

# Stochastische Analysis

## 1. Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 28. Oktober.

### Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie: Für alle  $t \geq 0$  ist die Brownsche Bewegung fast-sicher nicht differenzierbar in  $t$ .
2. Warum ist diese Aussage schwächer als folgende: '*Die Brownsche Bewegung ist fast-sicher nicht differenzierbar für alle  $t \geq 0$ .*'?

### Aufgabe 2:

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $B: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Brownsche Bewegung.

1. Zeigen Sie:

$$\int_0^1 B_t dt \quad \text{ist messbar.}$$

2. Berechnen Sie dazu den Erwartungswert und die Varianz.
3. Beweise:  $\lambda \{t \in [0, 1]: B_t = 0\} = 0$  fast sicher, wobei  $\lambda$  das eindimensionale Lebesgue-Maß ist.

### Aufgabe 3:

Sei  $d(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$  wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie:

$$(\mathcal{C}_0([0, 1]), d) \quad \text{ist ein polnischer Raum.}$$

*Hinweis:* Sie dürfen den Weierstraßschen Approximationssatz benutzen.