Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

6.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 2. Dezember.

Aufgabe 1:
Sei B_t eine Brownsche Bewegung und $T = \inf\{t\colon B_t = -1\}$. Definiere

$$X_t = \begin{cases} B_{\frac{t}{1-t} \wedge T} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ -1 & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass X_t ein lokales Martingal, jedoch kein Martingal ist.

Hinweis: Was ist der Erwartungswert von X_t? Als lokalisierende Folge von Stoppzeiten betrachte man etwa $\tau_n := \inf\{t\colon X_t = n\} \wedge n$.

Aufgabe 2:

a) Sei B_t eine Brownsche Bewegung und N_t ein Poissonprozess. Zeigen Sie: B_t^2 und N_t sind Semimartingale.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(M, N) \mapsto < M, N >$ bilinear und symmetrisch fast sicher ist, wobei M und N Elemente aus $\mathcal{M}_{loc}^0$ sind.

Aufgabe 3:
Seien B^1 und B^2 zwei unabhängige Brownsche Bewegungen. Zeigen Sie, dass fast sicher $< B^1, B^2 >_t = 0$ für alle $t \geq 0$ ist.

Aufgabe 4:
Seien $f, g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\Delta = \{s = t_0 < \ldots < t_n = t\}$ eine Partition von $[s, t]$ mit $t \geq s \geq 0$. Definiere

$$\int_\Delta f dg := \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\big[g(t_{i+1}) - g(t_i)\big].$$

Sei nun f stetig und g von lokal endlicher Variation, d.h.

$$V\left(g; [s,t]\right) := \sup_\Delta \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| < \infty$$

für alle $[s, t] \subset [0, \infty)$, wobei das Supremum über alle Partitionen von $[s, t]$ gebildet wird. Zeigen Sie:

a)
$$\left|\int_\Delta f dg - f(s)\big[g(t)-g(s)\big]\right| \leq \sup_{u\in[s,t]} |f(u)-f(s)|\, V(g;[s,t]).$$

b) Sind Δ und Δ' Partitionen von $[s,t]$ und gilt $\Delta \subset \Delta'$, dann gilt
$$\left|\int_\Delta f dg - \int_{\Delta'} f dg\right| \leq \sup_{\substack{u,v\in[s,t]\\ |u-v|\leq|\Delta|}} |f(u)-f(v)|\, V(g;[s,t]).$$

c) Der Limes $\lim_{|\Delta|\to 0}\int_\Delta f dg =: \int_s^t f dg$ existiert, wobei der Grenzwert über Folgen von Partitionen von $[s,t]$ gebildet wird. Des Weiteren gilt für das Integral die Abschätzung
$$\left|\int_s^t f dg\right| \leq \sup_{u\in[s,t]} |f(u)|\, V(g;[s,t]).$$

Das Integral heißt Riemann-Stieltjes Integral.

–