Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

9.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 13. Januar.

Aufgabe 1:
Sei $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $X = \left(X^1, \ldots, X^d\right)$ mit $X^i \in \mathscr{S}$ für $i = 1, \ldots, d$. Leiten Sie eine Itô-Formel für $t \mapsto F(t, X_t)$ her.

Aufgabe 2:
Sei $B: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung. Wir definieren das n-fach iterierte Itô-Integral wie folgt:

$$I^{(1)}(t) := B_t,$$
$$I^{(n+1)}(t) := \int_0^t I^{(n)}(s) dB_s \qquad \text{für } t \geq 0.$$

a) Berechnen Sie: $\quad \mathbb{E}\left[\left(I^{(n)}\right)^2\right]$

b) Zeigen Sie, dass $I^{(n)}(t)$ endliche p-te Momente für alle $p > 0$ hat.

Aufgabe 3:

a) Sei $\gamma: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\gamma_0 = 0$. Finden Sie eine explizite Lösung der gewöhnlichen DGL
$$\begin{cases} y_t' = y_t \cdot \gamma_t' & t \geq 0 \\ y_0 = \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Sei $B: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung. Lösen Sie die stochastische DGL
$$X_t = X_0 + \lambda \int_0^t X_s \circ dB_s$$
mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $X_0 = \xi \in \mathbb{R}$ explizit. Berechnen Sie zusätzlich $\limsup_{t\to\infty} X_t$ und $\liminf_{t\to\infty} X_t$.

c) Beantworten Sie die gleichen Fragen wie in Aufgabenteil b) für die Itô-Gleichung
$$X_t = X_0 + \lambda \int_0^t X_s dB_s.$$

Aufgabe 4:
Sei $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$. Sei $\gamma\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^d$ stetig. Aus Peanos Theorem (*ohne Beweis*) folgt, dass ein $\tau > 0$ existiert, sodass die Gleichung

$$y_t = \xi + \int_0^t b(y_s)ds + \gamma(t) \tag{1}$$

eine stetige Lösung für $t \in [0,\tau)$ hat.

a) Zeigen Sie, dass für $y\colon [0,\tau) \to \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\limsup_{t\to\tau} |y_t| < \infty$$

b) Zeigen Sie, dass je zwei Lösungen $y^1, y^2\colon [0,\tau) \to \mathbb{R}^d$ von (1) identisch sind.

c) Mit etwas mehr Arbeit lässt sich zeigen, dass (1) eine eindeutige stetige Lösung auf $t \in [0,\infty)$ besitzt. Schließen Sie, dass die stochastische Differentialgleichung

$$X_t = \xi + \int_0^t b(X_s)ds + \sum_{k=1}^m \sigma_k Z_t^k \tag{2}$$

für konstante Vektorfelder $\sigma_1,\dots,\sigma_m \in \mathbb{R}^d$ und stetige Prozesse $Z = \left(Z^1,\dots,Z^m\right)$ eine eindeutige Lösung im Sinne von Definition 2.25 besitzt.