Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

8.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 16. Dezember.

Aufgabe 1:
Seien $\gamma, \eta\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und von endlicher Variation. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\gamma_T\eta_T - \gamma_0\eta_0 = \int_0^T \gamma_s d\eta_s + \int_0^T \eta_s d\gamma_s, \tag{1}$$

$$F(\gamma_T) - F(\gamma_0) = \int_0^T F'(\gamma_s) d\gamma_s, \tag{2}$$

wobei die Integrale Riemann-Stieltjes Integrale sind.

Aufgabe 2:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Seien X und Y lokale Martingale. Dann ist das Stratonovich-Integral definiert als

$$t \mapsto \int_0^t X_s \circ dY_s := \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2} < X, Y >_t .$$

Zeigen Sie, dass für eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s \qquad \text{fast sicher, für alle } t \geq 0.$$

Aufgabe 3:
Sei M lokales Martingal. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto exp\left\{\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} < M >_t\right\}$$

ein lokales Martingal ist.