Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

# Stochastische Analysis

## 11.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 27. Januar.

**Aufgabe 1:**
Beweisen Sie Lemma 3.3 aus der Vorlesung: Ist $M_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetiges $\mathbb{F}$-Martingal, sind $S, T$ $\mathbb{F}$-Stoppzeiten mit $S \leq T$ und gilt

$$< M >_S = < M >_T < \infty \quad \text{f.s.},$$

so ist $M$ fast sicher konstant auf $[S, T]$.

**Aufgabe 2:**
Sei $M\colon [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ stetiges, $\mathbb{R}$-wertiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und $< M >_\infty = \infty$. Man zeige, dass für jedes $p > 2$

$$\sup_D \sum_{t_i \in \mathcal{D}} \left| M_{t_{i+1}} - M_{t_i} \right|^p < \infty \quad \text{f.s.}$$

gilt, wobei das Supremum über endliche Partitionen des Intervalls $[0, T]$ gebildet wird.

**Aufgabe 3:**
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ bezüglich $P$ und $b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. $b = (b^1, \ldots, b^d)$ sei derart, dass $b^i(x)$ nur von den ersten $i-1$ Komponenten von $x$ abhängt, d.h. $b^1$ ist konstant und

$$b^i(x) = b^i(x_1, \ldots, x_{i-1}) \qquad \text{für alle } i = 2, \ldots, d$$

Zeigen Sie

a) Es existiert eine Lösung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ von $X = b(X) + Y$.

b) Es gibt ein Maß $Q$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$, unter dem $X$ $\mathcal{N}(0, I_d)$ verteilt ist, und es gilt

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left\{ < X, b(X) > - \frac{|b(X)|^2}{2} \right\}$$

**Aufgabe 4:**
Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ messbarer Raum und seien $Q_n, Q, P$ Wahrscheinlichkeitsmaße. Es gelte

$$Q_n \to Q \qquad \text{schwach für } n \to \infty$$

und $Q_n << P$ für alle $n \geq 1$. Beweisen oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Dann gilt $Q << P$.