^N) : u(0) = 0\}$ versehen mit:
(1) der Norm $\|.\|_\infty$ der gleichmäßigen Konvergenz $\quad \to$ Banach-Raum
(2) dem Wiener-Maß $P \quad \to$ W-Raum.
<u>Cameron-Martin-Raum :</u> $H = \{u \in \mathcal{C}_0 : u^{(i)}$ absolut stetig , $\|u\|_H < \infty\}$ Hilbert-Raum mit Norm $\|u\|_H^2 = \int\limits_0^1 |u'(s)|^2 ds = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^N |u^{(i)\prime}(s)|^2 ds$, H liegt dicht in $\mathcal{C}_0$.
Der Projektionsprozeß $W = (W_t)_{0 \le t \le 1}$ auf dem Wiener-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist eine stand. BB.
Für $h \in \Omega$ kann man eine Translationsabbildung τ_h in Ω definieren:

$$\begin{aligned} \tau_h : \Omega &\to \Omega \\ u &\mapsto u + h \end{aligned}$$

Sei $P^h = P \circ \tau_h^{-1}$ das Bildmaß von P unter τ_h und W^h der Prozeß definiert durch $W_t^h(u) = W_t(u) - h(t)$.
$W^h = W \circ \tau_h^{-1} = W \circ \tau_{-h}$.
Dann gilt also, daß die Verteilung von W^h unter P^h gleich der Verteilung von W unter P ist. Somit ist W^h unter P^h eine BB.
Sei nun $h \in H$, dann ist $h' \in L^2([0,1], \mathbb{R}^N)$.
Wie definieren das Martingal $L_t^h = (h' \cdot W)_t = \sum\limits_{i=1}^N \int\limits_0^t h^{(i)\prime}(s) dW_s^{(i)}$ und $Z_t^h = (\mathcal{E}^{L^h})_t$.
Nach Novikov ist Z^h ein Martingal mit $E(Z_t^h) = 1$. Also folgt mit Grisanov, daß W^h eine BB unter $Z^h P$ ist.

Satz 6.6.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $P \gg P^h$ *und* $P \ll P^h$

(ii) $h \in H$

In diesem Fall: $P^h = Z^h P$.

6.7 Große Abweichungen

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(W_t)_{0 \le t \le 1}$ und H wie zuvor.

Definition 6.7.1. *Das Wirkungsfunktional I auf Ω ist definiert durch*

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|u\|_H^2 & , u \in H \\ 0 & , u \in \Omega \setminus H \end{cases}$$

und für $A \subset \Omega : I(A) = \inf\limits_{u \in A} I(u)$.

Bemerkung 6.7.2. (1) $u \mapsto I(u)$ ist nach unten halbstetig auf Ω
(2) $\forall \lambda \geq 0$:

$$\forall \lambda : \{u : I(u) \leq \lambda\} \text{ kompakt } \subset \Omega$$

Satz 6.7.3 (Schilder '66)**.** *Für alle Borel-Mengen $A \subset \Omega$ gilt:*

$$\begin{aligned} -I(\mathring{A}) \quad &\leq \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(\varepsilon W \in \mathcal{A}) \\ &\leq \quad \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(\varepsilon W \in \mathcal{A}) \\ &\leq -I(\overline{A}) \end{aligned}$$

Anschaulich:
$P(\varepsilon W \in A) \sim e^{-\frac{1}{\varepsilon^2} I(A)}$, *also* $P(\varepsilon W \in A) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ *exponentiell schnell, falls* $I(A) > 0$.

Kapitel 7

Stochastische Differentialgleichungen

Ziel: Existenz und Eindeutigkeit für Lösungen X der SDG

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = \xi. \tag{7.1}$$

Hier und im Folgenden seien:
$b(t,x) = (b_i(t,x))_{i=1,\dots,d}$ Drift-Vektor,
$\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))_{i=1,\dots,d;j=1,\dots,r}$ Dispersionsmatrix,
$a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^T(t,x) = (a_{ik}(t,x))_{i=1,\dots,d;k=1,\dots,d}$ Diffusionsmatrix,
das heißt: $a_{ik}(t,x) = \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}(t,x)\sigma_{kj}(t,x)$.
Stets gelte für alle i, j, k:
$b_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar,
$\sigma_{ij} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar,
$a_{ik} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-messbar.

Definition 7.0.4. *Man definiere für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$:*
$\|b(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{d} b_i^2(t,x) \right)^{\frac{1}{2}}$,
$\|\sigma(t,x)\| := \left(\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{r} \sigma_{ij}^2(t,x) \right)^{\frac{1}{2}}$.

7.1 Starke Lösungen

Vorgegeben:

- W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,
- r-dim stand. BB $W = (W_t)_{t \geq 0}$ und die davon erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$,

- von W unabhängig, $\mathbb{R}^d$-wertige ZV ξ.

Bezeichne dann mit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die folgende den üblichen Bedingungen genügende Filtration: Für $t \geq 0$:
$\mathcal{F}_t :=$ Augmentierung von $\sigma(\xi, W_s : s \leq t) := \sigma(\xi) \vee {\mathcal{F}_t}^W$.

Definition 7.1.1. *Eine starke Lösung der SDG* (7.1) *ist ein auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *definierter* $\mathbb{R}^d$*-wertiger Prozess* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *mit*

(i) X *ist an* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adaptiert.*

(ii) $X_0 = \xi \quad P$*-f.s.*

(iii) X *ist stetiges Semimartingal mit* $\forall t < \infty$*:*

$$\int_0^t \|b(s, X_s)\| + \|\sigma(s, X_s)\|^2 ds < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

(iv) X *löst die stoch. Integralgleichung*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \tag{7.2}$$

$0 \leq t \leq +\infty$*,* P*-f.s., d.h. koordinatenweise* $\forall i = 1, \ldots, d$*:*

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)},$$

$0 \leq t \leq +\infty$*,* P*-f.s.*

Bemerkung 7.1.2. (iv) entspricht der SDG, (ii) ist die Anfangsbedingung, (iii) ist technische Vorraussetzung damit (iv) formuliert werden kann, (i) bedeutet: X_t ist (im Wesentlichen) Funktion von ξ und $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$. Dies bezeichnet man als "Kausalitätsprinzip": Output zur Zeit t hängt nur ab vom Input bis zur Zeit t.

Definition 7.1.3. *Für SDGlen zum Paar* (b, σ) *gilt starke Eindeutigkeit, falls Folgendes gilt:*
Sind X *und* $\tilde{X}$ *zwei starke Lösungen von* (7.1) *auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, zu einer BB* W *und einer Startvariable* ξ*, so sind* X *und* $\tilde{X}$ *ununterscheidbar, d.h.* $P(X_t = \tilde{X}_t \quad \forall t \geq 0) = 1$.

Beispiel 7.1.4. $\sigma = 0$, $b(t, x) = |x|^\alpha$: Damit ist (7.1) eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung.
Anfangsbedingung: $X_0 = 0$.
Falls $\alpha \geq 1$: Eindeutigkeit gilt: $X_t \equiv 0$.
Falls $0 < \alpha < 1$: keine Eindeutigkeit: $\forall T \in [0, \infty]$ $\exists$ Lsg. $X := X^T$ mit $X_t := 0$ für $0 \leq t \leq T$ und $X_t := [(1-\alpha)(t-T)]^{1/1-\alpha}$ für $T \leq t \leq \infty$.

Satz 7.1.5 (Eindeutigkeit)**.** *Sind b und σ lokal Lipschitz-stetig in x, so gilt starke Eindeutigkeit für SDGl zum Paar (b, σ).*

Bemerkung 7.1.6. Die Voraussetzung lautet explizit:
$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists K_n < \infty\ \forall t \geq 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\| \leq n, \|y\| \leq n$:

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_n \cdot \|x - y\|.$$

Lemma 7.1.7 (Gronwall)**.** *Seien $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ integr., $\beta \geq 0$.*
Aus

$$0 \leq g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \quad (\forall t \in [0,T])$$

folgt

$$g(t) \leq h(t) + \beta \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)} ds \quad (\forall t \in [0,T])$$

und falls h isoton ist, folgt

$$g(t) \leq h(t) e^{\beta t}.$$

Beweis. Aus Voraussetzung folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} \int_0^t g(s)ds \right) = \left(g(t) - \beta \int_0^t g(s)ds \right) e^{-\beta t} \leq h(t) e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow \int_0^t g(s)ds \leq e^{\beta t} \int_0^t h(s) e^{-\beta s} ds$$

$$\Rightarrow g(t) \overset{\text{Vor.}}{\leq} h(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \leq h(t) + \beta \int_0^t h(s) e^{\beta(t-s)} ds$$

□

Beweis von Satz (7.1.5). Gegeben seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $W = (W_t)_{t \geq 0}$, ξ, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und zwei starke Lsg. $X, \tilde{X}$ von (7.1).

Def. Stoppzeiten $\tau_n, \tilde{\tau}_n, S_n$ durch $\overset{(\sim)}{\tau_n} := \inf\{t \geq 0 : \|\overset{(\sim)}{X_t}\| \geq n\}$ und $S_n := \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n$. Dann gilt: $S_n \nearrow \infty$ P-f.s. und

$$\begin{aligned} &X_{t \wedge S_n} - \tilde{X}_{t \wedge S_n} \\ &\quad = \int_0^{t \wedge S_n} \left[b(u, X_u) - b(u, \tilde{X}_u) \right] du + \int_0^{t \wedge S_n} \left[\sigma(u, X_u) - \sigma(u, \tilde{X}_u) \right] dW_u. \end{aligned}$$

Dies impliziert:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left\|X_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}\right\|^2\right) &= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left(\left\{\int_0^{t\wedge S_n} \left[b_i(u,X_u) - b_i(u,\tilde{X}_u)\right] du\right.\right. \\
&+ \left.\left.\sum_{j=1}^{r} \int_0^{t\wedge S_n} \left[\sigma_{ij}(u,X_u) - \sigma_{ij}(u,\tilde{X}_u)\right] dW_u^{(j)}\right\}^2\right) \\
&\leq 2t\cdot\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_n} \|b(u,X_u) - b(u,\tilde{X}_u)\|^2 du\right) \\
&+ 2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge S_n} \|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,\tilde{X}_u)\|^2 du\right) \\
&\leq 2(T+1)\cdot K_n^2 \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}\left(\|X_{u\wedge S_n} - \tilde{X}_{u\wedge S_n}\|^2\right)}_{=:g(u)} du
\end{aligned}
$$

Aus dem Gronwall-Lemma folgt nun die Gleichheit:

$$\mathbb{E}\left(\|X_{t\wedge S_n} - \tilde{X}_{t\wedge S_n}\|^2\right) = 0 \quad (\forall t \leq T, \forall n)$$

$\Rightarrow X^{S_n}, \tilde{X}^{S_n}$ sind ununterscheidbar $(\forall n)$
$\Rightarrow X, \tilde{X}$ sind ununterscheidbar. □

Bemerkung 7.1.8. Aus lokaler Lipschitz-Stetigkeit folgt nicht globale Existenz.

Beispiel 7.1.9. $\sigma \equiv 0$, $b(t,x) = \| x \|^2$, $X_0 = 1$
$\Rightarrow X_t = \frac{1}{1-t}$ für $t \in [0,1[$ ist Lsg. der zugehörigen DGL, Explosion für $t \to 1$.

Im Folgenden seien $(\Omega, \mathcal{F}, P), W = (W_t), \xi, (\mathcal{F}_t)$ gegeben.

Satz 7.1.10 (Existenz). *Sei* $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < \infty$. *Es existiere eine Konstante* $K > 0$, *so dass für alle* t, x, y *gelte:*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$$

("globale Lipschitz-Bedingung") und

$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1 + \|x\|)$$

("lineare Wachstumsbedingung").
Dann existiert eine starke Lsg. X *der SDG* (7.1).
Ferner gilt: $\forall T\ \exists C\ \forall 0 \leq t \leq T$:

$$\mathbb{E}(\|X_t\|^2) \leq C \cdot (1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)).$$

Beweis. (i) Idee: Picard-Lindelöf-Iteration, d.h. def. $X_t^{(0)} = \xi$,
$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})dW_s$
$X_0^{(k)} = \xi$ P-f.s.
Durch Induktion beweisen wir nun, dass $X^{(k)}$ wohldefiniert, stetig und an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert ist:
Induktionsanfang: Für $k = 0$ stimmt diese Aussage.
Induktionsschritt: Aus der Induktionsannahme und der linearen Wachstumsbedingung folgt:

$$\int_0^t (\|b(s, X_s^{(k)})\| + \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2)ds \leq 2K^2(T+1)\int_0^t (1 + \|X_s^{(k)}\|)^2 ds$$

Aus der Stetigkeit von $X^{(k)}$ (Induktionsannahme) folgt nun:

$$\int_0^t (\|b(s, X_s^{(k)})\| + \|\sigma(s, X_s^{(k)})\|^2)ds < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

$\Rightarrow X^{(k+1)}$ wohldefiniert, stetig, adapt.
(ii) $\forall T\ \exists C = C_{KT}\ \forall t \leq T, \forall k$:

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(k)}\|^2) \leq C(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)). \tag{7.3}$$

Denn: Für $k = 0$ und alle t gilt:

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(0)}\|^2) = \mathbb{E}(\|\xi\|^2) \leq 1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2).$$

Für $k \geq 1$ und alle $t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) &\leq 3\mathbb{E}(\|\xi\|^2) + 3 \cdot \int_0^t \mathbb{E}\left(\|b(u, X_u^{(k)})\|^2\right) du + 3 \cdot \int_0^t \mathbb{E}\left(\|\sigma(u, X_u^{(k)})\|^2\right) du \\
&\leq 3\mathbb{E}(\|\xi\|^2) + 3(T+1)K^2 \int_0^t \mathbb{E}\left(\|X_u^{(k)}\|^2\right) du + 3(T+1)K^2 T.
\end{aligned}$$

Es existiert also eine Konstante $C_0 = C_0(K, T) \geq 1$, so dass für alle $t \leq T$ und alle $k \geq 1$ die folgende Iterationsformel gilt:

$$\mathbb{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) \leq C_0(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)) + C_0 \int_0^t \mathbb{E}(\|X_u^{(k)}\|^2)du.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}(\|X_t^{(k+1)}\|^2) &\leq C_0(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2))\left(1 + C_0 t + \frac{(C_0 t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(C_0 t)^{k+1}}{(k+1)!}\right) \\
&\leq C_0 \cdot e^{C_0 T}(1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2)) \\
&= C \cdot (1 + \mathbb{E}(\|\xi\|^2))
\end{aligned}$$

mit $C := C_{KT} := C_0 e^{C_0 T}$.
(iii) Nach Konstruktion gilt (für fixes $k \in \mathbb{N}$): $X^{(k+1)} - X^{(k)} = B + M$ mit

$$B_t = \int_0^t [b(s, X_s^{(k)}) - b(s, X_s^{(k-1)})] ds$$

$$M_t = \int_0^t [\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})] dW_s$$

Aufgrund der linearen Wachstumsbedingung und der Abschätzung aus dem Abschnitt (i) ist $M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(d)}) \in (\mathcal{M}_0)^d$ mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le t} \|M_s\|^2\right] &\le C_1 \cdot \mathbb{E}\left[\int_0^t \|\sigma(s, X_s^{(k)}) - \sigma(s, X_s^{(k-1)})\|^2 ds\right] \\ &\le C_1 \cdot K^2 \cdot \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds\right]\end{aligned}$$

wegen Lipschitz-Stetigkeit (mit einer geeigneten Konstanten $C_1 > 0$).
Ferner gilt: $\|B_t\|^2 \le K^2 T \int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds$.
$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le t} \|B_s\|^2\right] \le K^2 \cdot T \cdot \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2 ds\right]$.
Dies impliziert:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right] \le C_2 \int_0^t \mathbb{E}\left[\|X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)}\|^2\right] ds \tag{7.4}$$

Iteration ergibt: $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le s \le t} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\|^2\right] \le \frac{(C_2 t)^k}{k!} \cdot C_3 \tag{7.5}$$

mit $C_3 = \sup_{0 \le s \le T} \mathbb{E}\left[|X_s^{(1)} - \xi|^2\right] < \infty$ und $C_2 = 4(C_1 + T)K^2$.
(iv) Aus (7.5) und der Chebyshev-Ungleichung folgt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$P\left[\sup_{0 \le s \le T} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\| \ge \frac{1}{2^{k+1}}\right] \le 4C_3 \cdot \frac{(4C_2 T)^k}{k!} \tag{7.6}$$

Dabei gilt: Die rechte Seite von (7.6) ist konvergent in k. Also folgt mit dem Lemma von Borel-Cantelli:

$$P\left[\sup_{0 \le s \le T} \|X_s^{(k+1)} - X_s^{(k)}\| \ge \frac{1}{2^{k+1}} \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\right] = 0$$

Es existiert also ein stetiger Prozess $X = (X_s)_{0\le s\le T}$, so dass P-f.s. gilt:
$X^{(k)} \to X$ in Sup-Norm auf $[0,T]$
Damit existiert ein stetiger Prozess $X = (X_s)_{0\le s\le T}$ mit der Eigenschaft:
$X^{(k)} \to X$ glm. auf $[0,T]$ P-f.s.
Aus dem Lemma von Fatou folgt: $\forall t \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}(\|X_t\|^2) \le C(1+\mathbb{E}[\|\xi\|^2]) \quad \text{mit } C = C(T,K) \tag{7.7}$$

(v) Behauptung: X löst SDG (7.1).
Denn: Nach Konstruktion gilt: $X_t = \lim\limits_{k\to\infty} X_t^{(k)}$ mit

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})dW_s$$

Für fixiertes T gilt: Für P-fast alle $\omega \in \Omega$ existiert ein $N := N(\omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\forall k \ge N(\omega)$ gilt: $\sup\limits_{0\le s\le T} \|X_s(\omega) - X_s^{(k)}(\omega)\| \le 2^{-k}$.
Die globale Lipschitz-Bedingung impliziert:

$$\left\| \int_0^t b(s,X_s)ds - \int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds \right\|^2 \le K^2 T \int_0^T \|X_s - X_s^{(k)}\|^2 ds \to 0$$

für $k \to \infty$ P-f.s..
Nun zum stoch. Integral: Aus (7.5) folgt $\forall t \in [0,T]$:

$$(X_t^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Aus der P-fast sicheren Konvergenz $X_t^{(k)} \to X_t$ folgt $X_t^{(k)} \to X_t$ in L^2.
Ferner: $\sup\limits_{0\le t\le T, k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\|X_t^{(k)}\|^2\right] < \infty$.
Mit dem Lemma von Fatou folgt daraus: $\sup\limits_{0\le t\le T} \mathbb{E}\left[\|X_t\|^2\right] < \infty$
Damit gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\| \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s - \int_0^t \sigma(s,X_s^{(k)})dW_s \right\|^2\right] &= \\
= \ \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^{(k)})\right\|^2 ds\right]& \\
\le \ K^2 \cdot \mathbb{E}\left[\int_0^t \|X_s - X_s^{(k)}\|^2 ds\right] &\to 0 \quad (k\to\infty)
\end{aligned}$$

wegen L^2-Beschränktheit (auf $[0,T]\times\Omega$) u. pktw. Konvergenz.
Zusammen erhält man:

$$\begin{aligned} X_t^{(k+1)} &= \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(k)})dW_s \\ &\longrightarrow \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s = X_t. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.1.11 (Verallgemeinerung)**.** *Voraussetzungen an b, σ wie zuvor (global Lipschitz, lin. Wachstum), keine Einschr. an ξ. Dann existiert eine eindeutig bestimmte starke Lösung.*

Beweis. Idee: $\forall k \in \mathbb{N}$ sei $\xi_k := \xi 1_{\{|\xi|\le k\}}$ und $X^{(k)}$ die eindeutige starke Lsg. zur Anfangsbedingung ξ_k.
Dann folgt für alle T und alle $l > k$:

$$\sup_{0\le s\le T} \|X_s^{(l)} - X_s^{(k)}\| = 0 \quad \text{P-f.s auf } \{\omega : |\xi(\omega)| \le k\}$$

Also existiert ein Prozess X mit $X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}$. □

7.2 Beispiele

(i) BB mit Drift: $d = r, v \in \mathbb{R}^d, \sigma > 0$
$dX_t = vdt + \sigma dW_t$,
Lösung: $X_t = X_0 + vt + \sigma W_t \Rightarrow \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + vt$
Allgemein: d, r bel., $v \in \mathbb{R}^d, \sigma \in R^{d\times r}, W_t = r$-dim BB
$dX_t = vdt + \sigma dW_t$,
$X_t = X_0 + vt + \sigma W_t$
$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) + vt$
Falls X_0 konstant ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_t^i, X_t^j) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_k \sigma_{ik} W_t^k, \sum_l \sigma_{jl} W_t^l\right) \\ &= \sum_{k=1}^r \sigma_{ik}\cdot\sigma_{jk}\cdot t \quad (i,j = 1,\dots,d) \\ &= a_{ij}\cdot t \quad \text{mit } a = \sigma\sigma^T \end{aligned}$$

(ii) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess: $d = r, \alpha > 0$

$$dX_t = -\alpha X_t dt + dW_t$$

Langevin 1908: X_t ist Geschwindigkeit(!) eines Moleküls unter Berücksichtigung von Reibung

Lösung: $X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$

Falls X_0 Gauß-verteilt, $\mathbb{E}(X_0) = 0, \mathrm{Var}(X_0) = \frac{1}{2\alpha}$, so ist auch X_t Gauß-verteilt, $\mathbb{E}(X_t) = 0, \mathrm{Var}(X_t) = \frac{1}{2\alpha}$ und $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t-s|}$.

Interpretation: Die Drift $b(t,x) = -\alpha x$ in Richtung des Ursprungs $0 \in \mathbb{R}^d$ bewirkt, dass X stationär ist (d.h. Vert. ist unabh. von t), in dem Sinne:

$$\mathbb{E}(X_t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\mathbb{E}(X_t^2) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\alpha} = \text{const.}$$

Im Gegensatz hierzu gilt für freie BB ($\alpha = 0$):

$$\mathbb{E}(X_t^2) = d \cdot t,$$

d.h. X breitet sich im Laufe der Zeit immer mehr im Raum aus.

(iii) Brownsche Brücke: $a, b \in \mathbb{R}^d, d = r, 0 \le t < T$

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t, \quad X_0 = a$$

Lösung:

$$X_t = a + \frac{t}{T}(b-a) + (T-t) \int\limits_0^t \frac{dW_s}{T-s}, \quad 0 \le t < T.$$

Setze $X_T = b$.

$X = (X_t)_{0 \le t \le T}$ ist Gauß-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden und $\mathbb{E}(X_t) = a + \frac{t}{T}(b-a)$ sowie $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t - \frac{st}{T}$.

Interpretation: Die Drift $b(t,x) = \frac{b-x}{T-t}$ in Richtung b (mit Stärke $\to \infty$ für $t \to T$) treibt den Prozess nach b.

(iv) Bessel-Prozess: $d = r = 1$, $a \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{N}$:

$$dX_t = \frac{N-1}{2X_t} dt + dW_t, \quad X_0 = a$$

Die Drift $b(t,x) = \frac{N-1}{2x}$ drängt den Prozess X vom Ursprung $0 \in \mathbb{R}$ weg. Für $N \ge 2$ ist die Drift stark genug, um zu gewährleisten, dass $X_t > 0$ P-f.s., falls $X_0 \ge 0$.

(v) Geometrische BB:

$$dX_t = \alpha X_t dW_t, \quad X_0 = \xi > 0.$$

Lösung: $X_t = \xi \varepsilon_t^{\alpha W} = \xi \exp(\alpha W_t - \frac{1}{2}|\alpha|^2 t)$.

Dispersion prop. zur Auslenkung. Für $X \to 0$ ist Disp. $\to 0$, keine Bewegung, Null wird nie erreicht.

(vi) Lineare Gleichungen: $b(t,x) = A(t)x + a(t)$, $\sigma(t,x) = S(t)x + \sigma(t)$

$$\begin{aligned} dX_t &= [A(t)X_t + a(t)]\, dt + [S(t)X_t + \sigma(t)]\, dW_t \qquad (7.8) \\ &= X_t dY_t + dZ_t, \quad X_0 = \xi, \end{aligned}$$

mit $Y_t = \int_0^t A(s)ds + \int_0^t S(s)dW_s$ und $Z_t = \int_0^t a(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s$.
Hierbei $W = r$-dim BB, s, S, σ messbar, beschränkt in t, $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $a(z) \in \mathbb{R}^d$, $S(t) \in \mathbb{R}^{d\times d\times r}$, $\sigma(t) \in \mathbb{R}^{d\times r}$,
$X = d$-dim stet. Semimartingal,
$Y = d$-dim stet. Semimartingal,
$Z = d$-dim stet. Semimartingal.

Proposition 7.2.1. *a) (7.8) hat eine eindeutig bestimmte starke Lsg.*
b) Im Falle $d = 1$ ist die Lsg. durch

$$X_t = \mathcal{E}_t^Y \left(\xi + \int_0^t (\mathcal{E}_s^Y)^{-1}(dZ_s - S(s)\sigma^T(s)ds) \right)$$

gegeben, wobei $\mathcal{E}_t^Y := \exp\left(\int_0^t S(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t S(s)S^T(s)ds + \int_0^t A(s)ds \right)$.

Beweis. a) Vorheriger Existenz- und Eindeutigkeitssatz.
b) Nach der Itô-Formel und part. stoch. Integration gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_s dY_s &= \xi \int_0^t \mathcal{E}_s^Y dY_s + \int_0^t \mathcal{E}_s^Y \int_0^s (\mathcal{E}_r^Y)^{-1}(dZ_r - d\langle Z, Y\rangle_s) \\
&= -\xi + \xi\mathcal{E}_t^Y + \mathcal{E}_t^Y \int_0^t (\mathcal{E}_r^Y)^{-1}(dZ_r - d\langle Z, Y\rangle_r) \\
&- \int_0^t \mathcal{E}_r^Y (\mathcal{E}_r^Y)^{-1}(dZ_r - d\langle Z, Y\rangle_r) \\
&- \langle \mathcal{E}_s^Y, \int_0^t (\mathcal{E}_r^Y)^{-1}(dZ_r - d\langle Z, Y\rangle_r)\rangle_t \\
&= -\xi - Z_t + X_t + \langle Z, Y\rangle_t - \int_0^t \mathcal{E}_r^Y (\mathcal{E}_r^Y)^{-1} d\langle Z, Y\rangle_r \\
&= -\xi - Z_t + X_t.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.2.2. a) Sei $d = 1$ und $S \equiv 0$, d.h.

$$dX_t = A(t)X_t dt + a(t)dt + \sigma(t)dW_t.$$

Dann ist

$$X_t = \phi_t \left[X_0 + \int_s^{-1} (a(s)ds + \sigma(s)dW_s) \right]$$

mit $\phi_t = \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right)$.
Für die Lsg. x_t der gewöhnl. (= nicht-stoch.) DGl $\dot{x}_t = A(t)x_t + a(t)$ gilt:
$x_t = \phi_t \cdot \left[x_0 + \int_0^t \phi_s^{-1} a(s)ds\right]$ "Variation der Konstanten".
b) Dieselbe Formel gilt für allgemeines d, falls man

$$\phi_t := \exp\left(\int_0^t A(s)ds\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\int_0^t A(s)ds\right)^k$$

als $d \times d$-Matrix interpretiert (s. Übung).

7.3 Lokale Lösungen, Maximallösungen

Wir wollen das Bisherige in zweifacher Hinsicht verallgemeinern:

1. SDG mit lokal (nicht: global) Lischitz-stetigen Koeff. $\to$ Existenz der Lsg. nur für gewisse Zeit

2. SDG auf offenem $U \subset \mathbb{R}^d$ $\to$ Existenz der Lsg. nur für gewisse Zeit

Definition 7.3.1. *Eine Stoppzeit $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt vorhersagbar, falls eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ("ankündigenden") Stoppzeiten τ_n mit $\tau_n \nearrow \tau$ f.s. und $\tau_n < \tau$ auf $\{0 < \tau < \infty\}$ f.s. existiert.*
Schreibweise: $\tau_n \nearrow \tau$.

Beispiel 7.3.2. X stetiger Prozess, $\mathbb{R}^d$-wertig, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\neq \emptyset$.
Dann ist $\tau_U := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin U\}$ ("Austrittszeit aus U") vorhersagbare Stoppzeit.
Denn: Wähle $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : d(X_t, \complement U) \leq \frac{1}{n}\}$. Aus $\tau_U(\omega) > 0$ folgt $X_0(\omega) \in U$ und damit $\tau_n(\omega) > 0$ für ein hinreichend großes n. Hieraus folgt wiederum $\tau_n(\omega) < \tau_{n+1}(\omega) < \cdots < \tau(\omega)$. Ferner $\sup \tau_n = \tau$.

Definition 7.3.3. *Seien $U \neq \emptyset, U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\zeta > 0$ vorhersagbare Stoppzeit. Ein Prozess $Y = (Y_t)_{0\leq t<\zeta}$ heißt stetiges Semimartingal mit Werten in U und Lebenszeit ζ, falls*

(i) $Y_t(\omega) \in U$ für alle $(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ mit $t < \zeta(\omega)$.

(ii) Es existiert eine ankündigende Folge $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ζ_n mit $\zeta_n \nearrow \zeta$, so dass der gestoppte Prozess $Y^{\zeta_n} = (Y_{t\wedge\zeta_n})$ ein stetiges Semimartingal ist.

ζ heißt Explosionszeit, falls zusätzlich gilt: $Y_{\zeta_n(\omega)}(\omega) \in \partial U$ für P-f.a ω mit $\zeta(\omega) < \infty$.

Beispiel 7.3.4. Seien $(Y_t)_{0\leq t<\infty}$ stetiges Semimartingal mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. Definiere $\zeta := \tau_U :=$ Austrittszeit aus U.
Dann ist $(Y_t)_{0\leq t<\zeta}$ stetiges Semimartingal mit Werten in U und Explosionszeit ζ.
Denn: Wegen Stetigkeit von Y gilt $Y_t \to Y_{\tau_U} \in \partial U$ für $t \to \tau_U$ auf $\{\tau_U < \infty\}$ P-f.s.

Sei im Folgenden $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^d$ offen.
Wir betrachten nun die SDG

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad \text{auf } U, \\ X_0 &= \xi \in U, \end{aligned} \tag{7.9}$$

mit Borel-mb., lokal beschränkten $\mathbb{R}^d$- bzw. $\mathbb{R}^{d\times r}$-wertigen Funktionen b bzw. σ auf $\mathbb{R}_+ \times U$.

Definition 7.3.5. *Eine (starke) Maximallösung der SDG* (7.9) *auf U ist ein Semimartingal $(X_t)_{t<\zeta}$ mit Werten in U und Explosionszeit $\zeta > 0$ (f.ü.), so dass für eine ankündigende Folge $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten ζ_n gilt: X^{ζ_n} ist Lsg. der gestoppten SDG*

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)d(t \wedge \xi_n) + \sigma(t, X_t)dW_t^{\xi_n} \quad \textit{auf } \mathbb{R}^d, \\ X_0 &= \xi. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.3.6.

- ξ heißt auch *Lebenszeit* der Lsg. X.
- Für jede Maximallösung gilt f.s. auf $\{\zeta < \infty\}$:

$$X_t \to X_\zeta \in \partial U \quad \text{für } t \to \zeta$$

- Der Begriff Maximallösung ist unabhängig von der Wahl der Folge (ζ_n).

Satz 7.3.7. *Gegeben seien $U \subset \mathbb{R}^d$, offen, $U \neq \emptyset$, eine ZV ξ mit Werten in U, eine $\mathbb{R}^r$-wertige BB sowie stetige Koeff. $b(t,x), \sigma(t,x)$, die in x lok. Lipschitz-stetig seien: $\forall K \subset U\ \forall T\ \exists C$*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C \cdot |x - y| \quad (\forall x, y \in K, \forall t \in [0,T]).$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Maximallösung $X = (X_t)_{0\leq t<\zeta}$ von (7.9). *(Insbesondere ist auch ζ eindeutig bestimmt).*

Beweis. Wähle Ausschöpfung $U_n \nearrow U$ mit $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$, U_n offen, $U_n \subset U$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $b^{(n)}$ und $\sigma^{(n)}$ gobal Lipschitz-stetig, global beschränkt und so, dass $b = b^{(n)}, \sigma = \sigma^{(n)}$ auf U_n gelte. Dann existiert eine eindeutig bestimmte starke Lösung $X^{(n)}$ zu den Koeffizienten $b^{(n)}, \sigma^{(n)}$ und der Anfangsbed. ξ. Nun gilt für $m > n$: Bis zum Austritt aus U_n ist $X_\cdot^{(n)} = X_\cdot^{(m)}$ f.s. und:

$$\zeta_n = \zeta_m := \inf\{t \geq 0 : X_t^{(m)} \notin U_n\}.$$

Denn:

$$\begin{aligned} X^{(m)}_{t\wedge\zeta_n} &= \xi + \int_0^{\zeta_n\wedge t} b^{(m)}(x, X^{(m)}_s)ds + \int_0^{\zeta_n\wedge t} \sigma^{(m)}(x, X^{(m)}_s)dW_s \\ &= \xi + \int_0^{\zeta_n\wedge t} b^{(n)}(x, X^{(m)}_s)ds + \int_0^{\zeta_n\wedge t} \sigma^{(n)}(x, X^{(m)}_s)dW_s \\ &= X^{(n)}_{t\wedge\zeta_n}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \zeta_n$ ist unabh. von $m > n$
$\Rightarrow X_t := X_t^{(n)}$ ist auf $\{t < \zeta_n\}$ unabh. von n
$\Rightarrow X_t$ ist auf $\{t < \zeta\}$ wohldefiniert mit $\zeta = \sup \zeta_n = \sup \tau_{U_n}$ und $X_t \to X_\zeta \in \partial U$ für $t \to \zeta$ auf $\{\zeta < \infty\}$.
Es folgt die Eindeutigkeit. □

Korollar 7.3.8. *Seien* $f \in \mathcal{C}([0,\infty[\times U) \cap \mathcal{C}^{1,2}(]0,\infty[\times U)$ *und*

$$M_t^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + A_s f\right)(s, X_s)ds$$

mit $A_t f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i(t,x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ *und* $a_{ik} = (\sigma\sigma^T)_{ik} = \sum\limits_{j=1}^r \sigma_{ij}\sigma_{kj}$.
Dann ist $M^f = (M^f)_{t<\zeta}$ *ein stetiges, lokales Martingal mit Lebenszeit* ζ.

Korollar 7.3.9. *(Verschärfung/Ergänzung) Seien* $U = \mathbb{R}^d$ *und* b, σ *wie vorher (Lipschitz-stetig in* $x \in U$*), zusätzlich beschränkt, zeitunabhängig.* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $W = (W_t)_{t\geq 0}$ *seien vorgegeben.*
Für $x \in U$ *sei* $X^x = (X_t^x)_{t\geq 0}$ *die Lsg. der SDG (7.9) mit Startbed. x, d.h.* $X_0^x = x$ *f.s. Dann existieren Modifikationen, so dass die Abbildung* $(t,x) \mapsto X_t^x(\omega)$ *stetig in* (t,x) *ist für* $\mathbb{P}$*-f.a.* ω*. Der Prozess* $(X_t^x, \mathbb{P}, \xi^x)_{x\in U, t\geq 0}$ *ist ein Feller-Prozess (also ein starker Markov-Prozess).*

Problem: Unter welchen Vor. gibt es zu geg. $a = (a_{ik})$ ein lok. Lipschitz-stetiges $\sigma = (\sigma_{ij})$ mit $a = \sigma\sigma^T$.
Eine Antwort: Sei a symmetrisch (das ist keine Einschränkung, $\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$) und pos. semidefinit
$\Rightarrow \exists$ symm. $d\times d$-Matrix $\sigma := a^{1/2}$ mit $\sigma^2 = a$. Ist $a \in \mathcal{C}^2$, so ist σ lok. Lipschitz.

7.4 Schwache Lösungen

Sei zur Vereinfachung nun wieder $U = \mathbb{R}^d$ und $b(t,x) = b(x), \sigma(t,x) = \sigma(x)$ unabhängig von t, Borel-mb, lokal beschränkt in $x \in \mathbb{R}^d$. Betrachte die SDG

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad P \circ X_0^{-1} = \mu. \tag{7.10}$$

Definition 7.4.1. *Gegeben b, σ, μ. Eine schwache Lösung der SDG* (7.10) *ist ein Paar (X, W) auf einem filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)$, so dass gilt:*

- *W ist r-dim. $(\mathcal{F}_t)$-BB*
- *$P \circ X_0^{-1} = \mu$*
- *X ist stetiges $(\mathcal{F}_t)$-Semimartingal mit $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$.*

Definition 7.4.2. *a) Für Lösungen von* (7.10) *gilt Verteilungseindeutigkeit, wenn für je zwei schwache Lösungen (X, W) und (X', W') (auf filtrierten W-Räumen $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)$ bzw. $(\Omega', \mathcal{A}', P', \mathcal{F}_t')$) zu derselben Startverteilung μ gilt: X und X' besitzen die gleichen Verteilungen.*
b) Für Lösungen von (7.10) *gilt pfadweise Eindeutigkeit, wenn für je zwei schwache Lösungen (X, W) und (X', W) mit einer BB W auf einem filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)$ und mit gleicher Startvariable $X_0 = X_0'$ gilt: X und X' sind ununterscheidbar.*

Beispiel 7.4.3. $b \equiv 0, \sigma(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \le 0, \end{cases}$
$d = v = 1$, $dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dW_t$, $X_0 = 0$
a) Dann ist X ein stetiges Martingal mit $\langle X \rangle_t = \int_0^t (\operatorname{sgn}(X_s))^2 d\langle W \rangle_s = t$
$\Rightarrow X$ BB (stand.)
$\Rightarrow$ Es gilt Verteilungseindeutigkeit.
b) Sei X stand. 1-dim BB. Def. $W_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)dX_s$. Dann ist W eine 1-dim stand. BB.
$\Rightarrow X$ schwache Lösung zu Anfangsvert. $\mu = 0$.
c) Sei (X, W) schwache Lösung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)$
$\Rightarrow (-X, W)$ schwache Lösung auf $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}_t)$
$\Rightarrow$ keine pfadweise Eindeutigkeit.

Korollar 7.4.4. *Es seien b und σ lokal Lipschitz-stetig. Dann gilt die pfadweise Eindeutigkeit.*

Satz 7.4.5. *Aus der pfadweisen Eindeutigkeit folgt die Verteilungseindeutigkeit.*

Beweis. a) Gegeben seien zwei schwache Lösungen $(X^{(j)}, W^{(j)})$ auf W-Räumen $(\Omega^{(j)}, \mathcal{A}^{(j)}, \nu^{(j)}, \mathcal{F}_t^{(j)})$, $j = 1, 2$, von (7.10) mit

$$\mu = \nu^{(1)}(X_0^{(1)} \in \cdot) = \nu^{(2)}(X_0^{(2)} \in \cdot) \quad \text{auf } (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

Setze $Y_\cdot^{(j)} := X_\cdot^{(j)} - X_0^{(j)}$ und $Z^{(j)} := (X_0^{(j)}, W^{(j)}, Y^{(j)})$, Letzteres mit Werten in $\Theta := \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{R}^r) \times \mathcal{C}([0, \infty[, \mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d$.
Sei $P^{(j)}$ Verteilung von $Z^{(j)}$ unter $\nu^{(j)} \Rightarrow P^{(j)}$ W-Maß auf $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$.
Elemente von Θ seien mit $v = (x, w, y)$ bezeichnet.
$\Rightarrow$ Randvert. von $P^{(j)}$ in x-Variable = Vert. von $X_0^{(j)} = \mu$

Randvert. von $P^{(j)}$ in w-Variable = Vert. von $W^{(j)}$ = Wiener-Maß $\mathbb{P}_*$
$\Rightarrow$ Vert. von $P^{(j)}$ in (x,w)-Variable $= \mu \otimes \mathbb{P}_*$
Randvert. von $P^{(j)}$ in y-Variable: W-Maß mit $y_0 = 0$ f.s.
b) Es existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit

$$Q^{(j)} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{B}(\mathcal{C}^d) \to [0,1]$$

mit folg. Eigenschaften:

i) $\forall x \in \mathbb{R}^d, w \in \mathcal{C}^r : Q^{(j)}(x,w,.)$ ist W-Maß auf $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d))$

ii) $\forall F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^d) : (x,w) \mapsto Q^{(j)}(x,w,F)$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}^r)$-messbar

iii) $\forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), G \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^r), F \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$:

$$\mathbb{P}^{(j)}(H \times G \times F) = \int\limits_H \int\limits_G Q^{(j)}(x,w,F)\mu(dx)\mathbb{P}_*(dw)$$

Denn: $\mathcal{C}^d$ ist polnisch (= vollst. metrisierbar, separabel) $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}^d)$ abzählbar bestimmt $\Rightarrow \exists \hat{Q}^{(j)}(\cdot) = P^{(j)}(\cdot|\pi = \cdot)$
und $Q^{(j)}(x,w,F) = \tilde{Q}^{(j)}((x,w),\tilde{F}) = \mathbb{P}^{(j)}(\tilde{F}|\pi = (x,w))$
mit $\pi(x,w,y) = (x,w)$ Proj. $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r$
und $\tilde{F} = \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times F$.
c) Definiere: $\Omega := \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}^r \times \mathcal{C}^d \times \mathcal{C}^d$ und W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ durch

$$\mathbb{P}(dxdwdy_1dy_2) = Q^{(1)}(x,w,dy_1)Q^{(2)}(x,w,dy_2)\mu(dx)\mathbb{P}_*(dw),$$

$\mathcal{N}$ System d. $\mathbb{P}$-Nullm. in Ω, $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{B}(\Omega) \cup \mathcal{N})$,
$\mathcal{G}_t := \sigma\{(x, w(s), y_1(s), y_2(s)) : s \in [0,t]\}$, $\tilde{\mathcal{G}}t = \sigma(\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N})$ Augment.
$\mathcal{F}_t := \tilde{\mathcal{G}}_{t+}$
$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ genügt den üblichen Bedingungen
Dann gilt $\forall A \in \mathcal{B}(\Theta)$:

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : (x,w,y_j) \in A\}\right) = \nu^{(j)}\left(\left\{\left(X_0^{(j)}, W^{(j)}, Y^{(j)}\right) \in A\right\}\right)$$

$\Rightarrow$ Vert. von $(x+y_i, w)$ unter $\mathbb{P}$ = Vert. von $(X_0^{(j)}, W^{(j)})$ unter $\nu^{(j)}$
$\Rightarrow (x+y_j, w)$ ist Lsg. der SDG ($\forall j = 1,2$), def. auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$.
d) Aus pfadweiser Eindeutigkeit folgt:

$$\mathbb{P}\left[\omega = (x,w,y_1,y_2) \in \Omega : y_1 = y_2\right] = 1$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\nu^{(1)}(X^{(1)} \in .) &= \nu^{(1)}(X_0^{(1)} + Y^{(1)} \in .) = \mathbb{P}(x+y_1 \in .) = \mathbb{P}(x+y_2 \in .) \\
&= \nu^2(X_0^{(2)} + Y^{(2)} \in .) = \nu^{(2)}(X^{(2)} \in .)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Verteilungseindeutigkeit. $\square$

7.5 Schwache Lösungen und Lösungen des Martingalproblems

b, σ wie bisher: $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bzw. $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Borel-mb, lokal beschränkt, a symmetrisch, pos. semidefinit, $L := \frac{1}{2}\sum a_{ik}\partial_i\partial_k + \sum b_i\partial_i$.

Definition 7.5.1. *Ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{C}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ heißt Lösung des Martingalproblems zum Operator L, falls für alle $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt:*
$M^f = (M_t^f)_{t\geq 0}$ ist stetiges Martingal auf $(\mathcal{C}^d, \mathcal{B}(\mathcal{C}^d), \mathbb{P}, {\mathcal{F}_t}^0)$ mit

$$M_t^f(\omega) := f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t Lf(\omega(s))ds.$$

Proposition 7.5.2. *Äquivalent sind für ein W-Maß auf $\mathcal{C}^d$:*

(i) $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty : M^f$ *ist stetiges Martingal*

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}^2 : M^f$ *ist lokales stetiges Martingal*

(iii) $\forall f(x) = x_i$ *und* $f(x) = x_i x_k : M^f$ *ist lokales Martingal*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei zunächst $f \in \mathcal{C}_c^2$. Dann existieren eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}^\infty$, supp$f_n \subset K$, $f_n \to f$, $\partial_i f_n \to \partial_i f$ und $\partial_i\partial_k f_n \to \partial_i\partial_k f$ glm. auf K
$\Rightarrow M^f$ ist stet. Martingal.
Sei schließlich $f \in \mathcal{C}^2$. Dann existieren kompakte Mengen $K_n \nearrow \mathbb{R}^d$, eine Funktionenfolge$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{C}^2$, supp$f_n \subset K_n$ und $f_n = f$ auf K_n.
$\Rightarrow M^f$ ist lokales stetiges Martingal.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) [Sketch]: Zunächst gilt für alle $\Theta \in \mathbb{R}^d$ und $f(x) := \exp(\langle\Theta, x\rangle)$: M^f lokales stetiges Martingal $\Rightarrow$ (Denn: Obige f liegen dicht in $\mathcal{C}^2$ bzgl. lok. glm. Konv. von f, $\partial_i f$, $\partial_i\partial_k f$): $\forall f \in \mathcal{C}^2$: M^f lokales stetiges Martingal
(ii) $\Rightarrow$ (i): $f \in \mathcal{C}_c^2 \Rightarrow f$, $\partial_i f$, $\partial_i\partial_k f$ beschränkt $\Rightarrow M^f$ beschränkt auf $[0, T]$
$\Rightarrow M^f$ stetiges Martingal. ☐

Bemerkung 7.5.3. Für $b \equiv 0$ und $a \equiv$ id ist das "Satz von Lévy".

Satz 7.5.4. *Gegeben seien Koeffizienten b, a und Startverteilung μ. Äquivalent sind:*

(i) Es existiert eine Lösung P des Martingalproblems zu $L = \frac{1}{2}a_{ik}\partial_i\partial_k + b_i\partial_i$ mit $P(\omega(0) \in .) = \mu$.

(ii) Es existiert eine schwache Lösung (X, W) auf einem W-Raum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathcal{F}}_t)$ der SDG (7.10) *mit Startverteilung μ zu Koeffizienten b, σ mit $\sigma\sigma^T = a$.*

Der Zusammenhang zwischen (i) und (ii) ist gegeben durch: $P = \tilde{P} \circ X^{-1}$.

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i) Itô-Formel.
(i) $\Rightarrow$ (ii) [Sketch]: a) Sei X der kanonische Prozess auf $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.
Definiere: $M_t := X_t - X_0 - \int\limits_0^t b(X_s)ds$
$\Rightarrow M^{(i)} = M^f$ mit $f(x) = x_i$ ist lokales stetiges Martingal unter $(\mathbb{P}, {\mathcal{F}_t}^0)$. Für alle i, k und $f(x) = x_i x_k$ gilt: Der folgende Prozess ist ein lokales stetiges Martingal:

$$\begin{aligned} M_t^f &= X_t^{(i)} X_t^{(k)} - X_0^{(i)} X_0^{(k)} - \int\limits_0^t \left[X_s^{(i)} b_k(X_s) + X_s^{(k)} b_i(X_s) + a_{ik}(X_s) \right] ds \\ &= \cdots = M_t^{(i)} M_t^{(k)} - X_0^{(i)} M_t^{(k)} - X_0^{(k)} M_t^{(i)} - \int\limits_0^t a_{ik}(X_s) ds. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle M^{(i)} M^{(k)} \rangle = \int\limits_0^t a_{ik}(X_s)ds.$
b) Sei nun $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ Borel-messbar, $\beta(x)$ ist $d \times d$-Orthogonalmatrix mit $\tilde{a}(x) := (\beta^T a \beta)(x)$ Diagonalmatrix.
Definiere $\tilde{\sigma}(x)$ als $d \times d$-Matrix mit $\tilde{\sigma}_{ij} = \beta_{ji}\sqrt{\tilde{a}_{ii}}$
$\Rightarrow \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^T = \tilde{\sigma}^T\tilde{\sigma} = a$
c) $r := \mathrm{Rang}(\tilde{\sigma}) \leq d$; Probleme falls $< d$!
Sei E die $d \times d$-Matrix mit r Einsen auf der Diagonalen, 0 sonst.
$\Rightarrow \exists$ Orthogonalmatrix ϕ mit $\tilde{\sigma}\phi = \tilde{\sigma}\phi E$ und Matrix λ mit $\lambda\tilde{\sigma}\phi = E$.
d) Setze $N_t := \int\limits_0^t \lambda(X_s)dM_s$. Dann ist N ein stetiges, $\mathbb{R}^d$-wertiges lokales Martingal.

$$\begin{aligned} \langle N^i, N^j \rangle_t &= \sum_{kl} \int\limits_0^t \lambda_{ik}(X_s)\lambda_{jl}(X_s) d\langle M^{(k)}, M^{(l)} \rangle_s \\ &= \sum_{kl} \int\limits_0^t (\lambda_{ik} a_{kl} \lambda_{lj}^T)(X_s) ds \\ &= \int\limits_0^t (E)_{ij}(X_s) ds = \delta_{ij} \int\limits_0^t 1_{\{\mathrm{Rang}\tilde{\sigma}(X_s) \geq 1\}} ds \end{aligned}$$

Setze $Y_t := \int\limits_0^t (\tilde{\sigma}\phi)(X_s)dN_s \Rightarrow \langle Y - M \rangle = 0 \Rightarrow Y = M.$
e) Wähle nun Erweiterung $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ des W-Raums $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so dass eine BB $\tilde{W} = (\tilde{W}^1, \ldots, \tilde{W}^d)$ existiert, die unabhängig von N ist.
Definiere: $\overline{W}_t^i := N_t^i + \int\limits_0^t 1_{\{\mathrm{Rang}\tilde{\sigma}(X_s) < i\}} d\tilde{W}_s^i$
$\Rightarrow \overline{W}_t^i$ lokales Martingal, $\langle \overline{W}_t^i, \overline{W}_t^j \rangle = \delta_{ij} t$

$\Rightarrow \overline{W}$ d-dim BB
Ebenso $W_t = \int_0^t \beta(X_s) d\overline{W}_s$ (denn: $\beta(x)$ ist Orthogonalmatrix).

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= Y = (\tilde{\sigma}\phi)(X) \cdot N = (\tilde{\sigma}\phi E_r)(X) \cdot \overline{W} = (\tilde{\sigma}\phi)(X) \cdot \overline{W} \\ &= (\tilde{\sigma}\phi\beta^T)(X) \cdot W = \sigma(X) \cdot W \end{aligned}$$

mit $\sigma := \tilde{\sigma}\phi\beta^T$ ist $d \times d$ Matrix. □

Korollar 7.5.5. *Äquivalent sind:*

(i) Für alle Startverteilungen μ auf $\mathbb{R}^d$ ist die Lösung eindeutig: Es existiert höchstens ein W-Maß auf $\mathcal{C}^d$, das Lösung des Martingalproblems zu den Koeffizienten a, b und zu der Anfangsverteilung $= \mu$ ist.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist die Lösung eindeutig: Es existiert höchstens ein W-Maß auf $\mathcal{C}^d$, das Lösung des Martingalproblems zu den Koeffizienten a, b und zu der Anfangsverteilung $= \delta_x$ ist.

(iii) Für alle σ mit $\sigma\sigma^T = a$ gilt Verteilungseindeutigkeit für Lösungen der SDG zu den Koeffizienten σ, b.

Definition 7.5.6. *Das Martingalproblem zu Koeffizienten a, b ist wohlgestellt, falls gilt: $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\exists!$ Lösung P^x mit $P^x(X_0 = x) = 1$.*

Beispiel 7.5.7. Für $a = \sigma\sigma^T$ mit σ, b Lipschitz-stetig und linear beschränkt ist das Martingal-Problem wohlgestellt.

Satz 7.5.8 (Stroock, Varadhan)**.** *Es seien a glm. stetig, b, a beschränkt, a glm. elliptisch. Dann ist das Martingal-Problem wohlgestellt.*

7.6 Die starke Markov-Eigenschaft

Gegeben seien b, σ zeitunabhängig, Borel-mb, lokal beschränkt, so dass Martingalproblem wohlgestellt sei. Es seien $\Omega = \mathcal{C}^d = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$, $X_t(\omega) = \omega(t)$, ${\mathcal{F}_t}^0$ und $\mathbb{P}^x =$ Lösung des Martingalproblems.
Seien T beschränkte $({\mathcal{F}_t}^0)$-Stoppzeit, Θ_T der Shift-Operator: $\omega \mapsto \omega(\,.\,+T(\omega))$.
Es sei

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^x = \Omega \times \mathcal{A} &\to [0,1] \\ (\omega, F) &\mapsto \mathbb{Q}^x_\omega(F) \quad = \mathbb{P}^x(F|\mathcal{F}^0_T)(\omega) \end{aligned}$$

reguläre bedingten Wahrscheinlichkeit.

Lemma 7.6.1. *Es existiert eine $\mathbb{P}^x$-Nullmenge $\mathcal{N} \in \mathcal{A}$, so dass für alle $\omega \notin \mathcal{N}$ gilt: Das W-Maß $\tilde{\mathbb{P}}_\omega = \mathbb{Q}^x_\omega \circ \Theta_T$ löst das Martingalproblem zum Startpunkt $\omega(T(\omega))$.*

Beweis. Nach Definition von regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt: Es existiert eine Nullmenge $\mathcal{N}$ mit:
$\mathbb{Q}^x_\omega(F) = 1_F(\omega) \quad \forall F \in \mathcal{F}^0_{T'}, \forall \omega \notin \mathcal{N}$.
$\Rightarrow \mathbb{Q}^x_\omega(\Omega^{(\omega)}) = 1 \quad \forall \omega \notin \mathcal{N}$ mit $\Omega^{(\omega)} := \{\omega' \in \Omega : X_T(\omega') = X_T(\omega)\}$.
$\Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_\omega\left([\omega' \in \Omega : \omega'(0) = \omega(T(\omega))]\right) = \mathbb{Q}^x_\omega\left[\omega' \in \Omega : \omega'(T(\omega')) = \omega(T(\omega))\right] = 1$.
d.h Startpunkt unter $\tilde{\mathbb{P}}_\omega$ ist $\omega(T(\omega))$. □

Korollar 7.6.2. *Voraussetzungen wie eben.*
Dann gilt die starke Markov-Eigenschaft : $\forall F \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}^x\left[\Theta_T^{-1}F|\mathcal{F}^0_T\right](\omega) = \mathbb{P}^{\omega(T)}[F] \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s.}$$

Beweis. $\mathbb{P}^x\left[\Theta_T^{-1}F|\mathcal{F}^0_T\right](\omega) = \mathbb{Q}_\omega(\Theta_T^{-1}F) = \tilde{\mathbb{P}}_\omega(F) = \mathbb{P}^{\omega(T(\omega))}(F)$. □

Bemerkung 7.6.3. Man kann ferner zeigen (mit viel Aufwand) $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ ist Borel-messbar ($\forall F \in \mathcal{A}$)
$\Rightarrow (X_t, \mathbb{P}^x)$ ist starker MP.

7.7 SDG und PDG

Gegeben $\sigma = (a_{ikj}(x))_{i,k=1,\ldots,d;j=1,\ldots,r}$, $b = (b_i(x))$ beschr. Lipschitz, symm., pos. semidef., beschr., Borel-mb.
Sei $(X_t, \mathbb{P}^x)$ Lösung.

Satz 7.7.1. *Gegeben* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d)$ *mit*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu & \text{in } \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,.) = f & \text{auf } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

(Lösung des Cauchy-Problems).
Dann gilt $u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$*, insbesondere ist* u *eindeutig durch* f *bestimmt.*

Beweis. Fixiere $t_0 > 0$ und betrachte $M_t := u(t_0 - t, X_t)$. Nach der Itô-Formel gilt:

$$M_t \quad = \quad M_0 + \text{ lok. Martingal } + \underbrace{\int_0^t Lu(t_0 - s, X_s) - \frac{\partial}{\partial t}u(t_0 - s, X_s)ds}_{=0 \text{ nach Vor.}}$$

$\Rightarrow M_t$ lok. Martingal + beschr. $\Rightarrow M$ ist Martingal
$\Rightarrow u(t_0, x) = M_0 = \mathbb{E}^x[M_0] = \mathbb{E}^x[M_{t_0}] = \mathbb{E}^x[u(0, X_{t_0})] = \mathbb{E}^x[f(X_{t_0})]$. □

Satz 7.7.2. *Gegeben seien* $D \subset \mathbb{R}^d$ *und* $Z = (\{0\} \times D) \cup (\mathbb{R}_+ \times \partial D)$.
Seien $f \in \mathcal{C}_b(Z)$ *und* $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \overline{D}) \cap \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^*_+ \times D)$ *mit*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u = Lu & \text{in } \mathbb{R}^*_+ \times D, \\ u = f & \text{auf } Z. \end{cases}$$

Dann gilt: $u(t,x) = \mathbb{E}^x[f(t - t \wedge \tau_D, X_{t\wedge\tau_D})]$.

Beweis. Sei $M_t := u(t_0 - t, X_t)$ wie oben.
$\Rightarrow (M_t)_{0\le t<\tau_D}$ lok. Martingal, beschr.
$\Rightarrow (M_{t\wedge\tau_D})_{t\ge 0}$ ist Martingal
$\Rightarrow u(t_0,x) = \mathbb{E}^x[M_0] = \mathbb{E}^x[M_{t_0\wedge\tau_D}] = \mathbb{E}^x[f(t_0 - t_0 \wedge \tau_D, X_{t_0\wedge\tau_D})]$. □

<u>Divergenz-Probleme</u>

Satz 7.7.3. *Gegeben seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $\tau_D < \infty$ $\mathbb{P}^x$-f.s. $(\forall x \in D)$ und $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = 0 & \textit{in } D, \\ u = f & \textit{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann ist $u(x) = \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D})]$.

Beweis. Def. $v(t,x) := u(x) \quad \forall t \ge 0$
$\Rightarrow v$ löst $\frac{\partial}{\partial t} v = Lv$ in $\mathbb{R}_+^* \times D$
Dies impliziert:

$$\begin{aligned} u(x) = v(t,x) &= \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{t>\tau_D\}}] + \mathbb{E}^x[u(X_t) \cdot 1_{\{t\ge\tau_D\}}] \\ &\longrightarrow \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D})] + 0 \text{ für } t \to \infty, \text{ denn } \mathbb{P}^x[\tau_D < \infty] = 1. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.7.4. Ist D beschränkt und $\sigma\sigma^T$ glm. elliptisch, so ist $\tau_D < \infty$ $\mathbb{P}^x$-f.s. $\forall x \in D$. Nicht erfüllt (z.B.) für $\sigma \equiv 0$.

Satz 7.7.5 (Poisson-Problem)**.** *Gegeben seien $D \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{E}^x[\tau_D] < \infty$ $\forall x \in D$ und $g \in \mathcal{C}_b(D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = -g & \textit{in } D, \\ u = 0 & \textit{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann ist $u(x) = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_D} g(X_s)ds\right]$.

Beweis. Betrachte $M_t := u(X_t) + \int_0^t g(X_s)ds$
$\Rightarrow (M_t)_{0\le t<\tau_D}$ lok. Martingal, beschr.
$\Rightarrow (M_{t\wedge\tau_D})_{0\le t\le\infty}$ ist Martingal
$\Rightarrow u(x) = M_0 = \mathbb{E}^x[M_0] = \mathbb{E}^x[M_{\tau_D}] = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{\tau_D} g(X_s)ds\right]$. □

Bemerkung 7.7.6.

- Falls D beschr. und $\sigma\sigma^T$ glm. elliptisch, dann $\mathbb{E}^x[\tau_D] < \infty$.
- Darstellung gilt auch für $D = \mathbb{R}^d, d \geq 3$, wobei u allerdings nur eindt. mod const. (z.B. $g \in \mathcal{C}_0, u \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{C}_b^2 \dots$).

Korollar 7.7.7. *Falls $Lu = -g$ in D, $u = f$ auf ∂D, so ist*
$u(x) = \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) + \int\limits_0^{\tau_D} g(X_s) ds \right]$

Wann gilt $\mathbb{E}^x[\tau_D] < \infty$?
Ziel: Konstruiere $u \in \mathcal{C}_b^2(\overline{D})$ mit $-Au \geq 1$
$\Rightarrow \mathbb{E}^x(t \wedge \tau_D) \leq \mathbb{E}^x \left[- \int\limits_0^{t\wedge\tau_D} Au(X_s) ds \right] = -\mathbb{E}^x[u(X_{t\wedge\tau_D})] + u(x) \leq 2\|u\| < \infty$

Beispiel 7.7.8. $\sigma_{ij} = \delta_{ij}, b = 0, X =$BB, $D = B_R(0)$
$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{d}(R^2 - \|x\|^2) \Rightarrow Au = \frac{1}{2}\Delta u = -1$
$\Rightarrow \mathbb{E}^x[\tau_D] = u(x) - \lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}^x[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x) = \frac{1}{d}(R^2 - \|x\|^2)$

Lemma 7.7.9. *Falls $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ und $\delta > 0$ existieren, so dass für alle $x \in D$ gilt: $\xi a(x) \xi \geq \delta$, dann ist $\mathbb{E}^x[\tau_D] < \infty \quad (\forall x \in D)$.*

Beweis. Seien $\beta = \|b\|_\infty, \nu = 2\beta/\delta$, $u(x) = -\mu \exp(\nu\langle x, \xi\rangle) = -ue^{\nu x_1}$. OBdA: $\xi = (1, 0, \dots, 0)$
$\Rightarrow u \in \mathcal{C}_b^2(\overline{D})$

$$\begin{aligned} -Au(x) &= \mu e^{\nu\langle x_1\rangle} \cdot \left[\frac{1}{2}\nu^2 a_1(x) + \nu b_1(x) \right] \\ &\geq \mu e^{\nu x_1} \cdot \frac{1}{2}\nu\delta[\nu - 2\beta/\delta] \\ &\geq 1 \text{ auf } \overline{D} \text{ falls } \mu \text{ hinr. groß.} \end{aligned}$$

□

Satz 7.7.10 ("Schrödinger-Gleichung")**.** *Seien D wie eben, $\tau := \tau_D$, $q \in \mathcal{C}_b(D)$ mit $q \geq 0$ und $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$. Es sei $u \in \mathcal{C}_b(\overline{D}) \cap \mathcal{C}_b^2(D)$ mit*

$$\begin{cases} Lu = qu & \text{in } D, \\ u = f & \text{auf } \partial D. \end{cases}$$

Dann gilt: $u(x) = \mathbb{E}^x \left[f(X_\tau) e^{-\int\limits_0^\tau q(X_s) ds} \right]$.

Beweis. Sei $A_t := \int\limits_0^t q(X_s) ds$ und $N_t := u(X_t) e^{-A_t}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} N_t &= N_0 + \int_0^t e^{-A_s} du(X_s) + \int_0^t u(X_s) de e^{-A_s} + 0 \\ &= N_0 + \text{ lok. Martingal } - \int_0^t u(X_s) e^{-A_s} dA_s + \int_0^t e^{-A_s} Lu(X_s) ds \qquad \text{für } t < \tau \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall \tau' < \tau$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[e^{-A_{\tau'}} u(X_{\tau'}) \right] &= \mathbb{E}^x [N_{\tau'}] \\ &= u(x) - \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau'} e^{-A_s} u(X_s) q(X_s) ds \right] + \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau'} e^{-A_s} Lu(X_s) ds \right] \\ &= u(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}^x \left[e^{-A_\tau} u(X_\tau) \right] = u(x)$. □

Bemerkung 7.7.11. Statt $q \geq 0$ reicht $\mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^\tau q(X_s) ds} \right] < \infty$.

7.8 Feller-Eigenschaft

Satz 7.8.1 (Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung)**.** $\forall 0 < p < \infty \ \exists C = C(p)$ $\forall M \in \mathcal{M}_0^{loc}$

$$\frac{1}{C} \mathbb{E} \left[\langle M \rangle_\infty^{p/2} \right] \leq \mathbb{E} \left[(M_\infty^*)^p \right] \leq C \cdot \mathbb{E} \left[\langle M \rangle_\infty^{p/2} \right]$$

Hierbei $M_t^* := \sup_{s \leq t} |M_s|$.

Beweis. der 2. Ungleichung im Fall $p \geq 2$:
OBdA: M beschränkt (ansonsten $M \rightsquigarrow M^T$). Wegen $x \mapsto |x|^p$ $\mathcal{C}^2$ folgt mit Itô:

$$|M_\infty|^p = \int_0^\infty p |M_s|^{p-1} \operatorname{sgn}(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \int_0^\infty p(p-1) |M_s|^{p-2} d\langle M \rangle_s.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] &\overset{\text{Doob}}{\leq} \mathbb{E}\left[|M_\infty|^p \right] \\ &= \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty |M_s|^{p-2} d\langle M \rangle_s \right] \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \left[|M_\infty^*|^{p-2} \langle M \rangle_\infty \right] \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \frac{p(p-1)}{2} \mathbb{E} \left[|M_\infty^*|^p \right]^{\frac{p-2}{p}} \mathbb{E} \left[\langle M \rangle_\infty^{p/2} \right]^{2/p}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq \left[\frac{p^{p+1}(p-1)^{1-p}}{2}\right]^{p/2} \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right].$ □

Lemma 7.8.2 (Kolmogorov-Chentsov). *Sei $I = [0,1]^d$. Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stoch. Prozess mit Werten in einem vollst. metrischen Raum (E,δ). Falls positive Konstanten α,β,γ existieren mit*

$$\mathbb{E}\left[\delta(X_s,X_t)^\alpha\right] \leq \gamma \cdot \|s-t\|^{\alpha+\beta}$$

für alle $s,t \in I$, dann existiert eine stetige Modifikation von X.

Satz 7.8.3. *Seien σ, b Lipschitz-stetig (in x) und linear beschränkt. Dann existiert ein stochastischer Prozess*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \Omega & \to & \mathbb{R}^d \\ (x,t,\omega) & \mapsto & X_t^x(\omega) \end{array}$$

mit stetigen Pfaden (bzgl. x und t), so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $(X_t^x)_{t\geq 0}$ ist die eindeutige starke Lösung der SDG zu (b,σ) mit Anfangsbedingung x, d.h.

$$X_t^x = x + \int_0^t b(s,X_s^x)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s^x)dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. (i) Wähle $p \geq 2$ und Lösung X^x bzw. X^y der SDG mit Anfangswerten x bzw. y. Setze $h(t) = \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} |X_s^x - X_s^y|^p\right]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t}\left|[x-y] + \int_0^s [b(r,X_r^x) - b(r,X_r^y)]\,dr + \int_0^s [\sigma(r,X_r^x) - \sigma(r,X_r^y)]\,dW_r\right|^p\right] \\ &\leq 3^{p-1}\mathbb{E}\left[|x-y|^p + \sup_{s\leq t}\left|\int_0^s [b(r,X_r^x) - b(r,X_r^y)]\,dr\right|^p + \sup_{s\leq t}\left|\int_0^s [\sigma(r,X_r^x) - \sigma(r,X_r^y)]\,dW_r\right|^p\right] \end{aligned}$$

Mit BDG-Ungleichung gilt für den 3. Summanden:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\,dW_r\right|^p\right] \\
\le\ & C_p\cdot\mathbb{E}\left[\left\langle\int_0^{\cdot} [\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)]\,dW_r\right\rangle_t^{p/2}\right] \\
=\ & C_p\cdot\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t |\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)|^2\,dr\right)^{p/2}\right] \\
\overset{\text{Hölder}}{\le}\ & C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(r,X_r^x)-\sigma(r,X_r^y)|^p\,dr\right] \\
\le\ & K^p\cdot C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\cdot\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{s\le r}|X_s^x-X_s^y|^p\,dr\right] \\
=\ & K^p\cdot C_p\cdot t^{\frac{p-2}{2}}\int_0^t h(r)dr.
\end{aligned}
$$

Analog

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}\left|\int_0^s [b(r,X_r^x)-b(r,X_r^y)]\,dr\right|^p\right]\le K^p\cdot C_p\cdot t^{p-1}\int_0^t h(r)dr$$

Also insgesamt: $\exists c=c(K,p,t)$:

$$h(t)\le c|x-y|^p+c\cdot\int_0^t h(r)dr.$$

Mit Gronwall: $\exists c'=c'(K,p,t)$: $h(t)\le c'|x-y|^p$, d.h.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\le t}|X_s^x-X_s^y|^p\right]\le c'\cdot|x-y|^p. \tag{7.11}$$

(ii) Wende nun "Kolmogorov-Chentsov" an auf den Prozess $(Y_x)_{x\in I}$ mit $I=\mathbb{R}^d$ und Werten im norm. Raum $E=\mathcal{C}([0,t],\mathbb{R}^d)$:

$$
\begin{aligned}
Y_\cdot:\mathbb{R}^x\times\Omega &\to E\\
(x,\omega) &\mapsto Y_x(\omega)=X_\cdot^x(\omega)
\end{aligned}
$$

mit Norm $\|Y_x(\omega)\| = \sup\limits_{s\le t} |X_s^x(\omega)|$
(7.11) lautet: $\forall p, t : \exists c' = c'(K, p, t) : \forall x, y :$

$$\mathbb{E}\left[\|Y_x - Y_y\|^p\right] \le c' \cdot \|x - y\|^p.$$

Wähle $p > d$. Dann existiert eine stetige Modifikation $\tilde{Y}$ von Y, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \exists \text{ stetiger Prozess (in } x \text{ und } t\text{) } \tilde{X} : \mathbb{R}^d \times [0,t] \times \Omega & \to & \mathbb{R}^d \\ (x, s, \omega) & \mapsto & \tilde{X}_s^x(\omega), \end{array}$$

so dass $\tilde{X}^x$ und X^x für alle $x \in \mathbb{R}^d$ äquivalent sind (also fast sicher gleich sind). $\tilde{X}^x$ ist also Lösung der SDG mit Anfangsbedingung x (für alle x). D.h.: OBdA $X \equiv \tilde{X}$. Damit ist $(t, x) \longmapsto X_t^x(\omega)$ stetig für $\mathbb{P}$-fast alle ω. □

Seien nun b, σ nur von x abhängig. Definiere: $P_t(x, A) := \mathbb{P}(X_t^x \in A)$, $P_t f(x) := \mathbb{E}[f(X_t^x)]$.

Satz 7.8.4. *$(P_t)_{t\ge 0}$ ist Feller-Halbgruppe, d.h. es gilt: $P_t : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ und $\lim\limits_{t\to 0} P_t f = f \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$ (punktweise – oder äquivalent – gleichmäßig).*

Beweis. Wegen Stetigkeit von f und Stetigkeit von X_t^x (in x und t) ist

$$P_t f(x) = \mathbb{E} f(X_t^x)$$

stetig in x und t (major. Konvergenz). Also gilt: $P_t f \in \mathcal{C}_b$ und $\lim P_t f = f \quad (\forall f \in \mathcal{C}_b)$.
Sei nun $f \in \mathcal{C}_0$. Z.z.: $P_t f \in \mathcal{C}_0$. Nun ist

$$|P_t f(x)| \le \sup_{B_r(x)} |f| + \|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}[X_t^x \notin B_r(x)] \tag{7.12}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_t^x \notin B_r(x)] &\le r^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(|X_t^x - x|^2\right) \\ &\le \frac{2}{r^2} \mathbb{E}\left(\left| \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s \right|^2 \right) + \frac{2}{r^2} \mathbb{E}\left(\left| \int_0^t b(X_s^x) ds \right|^2 \right) \\ &\le \frac{2K^2}{r^2}(t + t^2) \end{aligned}$$

mit K Schranke für σ und b.
Wähle nun $\varepsilon > 0$ und t fix. Für r hinreichend groß ist der zweite Summand in (7.12) $\le \varepsilon/2$. Für dieses r und x hinreichend groß ist auch der erste Summand in (7.12) $\le \varepsilon/2$.
$\Rightarrow |P_t f(x)| \le \varepsilon$. □

Satz 7.8.5. *Sei* $A := \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t - I)$ *der Generator der Feller-Halbgruppe* $(P_t)_{t\geq 0}$*, d.h.*

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{C}_0 : Af := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \text{ existiert in } \mathcal{C}_0\}.$$

Dann ist $(A, \mathcal{D}(A))$ *eine Fortsetzung des Operators*

$$A_0 f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

mit $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ *und* $a = \sigma\sigma^T$*.*
M.a.W.: $\mathcal{D}(A) \supset \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$*, und für* $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ *gilt:*

$$Af = A_0 f$$

Beweis. Mit Itô-Formel gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^2$:

$$\begin{aligned} f(X_t^x) &= f(x) + M_t + \sum_{i=1}^{d} \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^x) b_i(X_s^x) ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^x) \sigma_{ik}(X_s^x) \sigma_{jk}(X_s^x) ds \\ &= f(x) + M_t + \int_0^t A_0 f(X_s^x) ds \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t A_0 f(X_s^x) ds\right] \underset{\text{major. Konv.}}{=} A_0 f(x),$$

denn $\frac{1}{t}\int_0^t (A_0 f)(X_s^x) ds \to (A_0 f)(x)$ $\mathbb{P}$-f.s. wegen Stetigkeit. □

Korollar 7.8.6. *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*

(i) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[(X_t^x - x)^{(i)}\right] = b_i(x)$

(ii) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[(X_t^x - x)^{(i)} \cdot (X_t^x - x)^{(j)}\right] = a_{ij}(x)$

<u>Interpretation:</u> Drift b entspricht der lokalen Geschwindigkeit bzw. der infinitisimalen Änderung des Erwartungswertes.
Diffusion a entspricht der infin. Änderung der Kovarianz.

Beweis. (i) Wähle $f_i(x) = x_i$ für $i = 1, \ldots, d$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_i(x) = Af_i(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f_i(x) - f_i(x)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left((X_t^x - x)^{(i)}\right). \end{aligned}$$

(ii) Wähle $f_{ij}(x) = (x_i - y_i)(x_j - y_j)$ für fixes $y \in \mathbb{R}^d$ und $i, j = 1, \ldots, d$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{ij}(y) &= Af_{ij}(y) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t f_{ij}(y) - f_{ij}(y)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left((X_t^y - y)^{(i)}(X_t^y - y)^{(j)}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 7.8.7. für schw. Lsg von SDG (Time change $\sigma \rightsquigarrow 1$).
Seien $d = 1$, $0 < \lambda \leq |\sigma(x)| \leq \frac{1}{\lambda}$ $(\forall x)$, σ messbar, $b \equiv 0$.
(Es genügen wesentlich schwächere Voraussetzungen an σ).
Betrachte SDG:

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t \quad \text{mit } \mathbb{P} \circ X_0^{-1} = \mu. \tag{7.13}$$

Lösung: Wähle beliebige 1-dim. BB $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathbb{P} \circ \tilde{X}_0^{-1} = \mu$.
Definier $\tilde{W}$ mittels (7.13):

$$\tilde{W}_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma(\tilde{X}_s)} d\tilde{X}_s.$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{W} \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(\tilde{X}_s)} ds \quad \text{und} \quad d\tilde{X}_t = \sigma(\tilde{X}_t)d\tilde{W}_t.$$

Sei T_0 Rechtsinverse zu $\langle \tilde{W} \rangle_0$, d.h.

$$T_t = \inf\{s \geq 0 : \langle \tilde{W} \rangle_s > t\}.$$

Sei $W_t := \tilde{W}_{T_t}$, $X_t := \tilde{X}_{T_t} \Rightarrow dX_t = \sigma(X_t)dW_t$ und $\langle W \rangle_t = \langle \tilde{W} \rangle_{T_t} = t \Rightarrow W$ ist 1-dim BB und $\mathbb{P} \circ X_0^{-1} = \mu$.

Bemerkung 7.8.8. Statt $\sigma(x) \geq \lambda > 0$ genügt $\frac{1}{\sigma^2} \in L^1_{\text{loc}}$, $\sigma < \infty$.
Denn: Seien $f = \frac{1}{\sigma^2} 1_K$ und K kompakt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}\left(\int_0^t f(X_s)ds\right) &= \int_0^t \int p_s(x,y)f(y)dyds \\ &\leq \int_0^t (2\pi s)^{-1/2}ds \int f(y)dy \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{t}\|f\|_1 < \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^t f(X_s)ds < \infty \quad \text{f.s.}$$

$$\Rightarrow \int_0^{t\wedge\tau_r} \frac{1}{\sigma^2(X_s)} ds < \infty \quad \text{f.s.} \quad (\forall t, \forall r)$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{1}{\sigma^2(X_s)} ds < \infty \quad \text{f.s.} \quad (\forall t)$$

Lemma 7.8.9. *$\forall$ Feller-Halbgruppe $\exists$ Halbgruppe von Markov-Kernen*

Beweis. Riesz:
$x \mapsto P_t f(x) = \int k_t(x, dy) f(y)$ stetig, also messbar $\forall f \in \mathcal{C}_0$
$\Rightarrow x \mapsto P_t f(x) = \int k_t(x, dy) f(y)$ messbar $\forall f \in \mathcal{B}_b$
$x \mapsto k_t(x, A)$ messbar $\forall A \in \mathcal{B}$ $\square$

Definition 7.8.10. *Eine Feller-Halbgruppe ist eine Familie $(P_t)_{t \geq 0}$ von linearen Operatoren auf $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ mit:*

- $P_s \circ P_t = P_{s+t} \quad (\forall s, t \geq 0)$
- *Positivität:* $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$
- *Normiertheit:* $|f| \leq 1 \Rightarrow |P_t f| \leq 1$
- *Stetig:* $P_t f \to f$ *für* $t \to 0$

Konservative Feller-Halbgruppe:

$$f \nearrow 1 \Rightarrow P_t f \nearrow 1.$$

Lemma 7.8.11. *Äquivalent sind:*

(i) Konservative Feller-Halbgruppe [Feller-Halbgruppe]

(ii) Markov-Halbgruppe auf $\mathbb{R}^d$ [Markov-Halbgruppe auf $\hat{\mathbb{R}}^d$]
mit $P_t f \in \mathcal{C}_0 \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$ und $P_t f \to f$

Beweis. Z.z.: $P_t f \to f$ pkt. (1)
$\Rightarrow P_t f \to f$ glm. (2)
a) Ann. (1). Zeige zunächst:
Beh. (2) gilt $\forall f = \alpha U_\alpha g, g \in \mathcal{C}_0, \alpha > 0$

$$U_\alpha g = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P_t g dt \qquad \text{Resolvente}$$

Dabei gilt: Wegen (1) + Halbgruppen-Eigenschaft ist $t \mapsto P_t g(x)$ rechtsstetig in $t \quad (\forall x)$
$\Rightarrow (t, x) \mapsto P_t g(x)$ messbar in (t, x) auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$
$\Rightarrow u \mapsto U_\alpha g(x)$ messbar auf $\mathbb{R}^d$ und $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha U_\alpha g(x) = g(x) \quad \forall x$
Für $x_n \to x \in \mathbb{R}^d$ gilt: $U_\alpha g(x_n) \to U_\alpha g(x)$ und für $x_n \to \infty$: $U_\alpha g(x_n) \to 0$
$\Rightarrow U_\alpha g \in \mathcal{C}_0$
b) Es gilt die Resolventengleichung ("Fubini"): $\forall \beta > \alpha > 0$:

$$U_\alpha g - U_\beta g = (\beta - \alpha) U_\alpha (U_\beta g) = (\beta - \alpha) U_\beta (U_\alpha g)$$

$\Rightarrow$ Range $\mathcal{D} := U_\alpha(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d))$ unabhängig von α,

$$\|\alpha U_\alpha g\| \leq \|g\|_\infty$$

c) Beh.: $\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$
Riesz-Darstellungssatz $\Rightarrow$ Dual-Raum von $\mathcal{C}_0$ ist Raum der endl. Maße auf $\hat{\mathbb{R}}^d$
Sei μ endl. Maß mit $\int f d\mu = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{D})$
$\Rightarrow \int f d\mu \underset{\text{major. Konv.}}{=} \lim_{\alpha\to\infty} \int \alpha U_\alpha f d\mu = 0 \quad (\forall f \in \mathcal{C}_0)$
$\Rightarrow \mu = 0$
d) Mit Fubini: $\forall f \in \mathcal{C}_0$

$$P_t U_\alpha f(x) = e^{\alpha t} \int\limits_t^\infty e^{-\alpha s} P_s f(x) ds$$

$$\Rightarrow \|P_t U_\alpha f - U_\alpha f\|_\infty \leq \left(e^{\alpha t} - 1\right) \cdot \|U_\alpha f\|_\infty + e^{\alpha t} t \|f\|_\infty \quad \to 0 \text{ für } t \to 0$$

Also: $\forall g = U_\alpha f \in \mathcal{D}$:

$$\|P_t g - g\|_\infty \to 0 \quad \text{ für } t \to 0$$

$\Rightarrow$ Wegen c): $\forall g \in \mathcal{C}_0 : \quad \|P_t g - g\|_\infty \to 0.$ □

<u>Doob- Transf.</u> Seien X_t BB. Sei $h \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$, $h > 0$ auf $\overline{D}, \Delta h = 0$ in D.
Setze $b(x) := \frac{\nabla h(x)}{h(x)}$
$\Rightarrow Z_t := \frac{h(X_t)}{h(X_0)} = \cdots = \exp \int\limits_0^t b(X_s) ds - \frac{1}{2} \int\limits_0^t |b|^2(X_s) ds \quad$ für $t < \tau_D$
$\Rightarrow$ Lsg. von $\left(\frac{1}{2}\Delta + b\nabla\right) u = 0, u = f$, ist geg. durch

$$u(x) = \mathbb{E}\left[f(X_\tau) h(X_\tau)\right] / h(x)$$

Beweis. 1) $\frac{h(X_\tau)}{h(X_0)} = Z_\tau = \ldots$
2) Betrachte Transformation $f \mapsto fh, u \mapsto uh, \ldots$
$\Rightarrow$ neuer Generator

$$\begin{aligned} Au = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\Delta(uh)\right) &= \frac{1}{h}\left(h\frac{1}{2}\Delta u + \nabla h \nabla u + u\frac{1}{2}\Delta h\right) \\ &= \frac{1}{2}\Delta u + \frac{\nabla h}{h}\nabla u. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.8.12. $D = \mathbb{R}^d \backslash \{z\}, d \geq 3,$

$$h(x) = \frac{C_d}{\|x - z\|^{d-2}} \text{ harmonisch in } D, \text{ “Green-Funktion”}$$

$b(x) = \frac{\nabla h}{h}(x) = -(d-2)\frac{x-z}{\|x-z\|^2}$
Richtung: zu z
Betrag: $\frac{1}{\|x-z\|}$

Generator: $\frac{1}{2}\Delta + b\nabla$
Halbgruppe: $q_t(x,y) = p_t(x,y)\frac{h(y)}{h(x)}$. Es gilt:

$$\int q_s(x,y)\cdot q_t(y,z)dy = \int p_s(x,y)\frac{h(y)}{h(x)}p_t(y,z)\frac{h(z)}{h(y)}dy = q_{s+t}(x,y)$$

$$\int q_t(x,y)dy = \int \frac{1}{h(x)} \underbrace{\int p_t(x,y)h(y)dy}_{\leq h(x) \text{ wegen super-harmon. in } \mathbb{R}^d} \leq 1$$

auf D, sub-Markov
Beim Treffen von z wird der Prozess gekillt. z wird getroffen wegen Drift b.

<u>Einige Wiederholungen:</u>
Sei D offen, $\mathbb{E}[\tau_D] < \infty \quad (\forall x), u \in \mathcal{C}_h^2(\overline{D})$
$\Rightarrow u(x) = \mathbb{E}[u(X_{\tau_D})] - \mathbb{E}\left[\int\limits_0^{\tau_D} Au(X_s)ds\right]$
($\Rightarrow$ Darstell. für Dircihlet-, Poisson-, ...)
Insbes. $u \geq 0$ auf $\partial D, Au \leq 0$ in $D \Rightarrow u \geq 0$ in D.
Sei $\mathbb{E}\tau_{B_R} < \infty \quad (\forall x, \forall B_R = B_R(0))$ und $u \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d), Au \geq 0$

$$\begin{aligned}
\underset{\text{maj. Konv.}}{\Rightarrow} u(x) &= -\mathbb{E}\left[\int\limits_0^\infty Au(X_s)ds\right] \\
&= -\int\limits_0^\infty \mathbb{E}[(Au)(X_s)]ds \\
&= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^d} (Au)(y)p_t(x,dy)ds \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^d} (Au)(y)g(x,dy).
\end{aligned}$$

<u>Achtung</u>: Falls $d \leq 2$: $\exists u \neq 0, u \in \mathcal{C}_0^2$ mit $\frac{1}{2}\Delta u \geq 0$ (Rekurrenz)
<u>Ann.</u> $u \neq 0$, d.h. $\exists \varepsilon > 0, D$ offen, $\neq \emptyset : \frac{1}{2}\Delta u \geq \varepsilon 1_D$
$\Rightarrow \mathbb{E}\int\limits_0^\infty Au(X_s)ds \geq \varepsilon\mathbb{E}\underbrace{\int\limits_0^\infty 1_D(X_s)ds}_{0+\infty \text{ f.s.}}$
Falls $d \geq 3$:

$$g(x,dy) = g(x,y)dy \quad \text{mit}$$

$g(x,y) = \int\limits_0^\infty p_t(x,y)dt = c_d \cdot \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}}$

Also $\forall w \in \mathcal{C}_C : \exists! u \in \mathcal{C}_0^2 : -\frac{1}{2}\Delta u = w$

Hierfür $u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} w(y)g(x,y)dy = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^\infty w(X_s)ds\right]$.

7.9 Die starke Markov Eigenschaft

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ W-Raum, der den üblichen Bedingungen genüge, (W_t) BB.
Seien b, σ und (X_t) Lösung der SDG (rechtsstetig in t!). $(P_t)_{t\geq 0}$ Feller-Halbgruppe auf $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
Verwende:

- Elementare ME
$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t] = P_s f(X_t)$$
- $X_.$ rechtsstetig, Feller-Stetigkeit: $f(.), P_t f(.)$

Satz 7.9.1. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt die starke Markov-Eigenschaft: Für jede Stoppzeit T, jedes $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ und jedes $s \geq 0$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+s})|\mathcal{F}_T\right] = P_s f(X_T) \tag{7.14}$$

Bemerkung 7.9.2.

- Beide Seiten sind Zufallsvariablen.
- Auf $\{T = \infty\}$ ist $X_T := \infty \in \hat{\mathbb{R}}^d \setminus \mathbb{R}^d$ mit $f(\infty) := 0$.
- (7.14) gilt ebenso für alle beschr., messb. f (sowie für alle nichtneg., messb. f), falls $T < \infty$ bzw. falls man $f(X_\infty) := 0$ setzt.
- Wegen $P_s f(x) = \mathbb{E}f(X_s^x)$ läßt sich die rechte Seite von (7.14) schreiben als
$$P_s f(X_T^x)(\omega_0) = \mathbb{E}f\left(X_s^{X_T^x(\omega_0)}\right)$$
- Es seien Ω der Standard-Pfadraum $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ und $\Theta_T : \Omega \to \Omega, \Theta_T(\omega) = (t \mapsto \omega(t + T(\omega)))$, der Shift-Operator. Ferner sei Y eine beschränkte und $\mathcal{F}^0$-messbare Z.V. Dann gilt:
$$\mathbb{E}\left[Y \circ \Theta_T|\mathcal{F}_T\right] = \mathbb{E}^{X_T}[Y]$$
(obige Gleichung (7.14): $Y = f(X_s)$)

Beweis. Sei $T_n := \frac{[2^n T]+1}{2^n}$. Dann: $T_n \searrow T$, T_n Stoppzeit mit Werten in $D = \{k \cdot 2^{-m} : k, m \in \mathbb{N}\}$ (dyadische Zahlen), $\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_{T_n})$.
Sei $\Lambda \in \mathcal{F}_T \Rightarrow \forall d \in D : \Lambda_d := \Lambda \cap \{T_n = d\} \in \mathcal{F}_d$. Anwend. der gewöhnlichen ME für $t = d$ liefert:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Lambda_d} f(X_{d+s})d\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left[1_{\Lambda_d} \cdot \mathbb{E}[f(X_{d+s})|\mathcal{F}_d]\right] \\ &\overset{\text{ME}}{=} \mathbb{E}\left[1_{\Lambda_d} \cdot P_s f(X_d)\right]\end{aligned}$$

Aufsummieren der möglichen Werte von T_n liefert:

$$\int_\Lambda f(X_{T_n+s})d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[1_\Lambda \cdot P_s f(X_{T_n})\right].$$

Die Stetigkeit von $x \longmapsto f(x)$ und $x \longmapsto P_s f(x)$ sowie die Rechtsstetigkeit von $t \longmapsto X_t$ liefern (für $n \to \infty$):

$$\int_\Lambda f(X_{T+s})d\mathbb{P} = \int_\Lambda P_s f(X_T)d\mathbb{P}.$$

Da dies für alle $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ gilt und $P_s f(X_T)$ $\mathcal{F}_T$-messb. ist, folgt:

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+s})|\mathcal{F}_T\right] = P_s f(X_T).$$

$\square$

Korollar 7.9.3. *Für jede Stoppzeit T ist $(\mathbb{P}^x, X_{T+t})_{x\in\mathbb{R}^d, t\geq 0}$ ein (starker) Markov-Prozess mit Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.*

Beweis. Wende (7.14) an mit $T+t$ statt T:

$$\mathbb{E}\left[f(X_{T+t+s}|\mathcal{F}_{T+t})\right] = P_s f(X_{T+t})$$

$\mathbb{E}\left[f(X_{T+t+s}|\mathcal{F}_{T+t})\right] = \mathbb{E}\left[f(Y_{t+s})|\mathcal{G}_t)\right]$
$P_s f(X_{T+t}) = P_s f(Y_t)$
Also Prozess $Y_t := X_{T+t}$, Filtration $G_t = \mathcal{F}_{T+t}$, Halbgruppe (P_t) $\square$

Kapitel 8

BB und Dirichlet-Problem für den Laplace-Operator

8.1 BB als starker Markov-Prozess

Betrachte BB im $\mathbb{R}^d$ (vieles analog für allgem. Feller-Prozesse)
OBdA kanonisches Modell: $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, $X_t(\omega) = \omega(t)$ Proj., $\mathbb{P} = \mathbb{P}^0$ Wiener Maß für Start in $0 \in \mathbb{R}^d$
$\rightsquigarrow (X_t + x)_{t \geq 0}$ BB, startend in x (unter $\mathbb{P}^0$)
$\rightsquigarrow \mathbb{P}^x =$ Bildmaß von $\mathbb{P}^0$ unter Abb. $\omega \mapsto \omega + x$
$\rightsquigarrow (X_t)$ BB, startend in x unter $\mathbb{P}^x$
Sei $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ (ohne Augmentierung)
Markov-Eigenschaft $\forall x, \forall s, t, \forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathbb{P}^x$-f.s.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x\left[f(X_{s+t})|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}^x\left[f(X_{s+t})|X_s\right] \\ &= \mathbb{E}^{X_s}[f(X_t)] \\ &= P_t f(X_s) \end{aligned}$$

("Abh. von Vergangenheit=Abh. von Gegenwart")
Vorletzter Term:
$\mathbb{E}^{X_s}[f(X_t)](\omega) = \int\limits_{\Omega} f(X_t(\omega'))\mathbb{P}^{X_s(\omega)}(d\omega')$
Sei $\Theta_t : \Omega \to \Omega, (\Theta_t(\omega))(s) = \omega(s+t)$ Shift, messbar,
$\Rightarrow X_t \circ \Theta_s = X_{s+t}$
Markov-Eigenschaft: $\forall \mathcal{F}_\infty$-messbaren Z.V. $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ (beschränkt oder ≥ 0), $\forall s, \forall x : \mathbb{P}^x$-f.s.

$$\mathbb{E}^x\left[Z \circ \Theta_s|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}^x\left[Z \circ \Theta_s|X_s\right] = \mathbb{E}^{X_s}[Z].$$

Hieraus folgt starke Markov-Eigenschaft: $\forall$ Stoppzeiten S, $\forall t \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\forall x$: $\mathbb{P}^x$-f.s. auf $\{S < \infty\}$:

$$\mathbb{E}^x\left[f(X_{S+t})|\mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}^x\left[f(X_{S+t})|X_S\right] = \mathbb{E}^{X_S}\left[f(X_t)\right] = P_t f(X_S)$$

und allgemein: $\forall$ Stoppzeiten S, $\forall Z \in \mathcal{B}_b(\Omega)$, $\forall x$: $\mathbb{P}^x$-f.s. auf $\{S < \infty\}$

$$\mathbb{E}^x\left[Z \circ \Theta_S | \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}^x\left[Z \circ \Theta_S | X_S\right] = \mathbb{E}^{X_S}[Z].$$

(Bem: Statt $\mathbb{P}^x$ kann man auch $\mathbb{P}^\nu$ für bel. W-Maß ν auf $\mathbb{R}^d$ wählen.)

Beispiel 8.1.1. $Z = f(X_T)$ mit Stoppzeit T.

Definition 8.1.2. *Für alle Stoppzeiten T definiere man einen Sub-Markov-Kern (-Operator) durch:*

$$P_T(x, A) := \mathbb{P}^x(X_T \in A, T < \infty)$$

$$P_T(x) := \mathbb{E}^x[f(X_T) \cdot 1_{\{T<\infty\}}].$$

Lemma 8.1.3. *Für alle Stoppzeiten S, T gilt:*

$$P_S \circ P_T = P_{S+T\circ\Theta_S}$$

Beweis. 1) $S + T \circ \Theta_S$ ist Stoppzeit.
" = 1. Eintreffen von T nachdem S eingetroffen ist"
2) $f(X_T) \circ \Theta_S = f(X_T \circ \Theta_S) = f(X_{S+T\circ\Theta_S})$
3) Zur Vereinfachung: Es sei $S < \infty, T < \infty, S + T \circ \Theta_S < \infty$. Dann:

$$\begin{aligned}
(P_S \circ P_T)f(x) &= \mathbb{E}^x[P_T f(X_S)] \\
&= \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_S}[f(X_T)]] \\
&\overset{\text{SME}}{=} \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^x[f(X_T) \circ \Theta_S | \mathcal{F}_S]] \\
&= \mathbb{E}^x[f(X_T) \circ \Theta_S] \\
&\overset{2)}{=} P_{S+T\circ\Theta_S} f(x).
\end{aligned}$$

□

8.2 Die Mittelwerteigenschaft

Definition 8.2.1. *Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $u : D \to \mathbb{R}$ messbar und λ^d-integr. (oder ≥ 0). Man sagt, dass u die Mittelwerteigenschaft besitzt, wenn für alle $\overline{B_r(x)} \subset D$ und für λ^1-f.a. $s < r$ gilt:*

$$u(x) = \int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\sigma_s(dy).$$

Dabei bezeichne σ_s das norm. Oberflächenmaß auf $\partial B_s(x)$.

Bemerkung 8.2.2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r(x)} u(y)\lambda(dy) &= \int\limits_0^r \left[\int\limits_{\partial B_s(x)} u(y)\sigma_s(dy)\right] \cdot c_n \cdot s^{n-1} ds \\
&= u(x) \cdot \lambda(B_r(x)),
\end{aligned}$$

d.h. $u(x) = \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} u(y)\lambda(dy) \; \forall \overline{B_r}(x) \subset D$.

Proposition 8.2.3. *Es seien D offen, $f : \partial D \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt (oder ≥ 0), $u(x) := \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) 1_{\{\tau_D < \infty\}} \right]$ mit $\tau_D := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}$. Dann erfüllt u MWE in D, ist messbar und beschränkt (oder ≥ 0).*

Beweis. Sei $B := B_r(x)$, $\overline{B} \subset D \Rightarrow \tau_B < \infty$ f.s. Damit gilt:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) | \mathcal{F}_{\tau_B} \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \circ \Theta_{\tau_B} | \mathcal{F}_{\tau_B} \right] \right] \\ &\overset{\text{SME}}{=} \mathbb{E}^x \left[\mathbb{E}^{X_{\tau_B}} \left[f(X_{\tau_D}) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[u(X_{\tau_B}) \right] \\ &= \int\limits_{\partial B} u(y) \sigma_r(dy). \end{aligned}$$

□

Proposition 8.2.4. *Es sei $u : D \to \mathbb{R}$ messbar, lokal integrierbar und erülle MWE. Dann gilt:*

$$u \in \mathcal{C}^\infty(D) \text{ und } \Delta u = 0 \text{ in } D.$$

("Das heißt: u ist harmonisch.")

Beweis. Sei $g_\varepsilon(s) := \begin{cases} c_\varepsilon \cdot e^{\frac{1}{s^2 - \varepsilon^2}} & , s < \varepsilon \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$

Dabei sei c_ε so gewählt, dass $\int g_\varepsilon(\|x\|)\lambda(dx) = 1$ gelte.
Def. $u_\varepsilon(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(y) g_\varepsilon(\|x - y\|) dy$: "Glättung von u".
Für $D_\varepsilon := \{y : \overline{B_\varepsilon(y)} \subset D\}$ gilt: $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(D_\varepsilon)$.
Mit MWE folgt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in D_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int\limits_0^\varepsilon \left[\int\limits_{\partial B_s(x)} u(y) g_\varepsilon(s) \sigma_s(dy) \right] c_n \cdot s^{n-1} ds \\ &= u(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^\infty(D)$.
Zeige: $\Delta u = 0$ in D.
Taylor-Entwicklung in Umgebung von $\overline{B_r(x)} \subset D$:

$$u(y) = u(x) + \sum_i (y_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + o(\|x - y\|^2)$$

Integration über $\partial B_r(x)$ gibt (wegen Antisymmetrie von $y_i - x_i$ und $(y_i - x_i)(y_j - x_j)$ für $i \neq j$):

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\sigma_r(dy) &= u(x) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) \int\limits_{\partial B_r(x)} |y_i - x_i|^2 \sigma_r(dy) + \sigma(r^2) \\ &= u(x) + \frac{r^2}{2d}\Delta u(x) + o(r^2).\end{aligned}$$

Mit MWE: $\int\limits_{\partial B_r(x)} u(y)\sigma_r(dy) = u(x) \quad (\forall r)$ und daher $\Delta u(x) = 0$. □

Satz 8.2.5. *Für alle offenen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}^d$, alle $f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: Es sei $u(x) := \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{\tau_D < \infty\}} \right] + \alpha \cdot \mathbb{P}^x[\tau_D = \infty]$. Dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty(D)$ und $\Delta u = 0$ in D.*

Beweis. Zunächst $\alpha = 0$. Dann gilt: $u \in \mathcal{B}_b(D)$, u erfüllt MWE. Daher folgt die Behauptung.
Für $\alpha \neq 0$: Setze $f \equiv \alpha$ auf ∂D. Dann ist

$$\alpha \cdot \mathbb{P}^x[\tau_D = \infty] = \alpha - \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{\tau_D < \infty\}} \right]$$

harmonisch. □

8.3 Randregularität

Definition 8.3.1. *Es seien $\tau_D := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}, \tau_D^* := \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$*

Lemma 8.3.2. *(i) $\forall x \in D$: $\tau_D^* = \tau_D > 0 \quad \mathbb{P}^x$-f.s.*

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^d \backslash \overline{D}$: $\tau_D^* = \tau_D = 0 \quad \mathbb{P}^x$-f.s.
$\forall x \in \partial D$: $\tau_D = 0 \quad \mathbb{P}^x$-f.s.

(iii) $\forall x \in \partial D$: $\mathbb{P}^x\{\tau_D^* = 0\} = 1$ oder $\mathbb{P}^x\{\tau_D^* = 0\} = 0$

Beweis. (i), (ii) gelten wegen der Stetigkeit von X.
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$\{\tau_D^* = 0\} \in \mathcal{F}_{0+} \subset \mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^x}$$

Nun gilt für alle $A \in \mathcal{F}_0^{\mathbb{P}^x}$: $\mathbb{P}^x(A) = 0$ oder $\mathbb{P}^x(A) = 1$ ("Blumenthal'sches 0-1-Gesetz"), denn $\forall B \in \mathcal{F}_0 : \mathbb{P}^x(B) = 0$ oder $\mathbb{P}^x(B) = 1$ □

Definition 8.3.3. *$z \in \partial D$ heißt regulär (für BB in D), wenn gilt:*

$$\mathbb{P}^z\{\tau_D^* = 0\} = 1$$

. Andernfalls heit z irregulär.

Bemerkung 8.3.4. (i) Irreguläre Randpunkte verhalten sich wie innere Punkte von D.
(ii) $\mathbb{P}^x\{X_{\tau_D} \in (\partial D)_{\text{irr}}\} = 0 \quad (\forall x \in D)$.

Beispiel 8.3.5. $d = 1$: Jeder Punkt $z \in \partial D$ ist regulär.
$d \geq 2$: $D = B_r(x_0)\backslash\{x_0\}$
$\Rightarrow x_0$ ist irregulär, da $\mathbb{P}^{x_0}$-f.s. gilt: $\tau_D^* = \tau_{B_r(x_0)} > 0$

Satz 8.3.6. *Seien $D \subset R^d$ offen, $d \geq 2$, $z \in \partial D$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\forall f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ *mit* f *stetig in* z *gilt:*

$$\lim_{x \to z, x \in D} \mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{\tau_D < \infty\}} \right] = f(z). \tag{8.1}$$

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ *gilt* (8.1)

(iii) $\tau_D^* = 0 \quad \mathbb{P}^z$*-f.s. ("z ist regulär")*

(iv) $\forall t > 0 : \lim\limits_{x \to z, x \in D} \mathbb{P}^x\{\tau_D > t\} = 0.$

Beweis. Es gilt: (i) $\Rightarrow$ (ii)
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei oBdA $\tau_D^* < \infty$ ($\mathbb{P}^x$-f.s. $\forall x$). Annahme: (iv) gelte nicht.
Dann folgt: $\mathbb{P}^z(\tau_D^* = 0) = 0$, ferner (wegen $d \geq 2$):

$$\lim_{r \searrow 0} \mathbb{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) = \mathbb{P}^z(X_{\tau_D^*} = z) = 0.$$

Wähle $r > 0$ mit $\mathbb{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) < \frac{1}{4}$ und setzte $r_n := 2^{-n} r$, $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin B_{r_n}(z)\}$
$\Rightarrow \mathbb{P}^z(\tau_n \searrow 0) = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}^z(\tau_n < \tau_D^*) = 1$
Auf $\{\tau_n < \tau_D^*\}$ gilt: $X_{\tau_n} \in D$. Für n groß genug ist $\mathbb{P}^z(\tau_n < \tau_D^*) \geq \frac{1}{2}$ und daher:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} &> \mathbb{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) \\
&\geq \mathbb{P}^z(X_{\tau_D^*} \in B_r(z), \tau_n < \tau_D^*) \\
&= \mathbb{E}^z(1_{\{\tau_n < \tau_D^*\}} \cdot \mathbb{E}^z(1_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*}) | \mathcal{F}_{\tau_n})) \\
&\overset{\text{SME}}{=} \mathbb{E}^z(1_{\{\tau_n < \tau_D^*\}} \cdot \mathbb{E}^{X_{\tau_n}}(1_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*}))) \\
&\geq \tfrac{1}{2} \cdot \inf_{x \in D \cap \partial B_{r_n}(z)} \mathbb{E}^x(1_{B_r(z)}(X_{\tau_D^*}))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists x_n \in D \cap \partial B_{r_n}(z)$: $\mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D^*} \in B_r(z)) < \frac{1}{2}$
Wähle $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$, $f \leq 1$, $f \equiv 0$ auf $\complement B_r(z)$, f stetig in z, $f(z) = 1$. Hierfür gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbb{E}^{x_n} f(X_{\tau_D}) &\leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \mathbb{P}^{x_n}(X_{\tau_D} \in B_r(z)) \\
&\leq \frac{1}{2} < f(z)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Für $0 < \delta < \varepsilon$ seien

$$g(x) := \mathbb{P}^x(X_s \in D \ \forall 0 < s \le \varepsilon) = \mathbb{P}^x(\tau_D^* > \varepsilon)$$

und

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &:= \mathbb{P}^x(X_s \in D \ \forall \delta \le s \le \varepsilon) \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^{X_\delta}[1_{\{\tau_D > \varepsilon - \delta\}}]] \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^y[1_{\{\tau_D > \varepsilon - \delta\}}] p_\delta(x,y)dy \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_\delta$ ist $\mathcal{C}^\infty$,
$\Rightarrow g_\delta \searrow g$
$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{x \to z, x \in D}} \mathbb{P}^x[\tau_D > \varepsilon] = \overline{\lim\limits_{x \to z, x \in D}} g(x) \le g(z) \overset{\text{(iii)}}{=} 0.$
(iv) $\Rightarrow$ (i): $\forall r > 0 \ \forall x$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(|X_{\tau_D} - x| < r) &\ge \mathbb{P}^x(\{\max_{0 \le t \le \varepsilon} |X_t - x| < r\} \cap \{\tau_D \le \varepsilon\}) \\ &\ge \underbrace{\mathbb{P}^0(\{\max_{0 \le t \le \varepsilon} |X_t| < r\})}_{\to 1 \text{ für } \varepsilon \searrow 0} - \underbrace{\mathbb{P}^x\{\tau_D > \varepsilon\}}_{\to 0 \text{ für } \varepsilon \text{ fix, } x \to z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to z, x \in D} \mathbb{P}^x(|X_{\tau_D} - x| < r) = 1 \quad (\forall r > 0)$$

Falls f beschränkt auf ∂D und stetig in z ist, gilt:

$$\lim_{x \to z, x \in D} \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D})] = f(z).$$

□

Lemma 8.3.7 (Barriere-Kriterium)**.** *Seien D offen, beschränkt und $z \in \partial D$. Wenn eine "Barriere in z" existiert, d.h., wenn ein $u \in \mathcal{C}(\overline{D})$ existiert mit $\Delta u = 0$ in D, $u > 0$ in $\overline{D} \backslash \{z\}$ und $u(z) = 0$, dann ist z regulär.*

Beweis. Wir zeigen (ii) aus dem vorigen Satz: Geg. $f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle δ mit $|f(x) - f(z)| < \varepsilon \ \forall x \in B_\delta(z) \cap \partial D$. Seien $M := \|f|_{\partial D}\|_\infty$ und $k := 2M / \inf\limits_{x \in D \backslash B_\delta(z)} u(x) < \infty$.
$\Rightarrow |f(x) - f(z)| \le \varepsilon + k \cdot u(x) \quad (\forall x \in \partial D)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\mathbb{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| &\le \varepsilon + k \cdot \mathbb{E}^y[u(X_{\tau_D})] \\ &= \varepsilon + k \cdot u(y) \quad (\forall y \in D) \end{aligned}$$

wegen $u \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$, $\Delta u = 0$ in D, D beschränkt.
Da u stetig ist und $u(z) = 0$ gilt, folgt:

$$\overline{\lim_{y \to z, y \in D}} |\mathbb{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| \le \varepsilon$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist, gilt schließlich:

$$\overline{\lim_{y\to z, y\in D}} |\mathbb{E}^y[f(X_{\tau_D})] - f(z)| = 0.$$

$\square$

Satz 8.3.8. *(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $z \in \partial D$ Endpunkt einer (einfachen) Kurve in $\mathbb{R}^2 \backslash D$. Dann ist z regulär.*
(ii) Insbesondere also: Ist D einfach zusammenhängend, so sind alle Punkte $z \in \partial D$ regulär.

Beweis. (i) Regularität ist lokale Eigenschaft. Daher sei oBdA $\overline{D} \subset B_1(0)$, $z = 0 \in \partial D$, γ Kurve mit $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 \in \complement B_1(0)$.
Betrachte die holomorphe Funktion $f(\xi) = -\frac{1}{\log \xi}$ auf $D \subset \mathbb{C}$ mit geeignetem Zweig des Logarithm.
$\Rightarrow u((x_1, x_2)) := \mathrm{Re} f(x_1 + ix_2)$ ist harmonisch in D, stetig auf $\overline{D}$, mit $u((0,0)) = 0$ und $u > 0$ auf $\overline{D} \backslash \{(0,0)\}$
$\Rightarrow (0,0)$ ist regulär. $\square$

Beispiel 8.3.9. $d \geq 3$: Lebesgue'scher Dorn
Sei $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strikt wachsend, $h(0) = 0$, $\frac{h(r)}{r}$ wachsend (für kleine r),
$D = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1 < 0 \text{ oder } h(x_1) < \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_d^2}\}$

Satz 8.3.10. 0 *ist regulär* $\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \left(\frac{h(r)}{r}\right)^{d-3} \frac{dr}{r} = \infty \quad (d > 3)$$

bzw.

$$\int_0^1 \left(\log \frac{h(r)}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{r} = \infty \quad (d = 3).$$

Proposition 8.3.11. *$z \in \partial D$ ist regulär, falls eine äußere Kegelbed. erfüllt ist (Zaremba):*
$\exists y \in \mathbb{R}^d$, $|y| = 1$, $\exists \Theta \in]0, \pi[$, $\exists r > 0 : (z + C(y, \Theta)) \cap B_r(z) \subset \complement D$ *mit* $C(y, \Theta) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle \geq \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \Theta\}$

Beweis. OBdA sei: $z = 0$, $C(y, \Theta) \subset \complement D$.
$\Rightarrow \mathbb{P}^0[X_t \in C(y, \Theta)] = \frac{\text{Fläche}(\Theta)}{\text{Fläche}(\pi)} = c(\Theta)$
$\Rightarrow \mathbb{P}^0[\tau_D^* \leq t] \geq \mathbb{P}^0[X_t \in C(y, \Theta)] = c(\Theta) \quad (\forall t)$
$\Rightarrow \mathbb{P}^0[\tau_D^* = 0] \geq c(\Theta) > 0.$ $\square$

8.4 Stochastisches Randverhalten

Satz 8.4.1. *Für alle $T_n \nearrow \tau_D$, $T_n \leq T_{n+1} < \tau_D$ gilt:*

$$u(X_{T_n}) \to f(X_{\tau_D}) \quad \mathbb{P}^x\text{-}f.s. \quad (\forall x \in D)$$

Beweis. Def. $M_\infty = f(X_{\tau_D})$, $M_n = u(X_{T_n})$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_n = u(X_{T_n}) &= \mathbb{E}^{X_{T_n}}[f(X_{\tau_D})] \\ &= \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D}) \circ \Theta_{T_n} | \mathcal{F}_{T_n}] \\ &= \mathbb{E}^x[M_\infty | \mathcal{F}_{T_n}] \end{aligned}$$

$\Rightarrow (M_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ ist Martingal (unter $\mathbb{P}^x$)
$\Rightarrow M_n \to M_\infty \quad \mathbb{P}^x$-f.s. □

Korollar 8.4.2. *Es gilt:* $\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = f(X_{\tau_D}) \quad \mathbb{P}^x$*-f.s.* $\quad (\forall x \in D)$

Korollar 8.4.3. $\forall f \in \mathcal{B}_b(\partial D)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:* $\exists! u \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{B}_b(D)$*:* $\Delta u = 0$ *in* D,
$\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = f(X_{\tau_D})$ *f.s. auf* $\{\tau_D < \infty\}$ *und*
$\lim\limits_{t \nearrow \tau_D} u(X_t) = \alpha$ *f.s. auf* $\{\tau_D = \infty\}$.

Korollar 8.4.4. $X_{\tau_D} \in (\partial D)_{reg} \quad \mathbb{P}^x$*-f.s.* $\quad (\forall x \in D)$

Satz 8.4.5. $\forall f \in \mathcal{C}_b(\partial D)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*:* $\exists! u \in \mathcal{C}_b(D) \cap \mathcal{C}^\infty(D)$*:* $\Delta u = 0$ *in* D,
$\lim\limits_{x \to \infty, x \in D} u(x) = \alpha$ *und*
$\lim\limits_{x \to \infty, x \in D} u(x) = f(z) \quad (\forall z \in (\partial D)_{reg})$.

Nämlich: $u(x) = \mathbb{E}^x[f(X_{\tau_D}) \cdot 1_{\{\tau_D < \infty\}}] + \alpha \cdot \mathbb{P}^x\{\tau_D = \infty\}$.
Nachtrag Schw. Lsg von SDG

Beispiel 8.4.6 (Drift Elimination $b \rightsquigarrow 0$)**.** Sei N beliebig, $b : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Borel-mb, beschränkt. Betrachte SDG

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t \tag{8.2}$$

Lösung: Wähle beliebige N-dim BB $(X_t)_t$ auf bel. filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ mit vorgeg. Startverteilung $\mathbb{P} \circ X_0^{-1} = \mu$.
Def. $W_t := X_t - \int\limits_0^t b(X_s)ds \quad (-X_0)$
(entsprechend (8.2)) sowie

$$Z_t = \exp\left(\int\limits_0^t b(X_s)dX_s - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \|b(X_s)\|^2 ds \right).$$

Dann gilt nach Cameron-Martin-Girsanov-Marnyama:
$\forall T > 0$ ist $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ eine (stand.) BB auf dem filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ mit $\mathbb{Q}_T = Z_T \cdot \mathbb{P}$. Daher ist $(X, W)_{0 \leq t \leq T}$ eine schwache Lösung der SDG (8.2).

Bemerkung 8.4.7. Statt b beschränkt reicht nach Novikov:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|b(X_s)\|^2 ds\right)\right) < \infty \quad (\forall t)$$

Hierfür wiederum genügt nach Lemma von Khas'minskir:

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x\left(\int_0^t \|b(X_s)\|^2 ds\right) < 1.$$

(Hierbei bezeichnet$\mathbb{E}^x$ Erw. einer in x startenden BB (X_t)).

Beispiel 8.4.8. Falls $|b(x)| \leq C_1 + C_2 \cdot \frac{1}{|x|^\alpha}$ mit $\alpha < 1$ gilt, so sind diese Bedingungen erfüllt.

<u>Allgemeine Drift-Elimination:</u>
Betrachte SDG

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \tag{8.3}$$

b beschr., Borel-mb: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, σ, σ^{-1} beschr., Borel-mb: $\mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$
<u>Annahme:</u> Es existiert schwache Lösung (X, V) (auf geeign. filtr. W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$) zu vorgeg. Anfangsbed. $\mathbb{P} \circ X_0^{-1} = \mu$, Lösung von

$$dX_t = \sigma(X_t)dV_t, \quad V \text{ BB} \tag{8.4}$$

("driftfreie Gleichung")
Def. $W_t := V_t - \int_0^t (\sigma^{-1}b)(X_s)ds$ und
$Z_t := \exp\left(\int_0^t (\sigma^{-1}b\sigma^{-1})(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma^{-1}b\|^2(X_s)ds\right)$.
Dann ist (X, W) schw. Lsg. der SDG (8.3) auf $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q}_T, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T})$ mit $\mathbb{Q}_T = Z_T \cdot \mathbb{P}$.

Beweis. (1) (X, W) löst die SDG (8.3), denn

$$\begin{aligned}
\sigma(X_s)dW_t &= \sigma(X_s)dV_t - \sigma(X_s)(\sigma^{-1} \cdot b(X_s))ds \\
&= \sigma(X_s)dV_t - b(X_s)ds \\
&= dX_t - b(X_s)ds.
\end{aligned}$$

(2) W ist BB unter $\mathbb{Q}_T$, denn
$W_t = V_t - \int_0^t A_s ds$,
$Z_t = \exp\left[\int_0^t A_s dV_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|A\|^2 ds\right]$ mit $A_s = \sigma^{-1}(X_s)b(X_s)$,
$\Rightarrow Z_t = \exp\left[\int_0^t (\sigma^{-1}b\sigma^{-1})(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma^{-1}b\|^2(X_s)ds\right]$. □