Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

7.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 9. Dezember.

Aufgabe 1:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{F}$ erfülle die üblichen Bedingungen. Zusätzlich sei die Filtration so gewählt, dass eine $\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung existiert. Sei f *predictable* und $\int_0^T f_s^2 ds < \infty$. Zeigen Sie:

a) Für alle $T > 0$ existiert eine Folge einfacher Prozesse $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2 ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) Es existiert eine Folge einfacher Prozesse $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für alle $T > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |f_s^n - f_s|^2 ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Bemerkung: Offensichtlich ist Aussage *b*) stärker. Man zeige zunächst *a*) und anschließend *b*).

Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ein filtrierter messbarer Raum. Man zeige, dass die *predictable* σ-Algebra erzeugt wird von allen linksstetigen, adaptierten Prozessen. Mit anderen Worten: die *predictable* σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra auf $\Omega \times [0, \infty)$, für welche alle linksstetigen, adaptierten Prozesse messbar sind.

Aufgabe 3:
Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ deterministisch und von der Form

$$f(t) := f_0 \mathbb{I}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n} f_i \mathbb{I}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{1}$$

mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$ und $f_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sei $B\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung. Dann ist das Wiener Integral definiert als

$$\int_0^t f(s) dB_s := \sum_{i=0}^{n} f_i \left(B_{t\wedge t_{i+1}} - B_{t\wedge t_i}\right) \qquad \text{für } t \in [0,1].$$

a) Zeigen Sie: $\int_0^t f(s)dB_s$ ist normalverteilt und die Verteilung ist $N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$.

b) Sei $\mathscr{S}$ die Menge aller Funktionen der Form (1). Setze

$$\|f\|_2^2 := \int_0^1 f(s)^2 ds$$

und $S := \mathscr{S}/\sim$, wobei $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ λ-fast überall. Zeigen Sie, dass

$$(S, \|\cdot\|_2) \ni f \xrightarrow{I} \int_0^1 f(s) dB_s \in L^2(\mathbb{P}) \tag{2}$$

eine Isometrie ist.

c) Zeigen Sie, dass I in (2) fortgesetzt werden kann zu einer Isometrie

$$I\colon \; L^2([0,1], \lambda) \to L^2(\mathbb{P}).$$