Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

4.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 16. November.

Aufgabe 1:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha > 0$ sei $W_t^1 := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} B_{\alpha t}$. Dann ist $(W_t^1)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung.

b) Für $t_0 > 0$ sei $W_t^2 := B_{t+t_0} - B_{t_0}$. Dann ist $(W_t^2)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

c) Sei $W_t^3 := t \cdot B_{1/t}$ für $t > 0$ und $W_0^3 = 0$. Dann ist $(W_t^3)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

d) Sind W_t^i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ bezüglich $\mathbb{F}$ Brownsche Bewegungen?

Hinweis: Sie dürfen folgendes Lemma benutzen: Ein Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Alle endlich-dimensionalen Verteilungen sind Normalverteilt.

2. für $s, t \geq 0$ gilt $\mathbb{E}[W_t W_s] = s \wedge t$ und $\mathbb{E}[W_t] = 0$.

3. W hat fast-sicher stetige Pfade.

Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

a) $M_t := B_t^2 - t \quad$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.

b) $M_t^\alpha := \exp\left\{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t\right\}, \quad$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.

Aufgabe 3:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t\geq 0}$ eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung. Sei $M_t^\alpha := \exp\left\{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t\right\}, \quad$ wie in Aufgabe 2.b). Zeigen Sie: $M_t^\alpha \to 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, für $t \to \infty$.

Aufgabe 4:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit, die nur abzählbar viele Werte annimmt. Zusätzlich sei Y eine beschränkte $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $X_t := Y(M_t - M_{t\wedge\tau})$ ein $\mathbb{F}$-Martingal ist.

Die Übung wird am **Mittwoch, den 16.11.** um 14 Uhr *im Seminarraum 3 des MI stattfinden. Die Vorlesung findet entsprechend am Freitag statt.*