Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

10.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 20. Januar.

Aufgabe 1:
Seien $M, N \in \mathcal{M}^0_{\ell oc}$, $f \in \mathcal{L}_{\ell oc}(M)$, $g \in \mathcal{L}_{\ell oc}(N)$. Man zeige die Kunita-Watanabe Gleichung & Ungleichung:

a)
$$\left| \int_0^t f_s g_s d < M, N >_s \right| \leq \sqrt{\int_0^t f_s^2 \; d < M >_s} \sqrt{\int_0^t g_s^2 \; d < N >_s} \qquad \text{f.s.}$$

b)
$$< \int_0^\cdot f_s dM_s, \int_0^\cdot g_s dN_s >_t = \int_0^t f_s g_s \; d < M, N >_s \qquad \text{f.s.}$$

c)
$$\mathbb{E}\left[< \int_0^\cdot f_s dM_s, \int_0^\cdot g_s dN_s >_t \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^t f_s^2 d < M >_s \right]} \sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^t g_s^2 d < N >_s \right]},$$

wenn die Integrale auf der rechten Seite existieren.

Aufgabe 2: [Itô-Isometrie]
Sei $M \in \mathcal{M}^0_{\ell oc}$ und $f \in \mathcal{L}_{\ell oc}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_s \; dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_s^2 \; d < M >_s \right]$$

ist, falls die rechte Seite endlich ist.

Aufgabe 3:
Sei $T > 0$ und f_s ein linksstetiger, adaptierter Prozess, sodass $\mathbb{E}\left[\int_0^T f_s^2 ds \right] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^t f_s dB_s$$

mit $0 \leq t \leq T$ ein Martingal ist.

Aufgabe 4:
Seien B_t, W_t^1 und W_t^2 unabhängige, eindimensionale Brownsche Bewegungen.

a) Sei X_s ein adaptierter, stetiger stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass

$$W_t := \int_0^t \cos(X_s) dW_s^1 + \int_0^t \sin(X_s) dW_s^2$$

eine Brownsche Bewegung ist.

b) Sei $sign(x) := 1$ falls $x > 0$ und $sign(x) = -1$ falls $x \leq 0$. Zeigen Sie, dass ein Prozess, der Lösung der SDGL

$$W_t = \int_0^t sign(W_S) dB_S$$

ist, eine Brownsche Bewegung ist.