Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

3.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 11. November.

Aufgabe 1:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ein filtrierter messbarer Raum und $\tau \colon \Omega \to [0, \infty]$ eine Stoppzeit. Beweisen Sie folgende Aussagen (Lemma 1.25 aus der Vorlesung):

a) $\mathcal{F}_\tau$ ist eine σ-Algebra.

b) Ist $\tau \equiv s \in [0, \infty]$, dann ist $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_s$.

c) τ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

d) Ist $0 \leq \sigma \leq \tau$, so ist $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

e) Sind $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Stoppzeiten, dann ist $\overline{\sigma} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ eine Stoppzeit und $\underline{\sigma} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$ ist eine schwache Stoppzeit.

f) Ist σ eine Stoppzeit, so ist $\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ein filtrierter messbarer Raum. Zeigen Sie:

a) Die progressive σ-Algebra ist eine σ-Algebra.

b) Ist ein $(E, \mathcal{E})$-wertiger Prozess progressiv messbar, so ist er auch adaptiert und messbar.

Aufgabe 3:
Sei T eine strikte Stoppzeit und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess. Dann heißt $(X_{T\wedge t})$ der gestoppte Prozess. Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 1.31 aus der Vorlesung, indem Sie folgendes zeigen:

Gestoppte progressiv-messbare Prozesse sind wieder progressiv messbar. Das bedeutet, wenn X_t progressiv messbar ist, so ist $X_{T\wedge t}$ ebenfalls progressiv messbar.