Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

2.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 4. November.

Aufgabe 1: **schwer**

Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 3 aus der Vorlesung, indem Sie folgendes zeigen:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{1\leq n\leq 2^k} \mathbb{P}\left(d\left(\pi_k \mathscr{S}_n^{(\nu)}, \mathscr{S}_n^{(\nu)}\right) > \lambda\right) = 0 \qquad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Aufgabe 2:

Konstruieren Sie eine Folge von Prozessen (X^n) in $\mathscr{C}_0([0,1])$, sodass die endlich dimensionalen Verteilungen konvergieren, aber die Folge selbst nicht in Verteilung konvergiert.

Hinweis: Man denke an den Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz.

Aufgabe 3:

Geben Sie Zufallsvariablen Z_n^1, Z_n^2 für $n \in \mathbb{N}$, sowie Z_1, Z_2 an, so dass

$$Z_n^1 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z^1 \quad \text{und} \quad Z_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z^2,$$

nicht jedoch

$$Z_n^1 + Z_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} Z^1 + Z^2,$$

gilt.

Aufgabe 4:

Benutzen Sie Donsker's Theorem um folgende Gleichung zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j \leq x\sqrt{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Hinweis: Sie dürfen das Reflexionsprinzip der Brownschen Bewegung und das Portemanteau-Theorem benutzen.