Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

5.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 25. November.

Aufgabe 1:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Sei N_t ein Poissonprozess mit Parameter λ und $\mathbb{F}$ die von N_t erzeugte σ-Algebra. Dann definieren wir $M_t := N_t - \lambda t$. Zeigen Sie, dass M_t ein $\mathbb{F}$-Martingal ist.

b) Sei $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration mit $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal und adaptiert bezüglich $\mathbb{G}$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\geq 0}$ auch ein $\mathbb{G}$-Martingal ist.

Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ reelle Zahlen. Seien H_i für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ beschränkte $\mathcal{F}_{t_i}$-messbare Zufallsvariablen und

$$H_t(\omega) := H_0(\omega)\mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n} H_i(\omega)\mathbb{I}_{(t_i,t_{i+1}]}(t).$$

Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $M_0 = 0$. Dann definieren wir das stochastische Integral als

$$I_t := \int_0^t H_s dM_s := \sum_{i=0}^{n} H_i(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})$$

Zeigen Sie:

a) $H \colon \mathbb{R}_+ \otimes \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}([0,\infty]) \times \mathcal{F}_\infty$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

b) Sei B_t eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dB_s\right] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s)^2 ds\right].$$

c) $(I_t)_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal.

Aufgabe 3:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiger, adaptierter und integrierbarer Prozess. Zeigen Sie: $(X_t)_{t\geq 0}$ ist genau dann ein Martingal, wenn für jede beschränkte Stoppzeit T $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ gilt.